Corrigé de l'épreuve de mi-semestre

Exercice 1 Tickets d'or

1. Famille Bucket

(a) La variable aléatoire S est la somme de $n = 4$ variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p = 0,2$, donc S suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,2$. L'espérance et la variance de cette loi sont données par des formules du cours : $\mathbb{E}(X) = np = 0,2 \times 4 = 0,8$ et $\mathrm{Var}(X) = np(1-p) = 0,64$.

(b) Comme $S \sim \mathscr{B}(4; 0,2)$,

$$\mathbb{P}(S = 2) = \binom{4}{2} 0,2^2 (1 - 0,2)^{4-2} = 0,1536.$$

(c) Pour gagner du temps, on utilise l'événement contraire :

$$\mathbb{P}(S \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(S = 0) = 1 - 0,8^4 = 0,5904.$$

2. Famille Salt

(a) La variable T est le temps de premier succès dans une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $p = 0,2$ donc T suit la loi géométrique de paramètre $0,2$.

(b) En particulier, comme $T \sim \mathscr{G}(0,2)$,

$$\mathbb{P}(T = 3) = 0,2(1 - 0,2)^{3-1} = 0,128.$$

Exercice 2

1. D'après l'énoncé, $\mathbb{P}(X \in \{1; 2; 3; 4\}) = 1$, puis les événements considérés étant incompatibles,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 1) &= 1 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 &= 1 \\ \alpha + \alpha + 2\alpha + 2\alpha &= 1, \end{aligned}$$

ce qui donne $6\alpha = 1$ donc $\alpha = \frac{1}{6}$.

2. On en déduit la loi de X sous la forme du tableau suivant :

k	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

On peut maintenant calculer :

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4)\ ^{1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Puis,

$$\mathbb{P}(X < 3 \mid X > 1) = \frac{\mathbb{P}((X < 3) \cap (X > 1))}{\mathbb{P}(X > 1)} = \frac{\mathbb{P}(X = 2)}{\mathbb{P}(X \geq 2)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{5}.$$

3. Enfin,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 1 \times \mathbb{P}(X = 1) + 2 \times \mathbb{P}(X = 2) + 3 \times \mathbb{P}(X = 3) + 4 \times \mathbb{P}(X = 4) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + 1 + \frac{4}{3} = \frac{17}{6}. \end{aligned}$$

1. On pouvait bien sûr aussi passer par l'événement contraire pour gagner du temps.

et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X^2\right) &= 1^2 \times \mathbb{P}(X=1) + 2^2 \times \mathbb{P}(X=2) + 3^2 \times \mathbb{P}(X=3) + 4^2 \times \mathbb{P}(X=4) \\ &= \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 9 \times \frac{1}{3} + 16 \times \frac{1}{3} = \frac{55}{6}.\end{aligned}$$

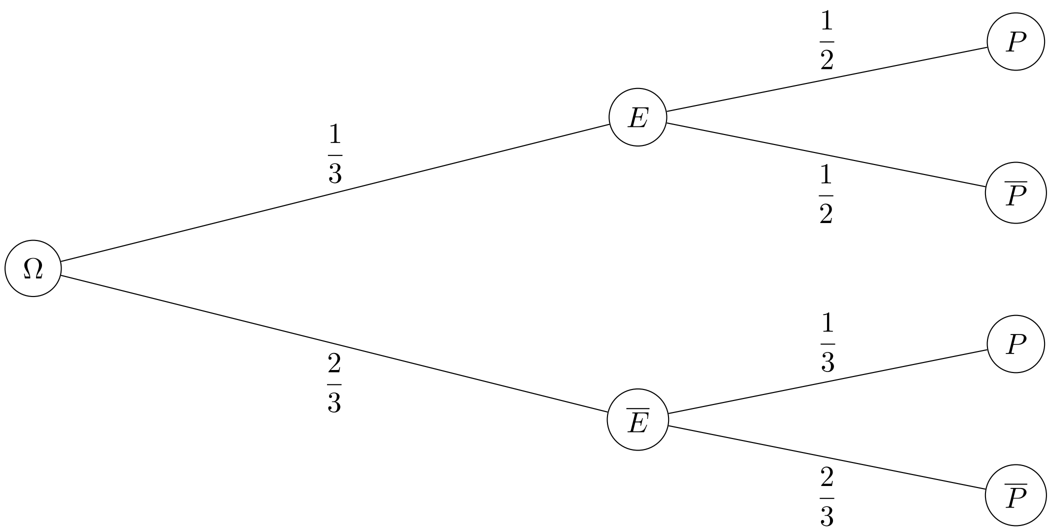
donc la variance de X vaut :

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{55}{6} - \frac{17^2}{6^2} = \frac{41}{36}.$$

Exercice 3

On note E l'événement « la pièce choisie est bien équilibrée » et P l'événement : « le lancer donne pile ».

D'après l'énoncé, $\mathbb{P}(E) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(P \mid E) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}\left(P \,\middle|\, \overline{E}\right) = \frac{1}{3}$. Ces données sont représentées dans l'arbre de probabilités conditionnelles suivant, que l'on a complété (où l'on a noté l'espace de probabilité tout entier Ω).



1. Il ne reste plus qu'à utiliser la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(E)\,\mathbb{P}(P \mid E) + \mathbb{P}\left(\overline{E}\right)\mathbb{P}\left(P \,\middle|\, \overline{E}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{18}.$$

2. Enfin,

$$\mathbb{P}(E \mid P) = \frac{\mathbb{P}(E \cap P)}{\mathbb{P}(P)} = \frac{\mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(P \mid E)}{\frac{7}{18}} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{7}{18}} = \frac{3}{7}.$$

Exercice 4

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes dont la loi est donnée par la table suivante :

X \ Y	0	1	2
-1	1/10	1/5	1/4
0	3/20	1/10	0
1	0	1/20	3/20

1. Pour déterminer $\mathbb{P}(X=-1)$, les événements considérés étant incompatibles, on écrit :

$$\mathbb{P}(X=-1)=\mathbb{P}(X=-1,\ Y=0)+\mathbb{P}(X=-1,\ Y=1)+\mathbb{P}(X=-1,\ Y=2)=\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}=\frac{11}{20}.$$

On raisonne exactement de la même manière, en sommant sur les lignes pour X et sur les colonnes pour Y, pour finalement obtenir les lois de ces variables aléatoires :

x	-1	0	1
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{11}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{4}{20}$

y	0	1	2
$\mathbb{P}(Y=y)$	$\frac{5}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{8}{20}$

2. D'après leur loi jointe, $\mathbb{P}(X=1,\ Y=0)=0$, or

$$\mathbb{P}(X=1)\times\mathbb{P}(Y=0)=\frac{4}{20}\times\frac{5}{20}\neq 0,$$

donc les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

3. $\mathbb{P}(X\geq 0)=\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1)=\frac{9}{20}$.
Puis l'événement $\{0\leq X+Y\leq 2\}$ est l'événement contraire de $\{X=-1,\ Y=0\}\cup\{Y=2,\ X=1\}$, donc sa probabilité vaut

$$\mathbb{P}(0\leq X+Y\leq 2)=1-\frac{3}{20}-\frac{2}{10}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}.$$

4. On calcule l'espérance de X :

$$\mathbb{E}(X)=-1\times\mathbb{P}(X=-1)+0\times\mathbb{P}(X=0)+1\times\mathbb{P}(X=1)=-\frac{7}{20},$$

puis l'espérance de son carré

$$\mathbb{E}\left(X^2\right)=(-1)^2\times\mathbb{P}(X=-1)+0^2\times\mathbb{P}(X=0)+1^2\times\mathbb{P}(X=1)=\frac{15}{20},$$

pour obtenir sa variance :

$$\mathrm{Var}(X)=\mathbb{E}\left(X^2\right)-(\mathbb{E}(X))^2=\frac{15}{20}-\frac{7^2}{20^2}=\frac{15\times 20-49}{20^2}=\frac{251}{400}.$$

L'espérance de Y vaut :

$$\mathbb{E}(Y)=\frac{7}{20}+2\times\frac{8}{20}=\frac{23}{20}.$$

Enfin, en utilisant la linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X+Y)=\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)=-\frac{7}{20}+\frac{23}{20}=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}.$$

Nous en profitons pour rappeler qu'en général $\mathbb{E}(XY)\neq\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.