Contrôle continu n° 1 16 novembre 2017

Exercice 1

À la fin de chaque partie d'un jeu vidéo, le joueur doit tuer un super-monstre tiré au hasard de la façon suivante :

— 1 fois sur 10, il s'agit d'un *dragon* ;

— 3 fois sur 10, il s'agit d'un *troll* ;

— le reste du temps, c'est un *géant*.

Lorsque le monstre meurt, le joueur a une chance de gagner un *rubis* :

— le dragon donne toujours un rubis ;

— le troll donne un rubis 1 fois sur 2 ;

— le géant donne un rubis 1 fois sur 5.

On suppose que le jeu est très facile et que les joueurs réussissent toujours à tuer le super-monstre. Des parties différentes sont toujours indépendantes.

Alice fait une partie. On note D (respectivement T, G) l'événement « le super-monstre est un dragon » (respectivement un troll, un géant). On note R l'événement « Alice gagne un rubis » et $p = \mathbb{P}(R)$.

1. Démontrer que $p = 0,37$.

   Les événements D, T et G forment une partition de l'univers (il sont deux à deux incompatibles et leur réunion est l'univers tout entier). On peut appliquer la formule des probabilités totales.

$$\begin{aligned} p = \mathbb{P}(R) &= \mathbb{P}(R \cap D) + \mathbb{P}(R \cap T) + \mathbb{P}(R \cap G) \\ &= \mathbb{P}(D)\mathbb{P}(R \mid D) + \mathbb{P}(T)\mathbb{P}(R \mid T) + \mathbb{P}(G)\mathbb{P}(R \mid G) \\ &= 0,1 \times 1 + 0,3 \times 0,5 + 0,6 \times 0,2 \\ &= 0,37 \end{aligned}$$

2. Alice a gagné un rubis ! Quelle est la probabilité que le super-monstre ait été un troll ?

   On applique la définition de la probabilité conditionnelle. Comme $\mathbb{P}(R) > 0$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(T \mid R)$ est bien définie et

$$\mathbb{P}(T \mid R) = \frac{\mathbb{P}(T \cap R)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{\mathbb{P}(T)\mathbb{P}(R \mid T)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{0,3 \times 0,5}{0,37} \approx 0,4054.$$

3. Bob décide de faire 6 parties (au lieu de réviser ses cours...). On note S le nombre de rubis qu'il réussit à obtenir.

   a) Quelle est la loi de S ? Quelle est son espérance ?

   Notons, pour $i = 1, 2, \ldots, 6$, Y_i la variable aléatoire égale à 1 si la partie numéro i donne un rubis, et 0 sinon. Alors les variables aléatoires $Y_1, Y_2, \ldots, Y_6$ sont des variables aléatoires de Bernoulli, indépendantes de même paramètre $p = 0,37$ (d'après la question 1). Ainsi, $S = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_6$ suit la loi binomiale de paramètres 6 et $0,37$.

   Son espérance est donc $\mathbb{E}(S) = 6 \times 0,37 = 2,22$.

   b) Quelle est la probabilité que Bob gagne exactement 3 rubis ?

   Comme S suit la loi binomiale de paramètres 6 et $0,37$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S = 3) &= \binom{6}{3} \times 0,37^3 \times (1 - 0,37)^{6-3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} \times 0,37^3 \times 0,63^3 \\ &= 20 \times 0,37^3 \times 0,63^3 \approx 0,2533. \end{aligned}$$

c) Quelle est la probabilité que Bob gagne au moins un rubis ?
On passe par l'événement contraire pour gagner du temps.

$$\mathbb{P}(S \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(S = 0) = 1 - 0,63^6 \approx 0,9375.$$

4. Charlie décide de jouer jusqu'à obtenir un rubis. On note X le nombre de parties que fait Charlie.
   a) Quelle est la loi de X ? Quelle est son espérance ?
   La variable aléatoire X est le temps d'atteinte du premier succès (obtention d'un rubis) dans une succession d'expériences de Bernoulli indépendantes ayant la même probabilité de succès. Donc X suit la loi géométrique de paramètre $0,37$.
   Son espérance est donc $\mathbb{E}(X) = 1/0,37 \approx 2,7027$.
   b) Quelle est la probabilité que Charlie fasse exactement 3 parties ?
   Comme X suit la loi géométrique de paramètre $0,37$,

$$\mathbb{P}(X = 3) = (1 - 0,37)^2 \times 0,37 \approx 0,1469.$$

Exercice 2 Loi jointe

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes dont la loi jointe est donnée par la table suivante.

X \ Y	-1	1
0	$0,2$	$0,4$
1	$0,3$	$0,1$

1. Déterminer les lois marginales de X et Y.
Comme les événements $Y = 1$ et $Y = -1$ forment une partition de l'univers, on a

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 0, Y = -1) + \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = 0,2 + 0,4 = 0,6.$$

De même, on calcule $\mathbb{P}(X = 1) = 0,3 + 0,1 = 0,4$. Le calcul de la loi de Y se fait de la même manière et on trouve $\mathbb{P}(Y = -1) = 0,5$ et $\mathbb{P}(Y = 1) = 0,5$.

2. X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier votre réponse.
D'après la loi jointe, on sait que $\mathbb{P}(X = 0,\, Y = -1) = 0,2$. Par ailleurs,

$$\mathbb{P}(X = 0) \times \mathbb{P}(Y = -1) = 0,6 \times 0,5 = 0,3.$$

Comme $\mathbb{P}(X = 0,\, Y = -1) \neq \mathbb{P}(X = 0)\, \mathbb{P}(Y = 1)$, les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

3. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(X + Y)$ et $\mathbb{E}(XY)$.
Par définition de l'espérance d'une variable aléatoire à valeurs discrètes,

$$\mathbb{E}[X] = 0 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) = 0,4;$$
$$\mathbb{E}[Y] = -1 \times 0,5 + 1 \times 0,5 = 0.$$

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}[X + Y] = 0,4 + 0 = 0,4.$$

Enfin, soit $Z = XY$. La variable aléatoire Z ne prend que les valeurs 0, -1 et 1. On calcule sa loi de la façon suivante :

$$\mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = 0,6$$
$$\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(X = 1,\, Y = 1) = 0,1$$
$$\mathbb{P}(Z = -1) = \mathbb{P}(X = 1,\, Y = -1) = 0,3.$$

Son espérance vaut donc

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[Z] = 0,6 \times 0 + 0,1 \times 1 + 0,3 \times (-1) = -0,2.$$

Exercice 3 Fonction de densité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0\,; \\ 4te^{-2t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

1. Justifier que f est bien une densité de probabilité.

   La fonction f est bien positive sur $\mathbb{R}$. On doit donc vérifier que son intégrale vaut 1. On calcule cette intégrale par parties.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} 4te^{-2t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[4t \times \frac{1}{-2}e^{-2t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 4 \times \frac{1}{-2}e^{-2t}\,\mathrm{d}t. \\ &= 0 + 2\int_0^{+\infty} e^{-2t}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\left[\frac{1}{-2}e^{-2t}\right]_0^{+\infty} = 2\left(0 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 1. \end{aligned}$$

2. Calculer l'espérance d'une variable aléatoire X dont la loi a pour densité f.

   Cette espérance se calcule de nouveau par parties. On se sert également du fait, vu dans la question précédente, que

$$\int_0^{+\infty} te^{-2t}\,\mathrm{d}t = 1/4.$$

   Par définition de l'espérance d'une variable aléatoire à densité,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} 4t^2e^{-2t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[4t^2\frac{1}{-2}e^{-2t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 8t\frac{1}{-2}e^{-2t}\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + 4\int_0^{+\infty} te^{-2t}\,\mathrm{d}t = 0 + 4 \times \frac{1}{4} = 1. \end{aligned}$$

Exercice 4 Fonction de répartition

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0\,; \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1\,; \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

1. Justifier que F est bien une fonction de répartition.

   La fonction F est bien continue à droite. Elle est même continue, car $\lim_{x\to 1} x^2 = 1^2 = 1$ et $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$. De plus, F est croissante car la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0\,;1]$. Enfin, on a

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$$

   Donc F est bien une fonction de répartition.

2. Justifier que la loi de probabilité associée à F admet une densité f.
   La fonction F est continue (voir question précédente) et de classe C^1 par morceaux dont la loi associée à F admet une densité.
3. Calculer une expression de la densité f.
   La densité f est la dérivée de F. Ainsi,
   $$f(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \leq t \leq 1\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
4. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F.
   a) Calculer $\mathbb{P}\left(X > 1/2\right)$.
   $$\mathbb{P}\left(X > 1/2\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X \leq 1/2\right) = 1 - F\left(1/2\right) = 1 - (1/2)^2 = 3/4.$$
   b) Calculer $\mathbb{E}[X]$.
   On utilise la densité f et la définition de l'espérance d'une variable aléatoire à densité.
   $$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 2t^2 \, \mathrm{d}t = 2/3.$$
   c) Calculer $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$.
   On calcule d'abord $\mathbb{E}\left[X^2\right]$.
   $$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \int_0^1 2t^3 \, \mathrm{d}t = 2/4 = 1/2.$$
   Finalement,
   $$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = 1/2 - (2/3)^2 = \frac{1}{18}.$$

Exercice 5 Questions avec Matlab

Les deux questions suivantes sont totalement indépendantes.

1. Écrire une fonction Matlab `var_emp(V)` qui a pour paramètre un vecteur `V` de nombres de type `double` et qui retourne la variance empirique de `V`, c'est-à-dire le nombre
   $$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (v_i - m)^2,$$
   où n est le nombre d'éléments de `V`, v_1, v_2, ..., v_n sont ses coefficients, et m est sa moyenne. On pourra utiliser la fonction prédéfinie `numel` qui, appliquée à un tableau, retourne son nombre d'éléments.

```
function s2 = var_emp(V)
  % nombre d'éléments de V
  n = numel(V);
  % moyenne des coefficients
  m = sum(V) / n;
  % variance empirique
  s2 = 1 / (n-1) * sum( (V - m).^2 );
end
```

2. On lance, de façon indépendante et autant de fois que nécessaire, une pièce de monnaie équilibrée. Soit T la variable aléatoire égale au premier instant où l'on a fait 2 piles à la suite. Par exemple :
   — si les tirages sont face, pile, face, face, pile, pile, alors T vaut 6 ;
   — si les tirages sont face, pile, pile, alors T vaut 3.

   Écrire une fonction `simuler_T()` qui ne prend aucun argument et retourne un nombre aléatoire qui a la même loi que T.

   Pour cette question, il faut d'une façon ou d'une autre, mémoriser le tirage précédent. On représente « pile » par la valeur `true` et « face » par la valeur `false`. Le `logical` qu'on a appelé `tirage_prec` stocke le coup précédent et est initialisé à `false`.

   Voici une possibilité d'implémentation.

```
function n = simuler_T()
  tirage_prec = false;
  fini = false;
  n = 0;
  while ~fini
    n += 1;
    tirage = (rand() <= 0.5);
    if tirage && tirage_prec
    % on a fait "pile" et la fois d'avant aussi
      fini = true;
    end
    tirage_prec = tirage;
  end
end
```