Évaluation de travaux pratiques

Durée de l'épreuve : **1 heure 15 minutes**.
Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié.
Toute solution partielle pourra être prise en compte dans l'évaluation.

Instructions :

* Vous composerez par groupe de deux.
* Rendre une copie portant vos deux noms et comportant vos deux écritures.
* Envoyer par e-mail (avec comme sujet : Controle TP) à votre enseignant l'ensemble des fonctions Matlab/Octave que vous aurez écrits sous la forme d'un fichier compressé `Prenom1_Nom1_Prenom2_Nom2.tar.gz`.
* La consultation de l'aide en ligne de Matlab ou des codes que vous avez écrits pendant les séances précédentes de TP est autorisée.

Exercice 1 Des dés **13 points** Les parties sont, dans une large mesure, indépendantes

Partie A : Un seul dé

On considère une expérience aléatoire consistant à lancer un dé bien équilibré. On note D la variable aléatoire égale au résultat obtenu.

1. ✐ Quelle est la loi de D ? Quelle est son espérance μ, sa variance σ^2 ?
2. Créer une fonction `de6faces(N)` qui renvoie un vecteur ligne de taille `N` dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes de même loi que D. (On pourra utiliser la fonction `floor` qui renvoie la partie entière d'un nombre ou d'une matrice, élément par élément.)
3. Tracer l'histogramme d'un échantillon de $N = 1000$ valeurs suivant la loi de D.
4. Écrire une fonction `moy_emp(X)` qui prend en entrée un vecteur (ligne ou colonne) `X` et qui renvoie sa moyenne empirique.
5. Calculer la moyenne empirique d'un échantillon de $N = 10000$ valeurs suivant la loi de D.
   ✐ Pouvait-on s'attendre à ce résultat ? Justifier la réponse.

Partie B : un seul dé, beaucoup de moyennes

Soit n un entier naturel non nul. On note D_n la variable aléatoire égale à la moyenne empirique de n copies indépendantes de D.

1. Écrire un programme `de6moyennes(n, N)` qui renvoie un vecteur ligne de taille N, dont les composantes sont des variables aléatoires indépendantes de même loi que D_n.
2. Tracer l'histogramme d'un échantillon de $N = 1000$ valeurs indépendantes suivant la loi de D_{100}.
3. Quelle est l'allure de cet histogramme ?
   ✐ Quelle est la « loi approchée » de D_{100} ? Justifier.

Partie C : un seul dé, qu'on relance parfois

On considère le jeu (récursif) suivant :

— le joueur commence par lancer un dé ;
— si le résultat d'un lancer est 6, le joueur a un nouveau lancer, sinon il doit arrêter ;
— le score du joueur est la somme de tous les résultats des dés qu'il a lancés.

1. ✐ Est-il possible d'avoir un score de 13 avec ce jeu ? Si oui, avec quelle probabilité ?
2. Écrire une fonction `jeu_de_des(N)` qui renvoie un échantillon de N valeurs indépendantes qui simulent le score d'un joueur de ce jeu de dés.
3. Tracer l'histogramme d'un échantillon pour $N = 10000$. Reproduire l'allure de cet histogramme sur la copie.
4. Calculer la fréquence empirique de la valeur 13, toujours pour $N = 10000$ et comparer avec la réponse donnée à la question 1.
5. Estimer, à l'aide de la simulation, l'espérance du score d'un joueur et la probabilité que le score soit supérieur à 10.

Exercice 2 **8 points**

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x \in [0\,;1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. ✐ Justifier que f est une fonction de densité de probabilité.
   On note X une variable aléatoire de densité f.
2. ✐ Justifier que la fonction F définie par

$$F(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \in [0\,;1], \\ 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

   est la fonction de répartition de X.
3. Simulation par la méthode de l'inverse de la fonction de répartition.
   (a) ✐ Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0\,;1]$. Justifier que la variable aléatoire $Y = \sqrt[3]{U}$ a la même loi que X.
   (b) À l'aide de la question précédente, écrire une fonction `inv_rep(N)` qui renvoie un vecteur ligne de taille N dont les composantes sont des copies indépendantes de X.
   (c) Tracer l'histogramme d'un échantillon de taille $N = 1000$.
4. Simulation par la méthode du rejet.
   (a) ✐ Expliquer brièvement comment simuler la loi de X avec la méthode du rejet.
   (b) Écrire un programme `rejet(N)` qui simule par la méthode du rejet un échantillon de N copies indépendantes de X.
   (c) ✐ Pour N grand, combien d'appels à la fonction `rand` votre programme fait-il en moyenne ?

Exercice 3 Méthode de Monte-Carlo **6 points**

À l'aide de scripts ou de fonctions, en utilisant la méthode de Monte-Carlo, donner une valeur approchée des intégrales suivantes :

$$I = \int_0^2 \sqrt{x^4+3}\,\mathrm{d}x,$$
$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{x^4+3}e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x.$$