

Épreuve de mi-semester

Durée de l'épreuve : **2 heures**.

Aucun document n'est autorisé. La calculatrice est autorisée.

Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié.

Remarques :

- Tout calcul menant à probabilité strictement supérieure à 1 ou strictement négative *sans aucun commentaire de votre part* donnera lieu à une pénalité d'un point.
- Pour la plupart des questions, si vous ne justifiez pas correctement une réponse (même juste), vous n'aurez aucun point.
- Une copie mal présentée ou dont les résultats sont trop souvent non justifiés ou très mal justifiés se verra pénalisée d'un maximum de 2 points.
- En revanche, il est possible dans certaines questions d'obtenir une partie des points en donnant un début de réponse.
- Ce sujet ne comporte aucun piège.

Exercice 1 Les moutons de Villetaneuse

10 points

Les questions 1, 2, 3 et 4 sont indépendantes. Les statistiques sur les moutons de l'université sont inventées de toutes pièces.

Parmi les moutons qui paissent sur le campus de Villetaneuse, 30% ont une tête noire et les autres ont une tête blanche. Parmi les moutons à tête blanche, seuls 20% se laissent caresser ! Les moutons noirs sont plus calins et ils sont 40% à se laisser caresser.

1. On choisit un mouton uniformément au hasard. Soit X la variable aléatoire égale à 1 si ce mouton est à tête noire, 0, sinon. Quelle est la loi de X ? Son espérance ? Sa variance ? /1
2. On choisit un mouton uniformément au hasard.
 - (a) Justifier rigoureusement que la probabilité de l'événement C : « le mouton se laisse caresser » vaut $p = 0,26$.
/1,5
 - (b) Un étudiant s'approche d'un mouton au hasard et il se laisse caresser. Quelle est dans ce cas la probabilité qu'il ait la tête blanche ? /1
 - (c) Quelle est la probabilité qu'un mouton choisi au hasard ait la tête noire *ou* accepte d'être caressé (ou les deux) ? /1
3. On rappelle que la probabilité qu'un mouton choisi au hasard se laisse caresser est $p = 0,26$. On choisit successivement, uniformément au hasard, avec remise, 5 moutons. On note S le nombre de moutons qui acceptent de se faire caresser.
 - (a) Quelle est la loi de S ? Justifier. /1
 - (b) Calculer la probabilité qu'exactement 2 moutons se laissent caresser. /1
 - (c) Quelle est l'espérance de S ? /0,5
4. On rappelle que la probabilité qu'un mouton choisi au hasard se laisse caresser est $p = 0,26$. Une personne du campus tient absolument à caresser un mouton. Chaque jour, cette personne s'approche d'un mouton au hasard et essaie de le caresser. On note T la variable aléatoire égale au nombre de jours nécessaires à cette personne pour caresser un mouton.
 - (a) Quelle est la loi de T ? Justifier. /1
 - (b) Quelle est la probabilité que cette personne caresse son premier mouton le troisième jour ? /1

(c) Quelle est l'espérance de T ? /0,5

Exercice 2 La pêche d'Alice

3,5 points

Soit $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels définie par

$$p_k = e^{-2} \frac{2^k}{k!}.$$

1. Justifier par un calcul que /1

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

2. Alice va à la pêche. Le nombre de poissons qu'elle attrape est un nombre aléatoire N dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(N = k) = p_k.$$

La loi de N est-elle une loi de référence? Si oui, laquelle? Avec quel(s) paramètre(s)? /1

3. Quelle est la probabilité qu'Alice attrape au moins un poisson? /1

4. Quelle est l'espérance du nombre de poissons attrapés? /0,5
(On pourra se servir d'un résultat du cours.)

Exercice 3

7 points

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes dont la loi jointe est donnée par la table suivante, où α est un nombre réel entre 0 et 1 :

		Y	
		-1	1
X	-1	0,25	0,2
	0	0,1	0,3
	1	0,1	α

1. Justifier que $\alpha = 0,05$. /0,5

2. Déterminer les lois marginales de X et Y . /1,5

3. X et Y sont-elles indépendantes? Justifier votre réponse. /1

4. Calculer $\mathbb{P}(X \geq 0)$ et $\mathbb{P}(X + Y = 0)$. /1

5. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\text{Var}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(X + Y)$. /2

6. Calculer $\mathbb{E}(XY)$. /1