Contrôle de rattrapage
5 mars 2017

Durée de l'épreuve : **2 heures**.
Aucun document n'est autorisé. La calculatrice est autorisée.
Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié.

Remarques :

— Tout calcul menant à une probabilité strictement supérieure à 1 ou strictement négative *sans aucun commentaire de votre part* donnera lieu à une pénalité d'un point.

— Pour la plupart des questions, si vous ne justifiez pas correctement une réponse (même juste), vous n'aurez aucun point.

— Une copie mal présentée ou dont les résultats sont trop souvent non justifiés ou très mal justifiés se verra pénalisée d'un maximum de 2 points.

— En revanche, il est possible dans certaines questions d'obtenir une partie des points en donnant un début de réponse ou de raisonnement.

— Ce sujet ne comporte aucun piège.

Exercice 1 Alice, Bob et Charlie, virologistes **$10,5$ points**

Le mystérieux virus Z, qui menace, à terme, de transformer des humains en zombies s'est répandu dans la population. Exactement 20% des personnes sont infectées. On ne peut savoir si un individu est infecté qu'après l'avoir examiné.

Alice, Bob et Charlie sont chargés de mener des examens sur des individus tirés au hasard dans la population, dans l'espoir de trouver un vaccin. Ces tirages sont uniformes parmi la population et sont indépendants.

1. Si l'on fait un seul tirage, et que l'on note X la variable aléatoire égale à 1 si l'individu est infecté par le virus Z et 0 sinon, quelle est la loi de X ? Son espérance ? Sa variance ? **/1**
2. Alice décide d'examiner des individus jusqu'à tomber sur une personne infectée. On note N le nombre (aléatoire) de personnes examinéees.
   a) Quelle est la loi de N ? **/1**
   b) Quelle est son espérance ? **/$0,5$**
   c) Quelle est la probabilité que N soit égal à 6 ? **/1**
3. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Bob examine n individus. On note S le nombre de personnes infectées parmi ces n individus.
   a) Quelle est la loi de S ? Son espérance ? Sa variance ? **/$1,5$**
   b) Si $n = 6$, quelle est la probabilité que S soit égal à 2 ? **/$0,5$**
   c) Combien de personnes Bob doit-il examiner pour que la probabilité de tomber sur *au moins une* personne infectée soit supérieure ou égale à $0,95$? **/1**
4. Charlie travaille beaucoup. Il examine 400 personnes. Pour i entre 1 et 400, soit X_i la variable aléatoire égale à 1 si la personne numéro i est infectée et 0 sinon. On note

$$\overline{X} = \frac{1}{400} \sum_{i=1}^{400} X_i$$

   la proportion de personnes infectées parmi cet échantillon de 400 personnes.

   a) On s'attend à ce que la variable aléatoire $\overline{X}$ soit « proche » d'un certain nombre (non aléatoire). Quel est ce nombre ? Et pourquoi ? (Donner le nom du théorème utilisé et justifier brièvement son utilisation). **/1**

b) D'après un autre théorème (dont on donnera le nom), on peut approcher la loi de $\overline{X}$ par une loi à densité. Laquelle ? Quels sont ses paramètres ? **/1,5**

c) En utilisant cette approximation, donner une valeur approchée de $\mathbb{P}\left(\overline{X} \leq 0,2392\right)$ et une valeur approchée de $\mathbb{P}\left(0,14848 \leq \overline{X} \leq 0,25152\right)$. **/1,5**

Exercice 2 Daphnée, inventrice d'histoire drôles **6 points**

Le métier de Daphnée est d'inventer des histoires drôles. Malheureusement, l'inspiration ne se contrôle pas et pour trouver une histoire drôle, Daphnée doit réfléchir un temps (en heures) aléatoire S dont une densité est la fonction f donnée par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0\,; \\ \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}t} & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. La loi de S est-elle une loi de référence ? Si oui, laquelle, avec quel(s) paramètre(s) ? **/0,5**
2. Quelle est l'espérance de S ? **/0,5**
3. Calculer $\mathbb{P}(S > 2)$. **/1**

Le contrat de travail de Daphnée indique que chaque jour, elle doit trouver 2 histoires drôles. On note T la variable aléatoire égale au temps (en heures) qu'il faut à Daphnée pour trouver ces deux histoires drôles. On admet que T est une variable aléatoire de densité g donnée par

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0\,; \\ \frac{1}{9}te^{-\frac{1}{3}t} & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. Vérifier que g est bien une densité de probabilité. **/1**
5. Calculer l'espérance de T. **/1**
6. Vérifier que la fonction G définie par

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0\,; \\ 1 - \left(\frac{1}{3}t + 1\right)e^{-\frac{1}{3}t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

   est bien la fonction de répartition de la variable aléatoire T. **/1**

7. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(T \leq 3)$ et de $\mathbb{P}(T > 9)$. **/1**

Exercice 3 Eugénie, myrmécologue **5 points**

Eugénie, scientifique spécialiste des fourmis, a découvert une nouvelle espèce de fourmis. Elle souhaite en déterminer les principales caractéristiques et commence par étudier leurs tailles. Elle prélève un échantillon de $n = 25$ fourmis et les mesure. Pour i entre 1 et n, la taille (en mm) de la fourmi numéro i est notée X_i. On admet que les variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n sont indépendantes et ont la même loi normale $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$.

1. Quelle est la loi (nom et paramètre(s) en fonction de m, σ et n) de la variable aléatoire $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$? **/1,5**
2. On suppose dans cette question que le paramètre m est inconnu mais que le paramètre σ est connu et vaut 2.

   a) Les données mesurées par Eugénie sont telles que

$$\sum_{i=1}^{25} X_i = 292,8.$$

   Donner une estimation du paramètre m. **/0,5**

b) Déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% pour la taille moyenne des fourmis de cette nouvelle espèce. **/1**

3. On suppose maintenant que m et σ sont tous les deux inconnus.

a) Les données mesurées par Eugénie sont telles que

$$\sum_{i=1}^{25} X_i^2 = 3545.$$

Donner une estimation de la variance σ^2 (deux possibilités, en choisir une), puis de l'écart-type σ. **/1**

b) Déterminer dans ce cadre (m et σ inconnus) un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% de la taille moyenne des fourmis de cette nouvelle espèce. **/1**

Annexes

x	$\mathbb{P}(\mathcal{N}(0;1) \leq x)$
0	$0,5$
1	$0,841$
$1,645$	$0,950$
$1,960$	$0,975$
$2,576$	$0,995$

TABLE 1 – Quelques valeurs de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

Nombre n de degrés de libertés	t tel que $\mathbb{P}(\mathcal{T}(n) \leq t) = 0,95$	t' tel que $\mathbb{P}(\mathcal{T}(n) \leq t') = 0,975$
11	$1,7959$	$2,2010$
12	$1,7823$	$2,1788$
13	$1,7709$	$2,1604$
20	$1,7247$	$2,0860$
24	$1,7109$	$2,0639$
25	$1,7081$	$2,0595$
26	$1,7056$	$2,0555$

TABLE 2 – Quelques valeurs de la fonction quantile de la loi de Student $\mathcal{T}(n)$, pour différentes valeurs du nombre de degrés de liberté n