Corrigé de l'épreuve de mi-semestre

Exercice 1 Les moutons de Villetaneuse Parmi les moutons qui paissent sur le campus de Villetaneuse, 30% ont une tête noire et les autres ont une tête blanche. Parmi les moutons à tête blanche, seuls 20% se laissent caresser ! Les moutons noirs sont plus calins et ils sont 40% à se laisser caresser.

1. On choisit un mouton uniformément au hasard. Soit X la variable aléatoire égale à 1 si ce mouton est à tête noire, 0, sinon. Quelle est la loi de X ? Son espérance ? Sa variance ?
   Solution : Comme X ne prend que les valeurs 0 et 1, elle suit une loi de Bernoulli. D'après l'énoncé, son paramètre vaut $0,3$ (la probabilité qu'un mouton choisi au hasard ait une tête noire). D'après le cours, on a donc
   $$\mathbb{E}[X] = 0,3 \quad \text{et} \quad \operatorname{Var}[X] = 0,3 \times 0,7 = 0,21.$$

2. On choisit un mouton uniformément au hasard.

(a) Justifier rigoureusement que la probabilité de l'événement C : « le mouton se laisse caresser » vaut
$$p = 0,26.$$

Solution : Soit N l'événement « le mouton a une tête noire ». En utilisant la partition de l'univers en N et $\overline{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(C \cap N) + \mathbb{P}\left(C \cap \overline{N}\right) && (1)\\
&= \mathbb{P}(N)\,\mathbb{P}(C \mid N) + \mathbb{P}\left(\overline{N}\right)\mathbb{P}\left(C \mid \overline{N}\right) && (2)\\
&= 0,3 \times 0,4 + 0,7 \times 0,2 = 0,26 && (3)
\end{aligned}$$

(b) Un étudiant s'approche d'un mouton au hasard et il se laisse caresser. Quelle est dans ce cas la probabilité qu'il ait la tête blanche ?
Solution :
$$\mathbb{P}\left(\overline{N} \mid C\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\overline{N} \cap C\right)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}\left(C \mid \overline{N}\right)\mathbb{P}\left(\overline{N}\right)}{0,26} = \frac{0,2 \times 0,7}{0,26} = \frac{7}{13} \approx 0,538.$$

(c) Quelle est la probabilité qu'un mouton choisi au hasard ait la tête noire *ou* accepte d'être caressé (ou les deux) ?

$$\mathbb{P}(C \cup N) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(N) - \mathbb{P}(N \cap C) = 0,26 + 0,30 - \mathbb{P}(C \mid N)\,\mathbb{P}(N) = 0,56 - 0,4 \times 0,3 = 0,44.$$

3. On rappelle que la probabilité qu'un mouton choisi au hasard se laisse caresser est $p = 0,26$. On choisit successivement, uniformément au hasard, avec remise, 5 moutons. On note S le nombre de moutons qui acceptent de se faire caresser.

(a) Quelle est la loi de S ? Justifier.
Solution : S est le nombre de succès dans la répétition de 5 expériences de Bernoulli identiques et indépendantes où la probabilité de succès vaut $0,26$, donc S suit la loi binomiale de paramètres 5 et $0,26$.

(b) Calculer la probabilité qu'exactement 2 moutons se laissent caresser.
Solution : D'après le cours, comme $S \sim \mathcal{B}(5\ ;\ 0,26)$,
$$\mathbb{P}(S = 2) = \binom{5}{2} \times 0,26^2 \times (1 - 0,26)^3 = \frac{5 \times 4}{2} \times 0,26^2 \times 0,74^3 \approx 0,274.$$

(c) Quelle est l'espérance de S ?
Solution : D'après le cours, comme $S \sim \mathcal{B}(5\ ;\ 0,26)$,
$$\mathbb{E}[X] = 5 \times 0,26 = 1,30.$$

4. On rappelle que la probabilité qu'un mouton choisi au hasard se laisse caresser est $p = 0,26$. Une personne du campus tient absolument à caresser un mouton. Chaque jour, cette personne s'approche d'un mouton au hasard et essaie de le caresser. On note T la variable aléatoire égale au nombre de jours nécessaires à cette personne pour caresser un mouton.

(a) Quelle est la loi de T ? Justifier.

Solution : La variable aléatoire T est le temps d'attente du premier succès dans une succession d'expériences de Bernoulli identiques et indépendantes où la probabilité de succès vaut $0,26$, donc T suit la loi géométrique de paramètre $0,26$.

(b) Quelle est la probabilité que cette personne caresse son premier mouton le troisième jour ?

Solution : Comme $T \sim \mathcal{G}(0,26)$, on sait d'après le cours que,

$$\mathbb{P}(T=3) = 0,26 \times 0,74^2 \approx 0,142$$

(c) Quelle est l'espérance de T ?

Solution : Comme $T \sim \mathcal{G}(0,26)$, on sait d'après le cours que,

$$\mathbb{E}[T] = \frac{1}{0,26} \approx 3,846.$$

Exercice 2 La pêche d'Alice Soit $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels définie par

$$p_k = e^{-2}\frac{2^k}{k!}.$$

1. Justifier par un calcul que

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Solution : On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Donc, en particulier, pour $x = 2$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} = e^2.$$

Finalement,

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2}\frac{2^k}{k!} = e^{-2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} = e^{-2}e^2 = e^{2-2} = e^0 = 1.$$

2. Alice va a la pêche. Le nombre de poissons qu'elle attrape est un nombre aléatoire N dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(N=k) = p_k.$$

La loi de N est-elle une loi de référence ? Si oui, laquelle ? Avec quel(s) paramètre(s) ?

Solution : D'après le cours, la variable aléatoire N suit la loi de Poisson de paramètre 2.

3. Quelle est la probabilité qu'Alice attrape au moins un poisson ?

Solution : On passe par l'événement contraire :

$$\mathbb{P}(N \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(N=0) = 1 - e^{-2}\frac{2^0}{0!} = 1 - e^{-2} \approx 0,865.$$

4. Quelle est l'espérance du nombre de poissons attrapés ?

Solution : D'après le cours, comme N suit la loi de Poisson de paramètre 2, son espérance vaut 2.

Exercice 3 Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes dont la loi jointe est donnée par la table suivante, où α est un nombre réel entre 0 et 1 :

$X \backslash Y$	-1	1
-1	$0,25$	$0,2$
0	$0,1$	$0,3$
1	$0,1$	α

1. Justifier que $\alpha = 0,05$.
   Solution : Les événements $\{X = i, Y = j\}$, pour $i = -1, 0, 1$ et $j = -1, 1$ forment une partition de l'univers donc la somme de leurs probabilités est égale à 1. Donc

   $$\alpha = 1 - 0,25 - 0,1 - 0,1 - 0,2 - 0,3 = 0,05.$$

2. Déterminer les lois marginales de X et Y.
   Solution : Calculons par exemple $\mathbb{P}(X = 0)$. Comme les événements $\{Y = -1\}$ et $\{Y = 1\}$ forment une partition de l'univers, on a

   $$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 0, Y = -1) + \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = 0,1 + 0,3 = 0,4.$$

   On voit donc que pour obtenir la loi marginale de X (respectivement de Y) , on doit calculer la somme de chaque ligne (respectivement chaque colonne) du tableau. Cela donne les lois suivantes,

x	-1	0	1
$\mathbb{P}(X = x)$	$0,45$	$0,4$	$0,15$

y	-1	1
$\mathbb{P}(Y = y)$	$0,45$	$0,55$

3. X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier votre réponse.
   Solution : On a $\mathbb{P}(X = -1, Y = -1) = 0,25$, mais

   $$\mathbb{P}(X = -1)\,\mathbb{P}(Y = -1) = 0,45 \times 0,45 = 0,2025,$$

   donc X et Y ne sont pas indépendantes, sinon ces nombres seraient égaux.

4. Calculer $\mathbb{P}(X \geq 0)$ et $\mathbb{P}(X + Y = 0)$.
   Solution : La première probabilité à calculer vaut :

   $$\mathbb{P}(X \geq 0) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = 0,55.$$

   La seconde probabilité est

   $$\mathbb{P}(X + Y = 0) = \mathbb{P}(X = -1, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1, Y = -1) = 0,3.$$

5. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}\,(X)$, $\mathbb{E}\,(Y)$ et $\mathbb{E}\,(X + Y)$.
   Solution : Par définition,

   $$\mathbb{E}[X] = -1 \times 0,45 + 0 \times 0,4 + 1 \times 0,15 = -0,3.$$

   Ensuite,

   $$\mathbb{E}\left[X^2\right] = (-1)^2 \times 0,45 + 0^2 \times 0,4 + 1^2 \times 0,15 = 0,6.$$

   Donc on trouve pour la variance,

   $$\mathrm{Var}\,[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}[X])^2 = 0,6 - 0,09 = 0,51.$$

   L'espérance de Y vaut

   $$\mathbb{E}[Y] = -1 \times 0,45 + 1 \times 0,55 = 0,10.$$

   Enfin, par linéarité de l'espérance,

   $$\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = -0,2.$$

6. Calculer $\mathbb{E}(XY)$.
Solution : Soit $Z = XY$. Un examen minutieux du tableau, ainsi que quelques calculs de sommes montre que la loi de Z est

z	-1	0	1
$\mathbb{P}(Z = z)$	$0,3$	$0,4$	$0,3$

On en déduit l'espérance de XY :

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[Z] = -0,3 + 0,3 = 0.$$