Simulation

Exercice 1 Loi uniforme sur $[0\,;1]$

Soit n un entier naturel non nul. Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[0\,;1]$ et $U_1, U_2, \ldots, U_n$, n variables aléatoires indépendantes, de même loi que U. On note

$$S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n.$$

On complètera pas à pas un script `uniforme01.m` en résolvant cet exercice.

1. À l'aide de la fonction `rand`, obtenir une réalisation de U_1, U_2, ..., U_n, pour $n = 1000$.
2. Recopier la fonction suivante dans un fichier `densite_empirique.m`.

```
function densite_empirique(X, K)
% densite_empirique(X, K) :
% trace la densité empirique associé aux données X,
% séparées en K classes équiréparties.
  [N, Y] = hist(X, K);
  dY = Y(2)-Y(1);
  bar(Y, N/(sum(N*dY)), 1.0);
end
```

3. À l'aide de cette fonction, tracer la densité empirique de l'échantillon U_1, ..., U_n, pour $K = 20$ classes.
4. ✐ Calculer à la main l'espérance
$$\mu = \mathbb{E}\left[U\right].$$
5. Calculer la moyenne empirique $\widehat{\mu}_n$ de cet échantillon. Pouvait-on s'attendre à un tel résultat ? Quel théorème est ici illustré ?
6. Calculer la variance empirique de l'échantillon :
$$\widehat{\sigma}_n^2 = \frac{\sum_{k=1}^{n} \left(U_k - \widehat{\mu}_n\right)^2}{n-1}.$$
7. ✐ Calculer à la main la variance σ^2 de la loi uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 2 Loi uniforme sur $[a\,;b]$

1. ✐ Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[0\,;1]$. Soient $a < b$ deux réels. Trouver une fonction affine h telle que la variable aléatoire $V = h(U)$ soit uniforme sur $[a\,;b]$.
2. Créer une fonction `uniformeab(a, b, ft)` qui renvoie une matrice de format `ft` de nombres aléatoires indépendants de même loi uniforme sur $[a\,;b]$.
3. Tester cette fonction en créant un échantillon de $N = 1000$ valeurs tirées suivant la loi uniforme sur $[2\,;5]$, puis tracer la densité empirique correspondante.

Exercice 3 Vers le théorème central limite

Soit n un entier naturel non nul et U_1, U_2, ..., U_n, n variable indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0\,;1]$.

1. Créer un échantillon des N variables aléatoires
$$S_n^{(1)}, S_n^{(2)}, \ldots, S_n^{(N)}$$
indépendantes, de même loi que S_n, avec $n = 200$ et $N = 10000$.

2. Tracer la densité empirique associée aux

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{S_n^{(i)}}{n} - \mu\right) \quad i = 1, \dots, N$$

pour $K = 50$ classes, où σ et μ sont respectivement l'écart-type et l'espérance de la loi uniforme sur $[0\,;1]$.

3. Tracer la fonction de densité de la loi normale centrée réduite sur le même graphique (utiliser `hold on;` avant `plot`).

Exercice 4 Loi normale centrée réduite

1. À l'aide de la fonction `randn`, créer un échantillon de $n = 10000$ valeurs tirées suivant la loi normale centrée réduite.
2. Calculer la moyenne et la variance empirique de cet échantillon.
3. Tracer la densité empirique correspondant à un échantillon pour $K = 50$ classes.
4. Calculer la fréquence des valeurs comprises dans l'intervalle $[-1\,;1]$.
5. Tracer la courbe de la fonction prédéfinie `normcdf` entre -3 et 3.
6. À l'aide de cette fonction, calculer

$$\mathbb{P}\,(N \in [-1\,;1]) \quad \text{où } N \sim \mathcal{N}(0,1).$$

7. Reprendre les questions 4 et 6 avec les intervalles $[-2\,;2]$ et $[-3\,;3]$.

Exercice 5 Loi normale

1. ✐ Expliquer comment simuler simplement la loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 à l'aide de `randn`.
2. Tracer les densités empiriques correspondant à un échantillon de taille $n = 10000$ dans chacun des cas suivants :
   a) $X \sim \mathcal{N}\,(10, 1)$;
   b) $Y \sim \mathcal{N}\,(10, 3^2)$;
   c) $Z \sim \mathcal{N}\,(-13, 3^2)$.

Exercice 6 Loi exponentielle

Soit Z une variable aléatoire de loi exponentielle, de paramètre $\lambda > 0$.

1. ✐ Calculer la fonction de répartition en $z > 0$:

$$F(z) = \mathbb{P}\,(Z \leq z)\,.$$

2. ✐ Résoudre, pour $y \in \,]0\,;1[$, l'équation d'inconnue z : $F(z) = y$. On notera $G(y)$ la solution ainsi obtenue.
3. On applique ceci à $\lambda = 2$. Simuler un échantillon de $n = 10000$ valeurs tirées sous la forme $G(U)$, où U est une variable aléatoire uniforme sur $[0\,;1]$.
4. Tracer la densité empirique associée aux valeurs précédentes, ainsi que la fonction de densité de la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$.

Exercice 7 Méthode de Monte-Carlo

Soient U et V deux variables aléatoires uniformes indépendantes sur $[0\,;1]$ et X le vecteur aléatoire
$$X = (U, V)\,.$$

1. ✐ Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?
2. Simuler un échantillon de $N = 1000$ points indépendants de même loi que X et tracer le nuage de points correspondant à l'aide de la fonction `scatter`.
3. ✐ Calculer $\mathbb{P}(X \in R)$, où R est le rectangle :
$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2},\ \frac{1}{3} \le y \le \frac{2}{3}\right\}.$$
Vérifier le calcul à l'aide de la simulation et d'un calcul de fréquence empirique.
4. ✐ Interpréter géométriquement la probabilité calculée précédemment.
5. ✐ À partir de maintenant, on admet la propriété suivante : pour toute partie (mesurable) B de $[0\,;1] \times [0\,;1]$,
$$\mathbb{P}(X \in B) = \text{aire}\,(B)\,.$$
Que valent $\mathbb{P}(X = (0,5; 0,5))$? $\mathbb{P}(X \in \Delta)$, où Δ est un segment de droite inclus dans $[0\,;1] \times [0\,;1]$?
6. ✐ Soit D le quart de disque centré en l'origine, de rayon 1, et inclus dans le carré $[0\,;1]^2$. Calculer $\mathbb{P}(X \in D)$.
7. ✐ Soit $M(x, y)$ un point dans $[0\,;1]^2$. À quelle condition nécessaire et suffisante, le point M appartient-il au quart de disque D ?
8. Tracer sur un même graphe le quart de cercle associé à D et le nuage de point correspondant à la simulation précédente.
9. Par un calcul de fréquence, calculer une valeur approchée de π.
10. ☆ ✐ En utilisant l'approximation donnée par le théorème central limite, calculer le plus petit entier n à partir duquel la simulation donne une valeur approchée de π à 10^{-3} près, avec une probabilité supérieure à 95%.

Exercice 8 Facultatif : méthode déterministe

1. ✐ Calculer (à la main) l'intégrale
$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$
2. Écrire une fonction `approx_pi(N)` renvoyant une valeur approchée de π en calculant une somme de Riemann pour $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, avec N rectangles (par exemple à gauche).
3. Tester cette fonction, comparer avec la valeur `pi` donnée par le logiciel.
Utiliser `format long` pour voir davantage de décimales.
4. Utiliser la méthode des rectangles centrés et comparer.