Il existe différentes manières de représenter les graphes. Dans un premier temps, on choisit de les représenter par leur matrice d'adjacence.

## 1 Structure de données (voir fichier `graphe-1.h`)

*Dans ce TP introductif*, un graphe est caractérisé par :
— son nombre `n` de sommets : **son ensemble $V$ de sommets est alors $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ ;**
— sa matrice `adj` d'adjacence ;
— son nombre `m` d'arêtes.
De plus, l'ordre des graphes représentés est borné par une constante `GRAPHE_ORDRE_MAX`.
Ceci est défini dans le fichier `graphe-1.h` par les lignes suivantes :

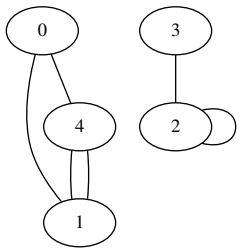
```
#define GRAPHE_ORDRE_MAX 9  /* nombre maximal de sommets dans un graphe */
struct s_graphe {
    int n;  /* nombre de sommets du graphes
        doit être compris entre 1 et GRAPHE_ORDRE_MAX
        V = {0 ,..., n - 1} */
    int m;  /* nombre d'arêtes du graphes (entier naturel) */
    int adj[GRAPHE_ORDRE_MAX][GRAPHE_ORDRE_MAX];
    /* matrice d'adjacence du graphe (doit être cohérente avec m ) :
    seules les lignes et colonnes d'indice 0 à n - 1 sont à lire */
};

typedef struct s_graphe graphe;
```

## 2 Fonctions de manipulation (voir fichier `graphe-1.h`)

Pour cette structure, on adoptera les règles de gestion suivantes :
— un graphe peut être initialisé (pour l'instant, au graphe stable), pour un nombre de sommets donné ;
— on peut ensuite ajouter ou supprimer des arêtes du graphe ;
— en revanche l'ordre du graphe ne peut être modifié sans ré-initialiser totalement le graphe.

**Question 1:** Donner les valeurs des champs de la structure, si la variable `g` de type `graphe` représente le graphe ci-dessous.




Combien (en nombre d'`int`) de place en mémoire prend une variable de type `graphe` ?

--- * ---

### 2.1 Initialisation

Étant donnés un graphe et un ordre `n` à valeur dans $\{0, 1, \ldots, \texttt{GRAPHE\_ORDRE\_MAX}\}$, on souhaite pouvoir initialiser le graphe en un stable, c'est à dire un *graphe sans arête* d'ordre `n`.

**Question 2:** Implémenter dans le fichier `graphe-1.c` la fonction `int graphe_stable(graphe* g, int n)` qui permet d'initialiser le graphe pointé par `g` en un graphe stable et retourne `0` en cas de succès, `-1` en cas d'échec (valeur de `n` trop grande ou négative).

--- * ---

### 2.2 Ajout / suppression d'arête

Étant donné un graphe, on souhaite pouvoir :
- ajouter une arête $\{v, w\}$ spécifique ;
- supprimer une arête $\{v, w\}$ spécifique.

**Question 3:** Implémenter les fonctions `void graphe_ajouter_arete(graphe* g, int v, int w)` et `int graphe_supprimer_arete(graphe* g, int v, int w)` correspondantes.

La valeur de retour de `graphe_supprimer_arete` est `0` en cas de succès, `-1` en cas d'échec.

--- * ---

### 2.3 Accesseurs en lecture

Étant donné un graphe, on souhaite pouvoir connaître ou savoir :
- son nombre de sommets ;
- son nombre d'arêtes ;
- le nombre de fois que deux sommets donnés $v$ et $w$ sont adjacents ;
- le degré d'un sommet $v$ donné ;
- s'il est ou non simple (c'est-à-dire sans boucle ni arête multiple).

**Question 4:** Implémenter les fonctions correspondantes dans le fichier `graphe-1.c`.

--- * ---

### 2.4 Entrées / Sorties

La fonction `void graphe_afficher(graphe* g)` affiche sur la console :
- la valeur des champs `n` et `m` de ce graphe, et
- sa matrice d'adjacence, avec en plus les degrés de chaque sommet.

Cette fonction, un peu longue à écrire, est déjà implémentée pour vous. N'hésitez toutefois pas à parcourir son code et si nécessaire, à poser des questions à votre chargé de TP.

## 3 Test des premières fonctions

À présent que les fonctions sont écrites, il s'agit d'en vérifier le bon fonctionnement. Le fichier `main.c` comporte déjà les appels de fonctions permettant d'initialiser le graphe `g` au graphe représenté dans la première question.

1. Compiler et exécuter un programme qui affiche ce graphe (il suffit de lancer la commande `make`, puis le programme `./graphe-test`).
2. Tester la fonction `graphe_supprimer_arete` (cas d'usage : l'arête existe en 0, 1 ou plusieurs exemplaires).
3. Tester la fonction `graphe_stable` (cas d'usage : `n` dans et hors bornes).
4. Tester la fonction `graphe_est_simple` sur le graphe déjà écrit d'abord, puis en le modifiant de manière à ce qu'il devienne simple.

## 4 Fonctions supplémentaires

On vous demande maintenant d'écrire de nouvelles fonctions permettant d'initialiser un graphe ou d'en étudier certaines caractéristiques.

**Question 5:** Implémenter (et penser à déclarer) la fonction `int graphe_complet(graphe *g, int n)`, qui étant donné un nombre `n` de sommets initialise le graphe pointé par `g` au graphe complet à $n$ sommets, c'est-à-dire au graphe dans lequel deux sommets distincts sont toujours reliés par une arête. La valeur de retour sera 0 en cas de succès et $-1$ en cas d'échec (mauvaise valeur de `n`). Penser à tester votre fonction.

--- * ---

Rappels : l'entête `stdlib.h` de la bibliothèque standard du C contient la déclaration des fonctions `int rand()` et `void srand(unsigned seed)` ainsi que la constante `RAND_MAX`. Les appels successifs à `rand` retournent des nombres **entiers** pseudo-aléatoires compris entre `0` et `RAND_MAX`.

La fonction `srand` initialise la graine du générateur de nombres aléatoires à son argument (la même graine donne lieu aux mêmes valeurs de retour successives de `rand`).

L'entête `time.h` de la bibliothèque standard du C contient la déclaration de la fonction `time_t time(time_t *t)` qui, appelé avec l'argument `NULL`, indique le nombre de seconde depuis le 1er janvier 1970.

Tout cela mis ensemble permet d'écrire le bout de code suivant, qui affiche 10 résultats de pile ou face équilibré à la suite.

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h> /* rand, srand, RAND_MAX */
#include <time.h> /* time pour initialiser la graine */

int main()
{
    int i;
    double U;
    /* Initialisation du générateur de nombre aléatoire :
     * la graine est donnée par le nombre de secondes depuis
     * le 1er janvier 1970, et sera donc différente à chaque exécution (ou
     * presque). */
    srand(time(NULL));
    /* 10 tirages de pile ou face (affichage sur le terminal) */
    for (i = 0; i < 10; ++i) {
        U = (double) rand() / RAND_MAX; /* U aléatoire entre 0 et 1 */
        if (U <= .5)
            puts("PILE !");
        else
            puts("FACE !");
    }
    return EXIT_SUCCESS;
}
```

**Question 6:** Implémenter la fonction `int graphe_aleatoire(graphe *g, int n, double p)`, qui doit initialiser le graphe pointé par `g` à un graphe aléatoire à $n$ sommets, où pour tous sommets $u$ et $v$ distincts, l'arête $\{u, v\}$ est présente avec probabilité $p$ (et absente avec probabilité $1-p$), ceci de façon indépendante pour chaque couple de sommets. La valeur de retour est encore `0` en cas d'échec, `-1` si `n` n'est pas adapté et `-2` si `p` n'est pas compris entre `0` et `1`. Tester votre fonction.

--- * ---

**Question 7:** Implémenter la fonction `int graphe_cycle(graphe *g, int n)` qui initialise le graphe pointé par `g` au graphe *cycle* de taille $n$, c'est-à-dire au graphe où les arêtes sont $\{0, 1\}$, $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, ..., $\{n-1, 1\}$.

--- * ---

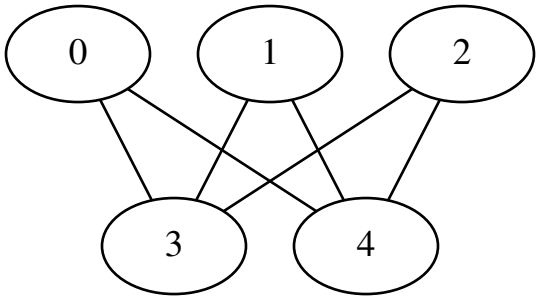



FIGURE 1 – Le graphe biparti $K_{3,2}$.

Un graphe biparti, est un graphe dont l'ensemble $V$ des sommets peut être partionné en deux parties $W$ et $Z$ telles que toute arête a exactement une extrémité dans $W$ et l'autre dans $Z$.

Un graphe biparti complet est un graphe biparti simple où, pour tout sommet $w$ de $W$ et tout sommet $z$ de $Z$, l'arête $\{w, z\}$ est présente dans le graphe. Ce graphe est noté $K_{m,p}$, où $m$ est le cardinal de $W$ et $p$ celui de $Z$. La figure 1 représente $K_{3,2}$.

**Question 8:** Implémenter la fonction `int graphe_biparti(graphe *g, int m, int p)` qui initialise le graphe pointé par `g` au graphe biparti complet $K_{m,p}$. On supposera que la partie notée $W$ ci-dessus est $\{0, 1, 2, ..., m-1\}$ et la partie notée $Z$ ci-dessus est $\{m, m+1, ..., m+p-1\}$ (comme sur la figure 1). On retournera 0 en cas de succès, $-1$ si les valeurs de $m$ et de $p$ ne conviennent pas.

--- * ---

On rappelle qu'un graphe $H = (V, F)$ est un sous-graphe partiel d'un graphe $G = (V, E)$ si $F$ est inclus dans $E$ (remarquez que les ensembles de sommets sont les mêmes).

**Question 9:** Implémenter la fonction `int graphe_est_sousgraphe_partiel(graphe *g, graphe *h)` qui retourne 1 si le graphe pointé par `h` est un sous-graphe partiel du graphe pointé par `g` et 0 sinon.

--- * ---

**Question 10:** Implémenter la fonction `int graphe_contient_triangle(graphe *g)` qui retourne 1 si le graphe pointé contient un triangle (c'est-à-dire un cycle de longueur 3) et 0 sinon.

--- * ---

**Question 11:** Cette question est *pour l'instant* plus délicate et est en bonus.

Implémenter la fonction `int graphe_est_connexe(graphe *g)` qui retourne 1 si le graphe pointé par `g` est connexe, et 0 sinon.

--- * ---