TP noté

Jeudi 21 novembre 2017

Durée de l'épreuve : **1 heure**.
Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié.

Exercice 1 Une généralisation de la loi géométrique **11 points**

Soit p dans l'intervalle $]0\,;1[$. On considère une variable aléatoire X de loi de Bernoulli de paramètre p et X_1, X_2, ..., X_n, ... une suite de variables aléatoires indépendantes ayant la même loi que X. Pour $i \geq 1$, on dit qu'il y a un succès au temps i lorsque $X_i = 1$.

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. La variable aléatoire T_k est la valeur du premier instant où il y a eu exactement k succès.

Par exemple, si les premiers tirages sont :

$$X_1 = 0,\ X_2 = 1,\ X_3 = 0,\ X_4 = 1,\ X_5 = 1,\ X_6 = 0,\ X_7 = 1,$$

alors, $T_1 = 2$, $T_2 = 4$, $T_3 = 5$ et $T_4 = 7$.

1. Quelle instruction peut-on entrer dans Matlab ou Octave pour obtenir un nombre aléatoire égal à 1 avec probabilité p et à 0 avec probabilité $1 - p$? **/1**
2. Écrire dans un fichier de fonction `simuler_Tk.m` la fonction `simuler_Tk(p,k)` dont la valeur de retour est un nombre aléatoire qui a la même loi que T_k lorsque le paramètre des variables de Bernoulli X_1, X_2, ... est égal à `p`. **/4**
3. Modifier cette fonction de manière à faire que `simuler_Tk(p,k,N)` retourne un vecteur ligne de taille `N` dont toutes les composantes sont des réalisations indépendantes ayant la même loi que T_k. **/2**
4. À l'aide de cette fonction, écrire, dans un script `loi_Tk.m` des instructions permettant d'afficher une valeur approchée de l'espérance de T_3 pour $p = 0,4$, à partir d'un échantillon de taille `N = 2000`. *Vous pourrez comparer avec la valeur théorique qui vaut* $3/0,4$. **/2**
5. Compléter ce même script pour afficher une valeur approchée de la probabilité que T_3 soit égal à 6, toujours pour $p = 0,4$, à l'aide du même échantillon que précédemment. *Remarque : la valeur théorique est ici* $10p^3(1-p)^3$. **/2**

Exercice 2 Méthode de rejet **6 points**

On considère la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{si } x \text{ est dans } [-1\,;1]\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On admet que f est bien une densité de probabilité. En utilisant la méthode de rejet, écrire une fonction `rejet()` sans argument qui retourne un nombre aléatoire dont la loi est à densité f.

Exercice 3 Méthode de l'inverse de la fonction de répartition **6 points**

On considère la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\ln(2)} & \text{si } x \text{ est dans } [1\,;2]\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On admet que f est bien une densité de probabilité et que sa fonction de répartition est la fonction F donnée par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1\,; \\ \ln(x)/\ln(2) & \text{si } 1 \leq x < 2\,; \\ 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

1. ✐Résoudre, pour u dans $[0\,;1]$, l'équation d'inconnue x dans $[1\,;2]$: **/2**

$$F(x) = u.$$

2. À l'aide de la méthode de l'inverse de la fonction de répartition, écrire une fonction Matlab/Octave `inv_repartition(N)` qui retourne sous la forme d'un vecteur ligne N nombres aléatoires indépendants dont la loi est à densité f. **/4**

Exercice 4 Méthode de Monte-Carlo **6 points**

1. À l'aide de la méthode de Monte-Carlo, donner une valeur approché de l'intégrale

$$\int_0^1 \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x.$$

   On utilisera un échantillon de taille 10000. *Remarque : la valeur exacte de cette intégrale se calcule facilement et vaut* $2/\pi$.

   On écrira un script `monte_carlo1.m` pour répondre à cette question. **/3**

2. En utilisant la méthode de Monte-Carlo, écrire un script `monte_carlo2.m` qui permet d'obtenir, à l'aide d'un échantillon de taille 10000, une valeur approchée de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x.$$

   Remarque : la valeur exacte de cette intégrale est $\sqrt{2\pi}$. **/3**