Encore des simulations

Exercice 1 Inverse de la fonction de répartition, loi de Cauchy

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\alpha}{1+x^2},$$

où $\alpha > 0$ est une constante telle que $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Soit X une variable aléatoire dont la loi admet f pour densité de probabilité.

1. ✐ Calculer α.
2. ✐ Calculer, pour tout réel x, la fonction de répartition $F(x)$ de X.
3. ✐ Calculer la bijection réciproque de F.
4. À l'aide de la méthode de l'inverse de la fonction de répartition, écrire une fonction `cauchy`↩ `( N )` qui simule `N` variables aléatoires indépendantes ayant la même loi que X.

Exercice 2 Méthode de rejet (1)

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. ✐ Justifier que f est bien une densité de probabilité. Soit X une variable aléatoire dont la loi a pour densité f.
2. ✐ Soit g la densité de probabilité de la loi uniforme sur $[0\,;1]$. Que vaut $g(x)$ pour x dans $\mathbb{R}$?
3. ✐ Montrer qu'il existe un réel c qu'on explicitera tel que

$$f(x) \leq cg(x), \quad \text{pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}.$$

4. Écrire, en utilisant la méthode du rejet, une fonction matlab `rejet_racine( N )` qui retourne une simulation de `N` variables aléatoires indépendantes ayant la même loi que X.
5. Tracer la densité empirique d'un échantillon de taille 1000 et comparer avec la courbe de la fonction f.
6. ✐ On note T_1 la variable aléatoire égale au nombre d'appels à la fonction `rand` lors de l'exécution de `rejet_racine(1)`. Quelle est la loi de T_1 ? Quelle est son espérance ?
7. ✐ Soit $N \geq 1$ et S_N la variable aléatoire égale au nombre d'appels de la fonction `rand` lors de l'exécution de `rejet_racine( N )`. Quelle est l'espérance de S_N ?

Exercice 3 Méthode de rejet (2)

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0\,; \\ 1-x & \text{si } 0 \leq x \leq 1\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

À l'aide d'une loi uniforme écrire une fonction `rejet_triangle( N )` qui simule par la méthode du rejet un échantillon de `N` variables indépendantes ayant la même loi de densité f.

Exercice 4 Méthode de rejet (3)

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{16}xe^{-x/4} & \text{si } x \geq 0\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous avons vu en TD que la fonction f est bien une fonction de densité (exercice 3 de la feuille de TD n° 3). Soit X une variable aléatoire dont la loi a pour densité f. Le but de cet exercice est de simuler la loi de X.

Soit g la fonction définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} e^{-x/8} & \text{si } x \geq 0\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit Y une variable aléatoire dont la loi admet pour densité g.

1. ✐ La loi de Y est-elle une loi de référence ? Si oui, laquelle ? Avec quel(s) paramètre(s) ?
2. Comment simuler la loi de Y ? (On pourra s'aider d'un des exercices de la feuille de TP n° 2).
3. ✐ Montrer que la fonction h définie sur $[0\,;\infty[$ par $h(x) = f(x)/g(x)$ admet un maximum c que l'on calculera.
4. Écrire une fonction `rejet_gamma( N )` qui retourne une simulation de `N` variables aléatoires indépendantes ayant la même loi que X.
5. Tracer la densité empirique d'un échantillon de taille 1000 et comparer avec la courbe de la fonction f.

Exercice 5 Méthode de Monte-Carlo (1)

1. ✐ Soit U une variable aléatoire normale centrée réduite, et f une fonction réelle telle que $\mathbb{E}\left[|f(N)|\right] < \infty$. Exprimer $\mathbb{E}\left[f(N)\right]$ à l'aide d'une intégrale.
2. ✐ Soit N_1, N_2, ..., des variables aléatoires indépendantes de même loi normale centrée réduite. Est-ce que, lorsque n tend vers $+\infty$, la suite
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(N_k)$$
converge presque sûrement ? Si oui, vers quelle limite ?
3. ✐ Soit I l'intégrale
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$
Trouver une fonction f telle que $I = \mathbb{E}\ \left[f(N)\right]$.
4. Se servir des questions précédentes pour écrire un script `monte_carlo1.m` qui calcule une valeur approchée de l'intégrale I.

Exercice 6 Méthode de Monte-Carlo (2)

Soit I l'intégrale
$$I = \int_0^2 \sqrt{x^4 + 2}\,\mathrm{d}x.$$
En utilisant la méthode de Monte-Carlo, avec une loi de référence convenablement choisie, écrire un script `monte_carlo2.m` qui donne une valeur approchée de I.

Exercice 7 Méthode de Monte-Carlo (3)

Même énoncé pour l'intégrale double
$$I = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \left(x^2 + xy + y^2\right) e^{-x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$