

Épreuve de mi-semester

Durée de l'épreuve : **2 heures**.
Aucun document n'est autorisé.

Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié.

Exercice 1 Tickets d'or **6 points**

Une entreprise qui fabrique des tablettes de chocolat décide de lancer un jeu de hasard promotionnel. Dans 20% de ses tablettes se trouve un ticket d'or qui permet de visiter sa chocolaterie.

1. La famille Bucket décide d'acheter 4 tablettes de chocolat. On note S la variable aléatoire égale au nombre de tickets d'or qu'elle obtient.
 - (a) Quelle est la loi de S ? Donner son espérance et sa variance. /2
 - (b) Quelle est la probabilité que les Bucket aient exactement 2 tickets d'or? /1
 - (c) Quelle est la probabilité que les Bucket aient au moins un ticket d'or? /1
2. La famille Salt décide d'acheter les tablettes de chocolat une par une, jusqu'à tomber sur un ticket d'or. On note T la variable aléatoire égale au nombre de tablettes achetées par les Salt.
 - (a) Quelle est la loi de T ? /1
 - (b) Quelle est la probabilité que les Salts aient acheté exactement 3 tablettes? /1

Exercice 2 **5 points**

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$. Soit $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ pour $1 \leq k \leq 4$. Supposons que $p_1 = p_2 = \alpha$ et $p_3 = p_4 = 2\alpha$, avec α une constante réelle.

1. Calculer la valeur de α . /1
2. Calculer $\mathbb{P}(X \geq 2)$ et $\mathbb{P}(X < 3 \mid X > 1)$. /2
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\text{Var}(X)$. /2

Exercice 3 **3 points**

On dispose de trois pièces de monnaie, l'une équilibrée et les deux autres truquées pour lesquelles la probabilité d'obtenir pile est de $1/3$.

1. On choisit une pièce au hasard et on la lance. Quelle est la probabilité d'obtenir pile? /1,5
2. On choisit une pièce au hasard et on la lance. Si on obtient pile, quelle est alors la probabilité qu'on ait choisi une pièce équilibrée? /1,5

Exercice 4 **6 points**

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes dont la loi est donnée par la table suivante :

	Y			
X \		0	1	2
-1		1/10	1/5	1/4
0		3/20	1/10	0
1		0	1/20	3/20

1. Déterminer les lois de X et de Y . /1,5
2. X et Y sont-elles indépendantes? Justifier votre réponse. /1
3. Calculer $\mathbb{P}(X \geq 0)$ et $\mathbb{P}(0 \leq X + Y \leq 2)$. /1,5
4. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\text{Var}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(X + Y)$. /2