

Marches aléatoires sur les arbres

Mémoire de master 2 de mathématiques fondamentales

Université Paris 13

Pierre Rousselin

rousselin@math.univ-paris13.fr

sous la direction de

Julien Barral, professeur de mathématiques à l'université Paris 13

et

Yueyun Hu, professeur de mathématiques à l'université Paris 13

28 septembre 2015

Préface

L'objectif de ce mémoire est d'établir aussi rigoureusement que possible des critères de récurrence ou de transience pour des marches aléatoires sur des arbres, aléatoires ou non. Nous nous sommes principalement appuyé sur le livre en préparation de Russell Lyons et Yuval Peres ([LP14]), sur l'article fondateur [Lyo90] de Lyons et sur l'article [LP92] de Lyons et Robin Pemantle. Nous nous sommes attachés à exposer les idées de ces grands mathématiciens avec beaucoup de détails et à démontrer intégralement presque toutes les propositions. Nous y perdons assurément en rythme et en élégance mais espérons qu'en retour, le lecteur aura besoin de moins de temps pour comprendre les démonstrations. Ce faisant, nous aborderons de nombreuses théories ayant un intérêt indépendant. Les objets prédominants dans cette étude sont les flots et les coupes sur les arbres et plus généralement sur les réseaux.

La finalité des deux premiers chapitres est la démonstration du critère de Lyons sur la transience et la récurrence de la marche aléatoire biaisée sur un arbre. De façon surprenante, c'est l'étude de l'existence de deux flots de natures très différentes sur les graphes qui permet d'établir ensuite très facilement ce puissant théorème. L'idée principale est de considérer un graphe comme un moyen de faire transiter certaines quantités (de l'eau, de l'information, des électrons) d'une certaine source s à un certain puits t , voire jusqu'à l'infini. Le premier chapitre est consacré à ce qu'on pourrait appeler des réseaux « hydrauliques » : les arêtes peuvent être vues comme des tuyaux qui pour une raison ou pour une autre sont à sens unique et dont le débit est limité par leur *capacité* (Russell Lyons appelle parfois de tels réseaux *capacitated networks*). Dans ce cadre, nous démontrerons plusieurs formes du très puissant théorème FLOT-MAX/COUPE-MIN. Dans le deuxième chapitre, nous étudions (de façon entièrement mathématique) les réseaux électriques finis. Dans ce cadre, les arêtes peuvent être vues comme des fils de cuivre ayant une certaine *conductance* et l'on étudie le courant électrique et le potentiel qui lui est associé. Nous leur donnons ensuite une interprétation en terme de marche aléatoire et faisons le lien avec le premier chapitre. Tout ceci se combine alors pour démontrer le critère de transience de Lyons sur la marche aléatoire biaisée sur les arbres.

Le troisième chapitre traite de la percolation sur les graphes et en particulier sur les arbres. Nous verrons que marche aléatoire et percolation sur les arbres sont intimement liées, ce qui permettra d'établir par la suite un critère de transience pour la marche aléatoire sur les arbres de Galton-Watson. Les milieux aléatoires y font également leur première apparition.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude des arbres de Galton-Watson. Après une introduction élémentaire aux processus de Galton-Watson, nous introduisons l'espace des arbres planaires enracinés sur lequel nous faisons vivre nos arbres aléatoires. Enfin, l'étude précédente de la percolation permet d'établir un critère de transience en se plaçant encore une fois dans le cadre d'une percolation en milieu

aléatoire.

Le cinquième chapitre vient conclure ce mémoire avec l'étude des marches aléatoires avec biais aléatoires sur un arbre. La démonstration du théorème de Lyons et Pemantle fera intervenir une grande partie de résultats précédemment établis ainsi que de puissants théorèmes d'analyse convexe et de théorie des grandes déviations.

Les (très nombreuses) notations adoptées sont pour la plupart issues du livre [LP14] de Lyons et Peres ou du cours de Nicolas Curien suivi par l'auteur ([Cur15]) mais certaines sont très personnelles. Ce mémoire aborde des sujets très variés : il sera question de théorie des graphes, de chaînes de Markov réversibles, d'espaces euclidiens et de fonctions harmoniques. Il est attendu de l'hypothétique lecteur qu'il ait, comme l'auteur au moment où il a commencé ce travail, de maigres connaissances sur les chaînes de Markov, l'espérance conditionnelle, les martingales discrètes, les espaces euclidiens, la théorie de la mesure et les espaces métriques et ultramétriques, mais sur les autres sujets, et en particulier sur la théorie des graphes et des arbres, nous espérons que le contenu du présent ouvrage sera suffisant.

Au risque de paraître prétentieux, l'auteur tient à adresser quelques remerciements. Ils vont tout d'abord à Julien Barral et Yueyun Hu qui me font un immense honneur en ayant accepté de diriger mon stage de master 2 puis ma thèse de doctorat. J'espère que je serai à la hauteur de la confiance qu'ils me portent. Plus généralement, les membres du LAGA ont permis ma reprise d'étude et s'échinent depuis deux ans à résoudre les problèmes que mon profil atypique peut provoquer. Enfin, je présente mes excuses à Mélanie, Paul, Jean, Colas, Guillaume, Germain, Laurin, Pici, et leurs familles pour qui je n'ai pas pu être très présent ces deux dernières années mais dont le soutien et l'affection me sont si chers.

Table des matières

I	Flots admissibles sur un réseau	1
1	Réseaux orientés et flots positifs	1
1.1	Graphes orientés	1
1.2	Flots positifs admissibles sur les réseaux orientés finis	3
1.3	Cas des réseaux orientés infinis	7
2	Réseaux non orientés et flots antisymétriques	10
2.1	Définitions et premières propriétés	10
2.2	Flots antisymétriques admissibles	13
3	Cas des arbres infinis	16
II	Courants sur un réseau	21
1	Réseaux électriques finis	21
1.1	Fonctions harmoniques sur un réseau	21
1.2	Espaces de Hilbert associés à un réseau fini	23
1.3	Courants entre deux sommets	28
2	Interprétations probabilistes	30
2.1	Chaînes de Markov irréductibles réversibles	30
2.2	Réseaux électriques finis et probabilités	34
3	Cas des réseaux infinis	38
4	Cas des arbres infinis	42
4.1	Courant sur un arbre enraciné	42
4.2	Marche aléatoire biaisée sur un arbre infini	44
5	Croissance d'un arbre infini	45
III	Percolation sur un arbre infini	48
1	Percolation générale	48
2	Percolations de Bernoulli et percolations indépendantes	50
3	Méthode du deuxième moment, réseaux électriques	53
3.1	Méthode du deuxième moment	53
3.2	Cas des arbres	54
3.3	Réseau électrique associé à une percolation indépendante	57
4	Une première percolation en milieu aléatoire	58
5	Une classe particulière de percolations non indépendantes sur les arbres	60

IV Arbres de Galton-Watson	64
1 Processus de Galton-Watson	64
2 Un peu d'analyse élémentaire	67
3 Croissance typique de la taille des générations	69
4 Espace des arbres planaires enracinés	71
4.1 Notation de Neveu	71
4.2 Loi des arbres de Galton-Watson	72
4.3 Héritage	74
5 Percolation sur un arbre de Galton-Watson	77
V Marche aléatoire en milieu aléatoire sur un arbre	80
1 Récurrence et récurrence positive	80
2 Trois résultats intermédiaires	82
2.1 Un peu d'analyse convexe	82
2.2 Inégalité de Chernoff-Cramér	84
2.3 Un calcul de nombre de branchement	84
3 Transience	86

Chapitre I

Flots admissibles sur un réseau

Ce premier chapitre est intégralement consacré à la théorie des réseaux. L'objectif est de démontrer le théorème FLOT-MAX/COUPE-MIN dans différentes configurations (réseaux finis, infinis, orientés, non orientés). Avec l'étude des réseaux électriques, il formera l'un des piliers sur lesquels repose la théorie reprise dans ce mémoire.

1 Réseaux orientés et flots positifs

1.1 Graphes orientés

Nous commençons par donner une définition précise des graphes et quelques éléments de vocabulaires.

Définition I.1. Un graphe orienté G est la donnée de deux ensembles $V(G)$ et $E(G)$ appelés respectivement ensemble des sommets (en anglais *vertices*) et ensemble des arêtes (en anglais *edges*) de G ainsi que de deux applications :

$$\begin{array}{ccc} \text{Origine}_G : E(G) \longrightarrow V(G) & \text{et} & \text{But}_G : E(G) \longrightarrow V(G) \\ e \longmapsto e_- & & e \longmapsto e_+ \end{array}$$

On dit qu'une arête e va d'un sommet x à un sommet y , ou encore que le sommet x est l'origine de e et que y est son but lorsque $e_- = x$ et $e_+ = y$. Lorsqu'une telle arête existe, on note $x \rightarrow y$.

Lorsque deux arêtes distinctes e et e' ont la même origine et le même but, on dit que G présente des arêtes multiples. Une arête dont le but et l'origine coïncident est appelée une boucle. Enfin, un graphe orienté est dit simple lorsqu'il n'a ni boucles, ni arêtes multiples.

Remarque I.1. Lorsqu'un graphe G n'a pas d'arêtes multiples, l'ensemble $E(G)$ de ses arêtes s'injecte naturellement dans l'ensemble $V(G)^2$ de ses couples de sommets. La plupart des auteurs réservent le terme de *graphe* à ce dernier cas et préfèrent

nommer *multigraphe* l'objet que nous avons défini, l'acceptation ou non des boucles pouvant elle aussi faire changer la terminologie.

Définition I.2. Un graphe G est dit *fini* (resp. *dénombrable*) lorsque les ensembles $V(G)$ et $E(G)$ sont tous les deux finis (resp. dénombrables). Un graphe G est dit *localement fini* si, pour tout sommet x de G , l'ensemble des arêtes d'origine x ou de but x est fini.

⚡ L'étude des graphes non dénombrables ou non localement finis a un intérêt réel et certains résultats de ce chapitre sont vrais en toute généralité, mais dans un souci de simplicité, nous supposons toujours implicitement que les graphes sont dénombrables et localement finis.

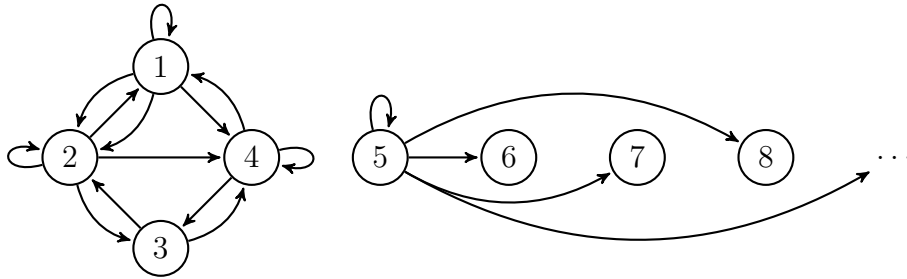


FIGURE I.1 – Un graphe orienté non simple et non localement fini.

Définition I.3. Soient G un graphe et A un ensemble de sommets de G . Le *sous-graphe de G induit par A* , noté $G|_A$ est le sous-graphe obtenu en ne gardant comme sommets que les éléments de A et en effaçant toutes les arêtes dont l'origine ou le but ne sont pas dans A . Formellement :

- * $V(G|_A) = A$;
- * $E(G|_A) = \{e \in E(G) \mid \{e_+, e_-\} \subset A\}$;
- * $\text{Origine}_{G|_A} = \text{Origine}_G|_{E(G|_A)}$ et $\text{But}_{G|_A} = \text{But}_G|_{E(G|_A)}$.

Le graphe quotient G/A est obtenu en identifiant tous les sommets de A à un seul sommet a et en effaçant les boucles (nouvelles ou anciennes) issues de a . Formellement :

- * $V(G/A) = (V(G) \setminus A) \sqcup \{a\}$;
- * $E(G/A) = \{e \in E(G) \mid \{e_-, e_+\} \not\subset A\}$;
- * $\text{Origine}_{G/A}(e) = \begin{cases} e_- & \text{si } e_- \notin A \\ a & \text{si } e_- \in A \end{cases}$
- * $\text{But}_{G/A}(e) = \begin{cases} e_+ & \text{si } e_+ \notin A \\ a & \text{si } e_+ \in A \end{cases}$

Définition I.4. Une suite finie (e^1, e^2, \dots, e^N) d'arêtes de G est appelée un *chemin d'arêtes* de longueur N lorsque pour tout $k \in \{1, 2, \dots, N-1\}$, $e_+^k = e_-^{k+1}$ et on dit qu'il va du sommet e_-^1 au sommet e_+^N . Lorsque $e_-^1 = e_+^N$, un tel chemin est appelé un *cycle*. Si aucun de ses sous-chemins stricts n'est un cycle, alors ce chemin est dit simple.

Une suite finie (x_1, x_2, \dots, x_N) de sommets de G telle que,

$$\forall k = 1, 2, \dots, N-1, \quad x_k \rightarrow x_{k+1}$$

est appelée un *chemin de sommets* de longueur N . Si, de plus, tous les x_k sont distincts deux à deux, ce chemin est dit *simple*.

Définition I.5. Un *réseau orienté* est un graphe orienté G , muni d'une application $c : \mathbf{E}(G) \rightarrow]0; \infty[$ appelée, suivant le contexte *conductance* ou *capacité*.

1.2 Flots positifs admissibles sur les réseaux orientés finis

Commençons par définir les flots et certaines de leurs propriétés.

Définition I.6. Soit G un graphe. On appelle *flot* (resp. *flot positif*) sur G toute application de $\mathbf{E}(G)$ dans \mathbb{R} (resp. dans \mathbb{R}_+). On dit qu'un flot θ sur G vérifie la *loi des nœuds* en un sommet x de G , ou encore est *conservatif* en x , lorsque :

$$\sum_{e_- = x} \theta(e) = \sum_{e_+ = x} \theta(e)$$

En outre, on dit que θ est un flot allant du sommet s (appelé *source*) au sommet t (appelé *puits*) lorsque :

- * θ vérifie la *loi des nœuds* sur $\mathbf{V}(G) \setminus \{s, t\}$;
- * $\text{Force}(\theta) := \sum_{e_- = s} \theta(e) - \sum_{e_+ = s} \theta(e) \geq 0$.

Enfin, un flot positif θ sur un réseau G est dit *admissible* si pour toute arête $e \in \mathbf{E}(G)$, $0 \leq \theta(e) \leq c(e)$. On note $\text{Flots}(G)$ l'ensemble de ces flots et $\text{Flots}(s, t)$ l'ensemble des flots positifs admissibles allant de la source s vers le puits t .

Problème FLOT-MAX

Imaginons, par exemple, un réseau informatique. Les sommets sont des ordinateurs ou des serveurs qui peuvent envoyer ou recevoir des données, avec un débit en théorie illimité. Les arêtes sont des câbles qui, pour une raison ou pour une autre ne peuvent faire circuler les informations que dans un sens donné et avec un débit maximal appelé leur capacité. Un ordinateur s envoie des données à une machine t située plus loin dans le réseau, avec la contrainte qu'aucune machine intermédiaire ne doit stocker ces données : toutes les données qui arrivent à une machine intermédiaire doivent en repartir immédiatement.

Quel est le débit maximal pour l'envoi de données à partir de s ? Autrement dit, nous cherchons :

$$\max \{ \text{Force}(\theta) \mid \theta \in \text{Flots}(s, t) \}.$$

Avant d'énoncer le problème suivant, nous introduisons la très importante notion de *coupe* dans un réseau.

Définition I.7. Soit G un réseau orienté et s et t deux sommets de G . Une *coupe* (en anglais *cutset*) Π entre s et t est une partie de $\mathbf{E}(G)$ telle que tout chemin allant de s à t contient une arête de Π . On note $\text{Cutset}(s, t)$ l'ensemble de ces coupes qui sont minimales pour l'inclusion. La capacité de la coupe Π , notée avec un léger abus de notation $c(\Pi)$ est définie par :

$$c(\Pi) = \sum_{e \in \Pi} c(e).$$

Problème COUPE-MIN

Une organisation malfaisante souhaite couper toutes les communications de s vers t . Pour ce faire, elle doit choisir une coupe entre s et t , et pour être la plus discrète possible envers les autres utilisateurs du réseau, elle doit le faire en minimisant la capacité de cette coupe. Nous cherchons cette fois :

$$\min \{ c(\Pi) \mid \Pi \in \text{Cutset}(s, t) \}.$$

Le théorème suivant, énoncé par Ford et Fulkerson dans l'article [FF56] établit que ces deux problèmes sont intimement liés.

Théorème I.1 (FLOT-MAX/COUPE-MIN). Soient G un réseau orienté fini, et s et t deux sommets de G . Alors,

$$\max \{ \text{Force}(\theta) \mid \theta \in \text{Flots}(s, t) \} = \min \{ c(\Pi) \mid \Pi \in \text{Cutset}(s, t) \}.$$

Démonstration. Commençons par remarquer que l'ensemble

$$\{ c(\Pi) \mid \Pi \in \text{Cutset}(s, t) \}$$

admet bien un minimum car il s'agit d'un ensemble fini. En outre, l'ensemble $\text{Flots}(s, t)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^{\mathbf{E}(G)}$ muni de la topologie produit et la fonction Force y est continue, de sorte que

$$\max \{ \text{Force}(\theta) \mid \theta \in \text{Flots}(s, t) \}$$

est bien atteint et bien défini (pour davantage de détails sur cet argument de compacité, voir le [paragraphe suivant](#)).

Introduisons la fonction d'incidence relative au réseau G .

$$\Phi : \mathbf{V}(G) \times \mathbf{E}(G) \longrightarrow \{-1; 0; 1\}$$

$$(x, e) \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } e \text{ est une boucle} \\ 1 & \text{si } e_- = x \\ -1 & \text{si } e_+ = x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour un flot θ allant de s vers t , on a alors les identités suivantes, la seconde étant une réécriture de la loi des nœuds.

$$\text{Force}(\theta) = \sum_{e \in \mathbf{E}(G)} \Phi(s, e) \theta(e) \quad (\text{I.1})$$

$$\forall x \in \mathbf{V}(G) \setminus \{s, t\}, \sum_{e \in \mathbf{E}(G)} \Phi(x, e) \theta(e) = 0. \quad (\text{I.2})$$

Remarquons également que, pour toute partie $W \subset \mathbf{V}(G)$, et toute arête $e \in \mathbf{E}(G)$, on a

$$\sum_{x \in W} \Phi(x, e) = \begin{cases} 0 & \text{si } \{e_-, e_+\} \subset W \\ 0 & \text{si } \{e_-, e_+\} \subset \mathbf{V}(G) \setminus W \\ 1 & \text{si } e_- \in W \text{ et } e_+ \notin W \\ -1 & \text{si } e_+ \in W \text{ et } e_- \notin W \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

Nous pouvons maintenant démontrer la première inégalité. Considérons un flot positif admissible θ de s vers t et Π une coupe minimale de s vers t . Soit S l'ensemble des sommets x de G tels qu'il existe un chemin d'arêtes de s vers x ne passant pas par Π . Notons que t n'appartient pas à S . En utilisant les formules (I.1) et (I.2), on obtient

$$\begin{aligned} \text{Force}(\theta) &= \sum_{e \in \mathbf{E}(G)} \Phi(s, e) \theta(e) \\ &= \sum_{e \in \mathbf{E}(G)} \Phi(s, e) \theta(e) + \sum_{x \in S \setminus \{s\}} \sum_{e \in \mathbf{E}(G)} \Phi(x, e) \theta(e) \\ &= \sum_{x \in S} \sum_{e \in \mathbf{E}(G)} \Phi(x, e) \theta(e). \end{aligned}$$

Enfin, en intervertissant les deux sommes et en utilisant la formule I.3,

$$\begin{aligned} \text{Force}(\theta) &= \sum_{e \in \mathbf{E}(G)} \theta(e) \sum_{x \in S} \Phi(x, e) \\ &\leq \sum_{e \in \Pi} \theta(e) \\ &\leq \sum_{e \in \Pi} c(e) \\ &\leq \min \{c(\Pi) \mid \Pi \in \text{Cutset}(s, t)\}. \end{aligned}$$

L'autre inégalité est plus délicate. Considérons un flot positif admissible de force maximale entre s et t . Une suite de sommets distincts deux à deux

$$(s = x_0, x_1, \dots, x_k)$$

est appelée un *chemin augmentable* de s vers x_k si, pour tout $i = 0, \dots, k - 1$, il existe une arête e de x_i vers x_{i+1} telle que $\theta(e) < c(e)$ ou une arête e' de x_{i+1} vers x_i telle que $\theta(e') > 0$. Soit A l'ensemble des sommets x tels qu'il existe un chemin augmentable de s vers x . Démontrons que $t \notin A$. Dans le cas contraire, on peut trouver un chemin augmentable

$$(s = x_0, x_1, \dots, x_k = t).$$

Pour chaque $i = 0, \dots, k - 1$, choisissons une arête e^i comme dans la définition ci-dessus. Puis, pour $\varepsilon > 0$, définissons :

$$\theta_\varepsilon(e^i) = \begin{cases} \theta(e^i) + \varepsilon & \text{si } e^i \text{ va de } x_i \text{ vers } x_{i+1} \\ \theta(e^i) - \varepsilon & \text{si } e^i \text{ va de } x_{i+1} \text{ vers } x_i \end{cases}$$

$$\theta_\varepsilon(e) = \theta(e) \quad \text{si } e \text{ n'est pas une des } e^i.$$

Par définition des chemins augmentables et par finitude de k , on peut trouver un $\varepsilon > 0$ assez petit pour que θ_ε soit encore un flot positif admissible. Une petite étude de cas, pour laquelle on peut s'aider de la figure I.2, permet de vérifier que θ_ε vérifie encore la loi des nœuds entre s et t et que $\text{Force}(\theta_\varepsilon) = \text{Force}(\theta) + \varepsilon$. Cela contredit la maximalité de θ .

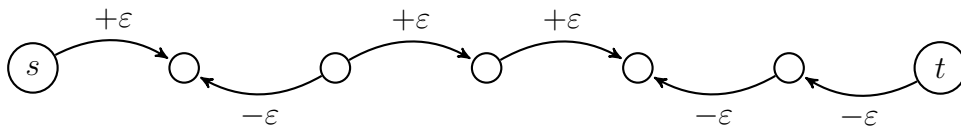


FIGURE I.2 – Augmentation d'un flot positif admissible le long d'un chemin augmentable

Ainsi, $t \in A^c$. Définissons

$$\Pi = \{e \in E(G) \mid e_- \in A \text{ et } e_+ \in A^c\}.$$

Comme $t \in A^c$, Π est une coupe de s vers t . De plus par définition de A , on a $\theta(e) = c(e)$ si $e \in \Pi$, c'est-à-dire si e va d'un sommet de A vers un sommet de A^c et $\theta(e) = 0$ si e va d'un sommet de A^c vers un sommet de A . On peut maintenant

calculer la force du flot θ comme dans la première partie de la démonstration :

$$\begin{aligned}
\text{Force}(\theta) &= \sum_{x \in A} \sum_{e \in \mathbf{E}(G)} \theta(e) \Phi(x, e) \\
&= \sum_{e \in \mathbf{E}(G)} \theta(e) \sum_{x \in A} \Phi(x, e) \\
&= \sum_{e \in \mathbf{E}(G)} \theta(e) \sum_{e \text{ entre } A \text{ et } A^c} (\mathbf{1}_{\{e_- \in A\}} - \mathbf{1}_{\{e_+ \in A\}}) \quad \text{d'après la formule (I.3)} \\
&= \sum_{e \in \Pi} c(e) \\
&\geq \min \{c(\Pi) \mid \Pi \in \text{Cutset}(s; t)\},
\end{aligned}$$

ce qui achève notre première démonstration. □

1.3 Cas des réseaux orientés infinis

On s'intéresse maintenant, dans le cas de réseaux infinis, à l'existence de flots maximaux d'une source s vers l'infini. Rappelons que tous nos graphes sont dénombrables et localement finis.

Définition I.8. Soient G un réseau orienté infini et s un sommet de G . Un *flot positif admissible de s vers l'infini* est une fonction $\theta : \mathbf{E}(G) \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

- * $\forall e \in \mathbf{E}(G), 0 \leq \theta(e) \leq c(e)$;
- * $\text{Force}(\theta) := \sum_{e_- = s} \theta(e) - \sum_{e_+ = s} \theta(e) \geq 0$;
- * θ vérifie la loi des nœuds en tout sommet x distinct de s .

On note $\text{Flots}(s, \infty)$ l'ensemble de ces flots.

Pour pouvoir définir les coupes entre s et l'infini, il faut d'abord pouvoir donner un sens aux « chemins de s vers l'infini ».

Définition I.9. Un *rayon* de s vers l'infini est une suite infinie $(e^k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'arêtes toutes distinctes, sans cycle et sans boucle telle que $e_-^0 = s$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $e_+^k = e_-^{k+1}$. On note $\text{Rays}(s, \infty)$ l'ensemble de ces rayons.

Définition I.10. Une coupe entre s et l'infini est un ensemble d'arêtes Π tel que tout rayon de s vers l'infini contienne une arête de Π . Comme précédemment, nous notons $\text{Cutset}(s, \infty)$ l'ensemble des coupes de s vers l'infini qui sont minimales pour l'inclusion.

Nous allons établir le théorème suivant, analogue du théorème FLOT-MAX / COUPE-MIN dans le cas d'un graphe infini :

Théorème I.2 (FLOT-MAX/INF-COUCPE). *Soit G un réseau orienté infini et s un sommet de G . Alors,*

$$\max \{\text{Force}(\theta) \mid \theta \in \text{Flots}(s, \infty)\} = \inf \{c(\Pi) \mid \Pi \in \text{Cutset}(s, \infty)\}.$$

En particulier, si $\inf \{c(\Pi) \mid \Pi \in \text{Cutset}(s, \infty)\} > 0$, alors $\text{Flots}(s, \infty)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

Avant de s'attaquer à sa démonstration, un certain nombre de remarques s'imposent.

Compacité de l'ensemble $\text{Flots}(s, \infty)$

L'ensemble $\text{Flots}(G)$ des flots positifs admissibles sur G vérifie :

$$\text{Flots}(G) \simeq \prod_{e \in E(G)} [0; c(e)].$$

Muni de la topologie produit, $\text{Flots}(G)$ est donc compact (par Tychonoff dénombrable ou directement à l'aide d'un argument d'extraction diagonal) et métrisable : on peut, par exemple numérotter les arêtes de G : $\{e^1, e^2, \dots\}$ et poser, pour deux flots positifs admissibles

$$d(\theta, \theta') = \sum_{k \geq 1} 2^{-k} \frac{|\theta(e^k) - \theta'(e^k)|}{c(e^k)}.$$

Pour tout sommet x de G , notons $\text{div}_x : \text{Flots}(G) \rightarrow \mathbb{R}$ la divergence en x définie par :

$$\text{div}_x(\theta) = \sum_{e_- = x} \theta(e) - \sum_{e_+ = x} \theta(e)$$

La divergence div_x est continue car elle est une combinaison linéaire finie de projections. De plus, pour un flot θ de source s , $\text{div}_s(\theta)$ n'est autre que $\text{Force}(\theta)$. Ainsi,

$$\text{Flots}(s, \infty) = \text{div}_s^{-1}([0; \infty]) \cap \bigcap_{x \in V(G) \setminus \{s\}} \text{div}_x^{-1}(\{0\})$$

de sorte que $\text{Flots}(s, \infty)$ est une partie fermée du compact $\text{Flots}(G)$ et la fonction Force y atteint un maximum.

Compacité de l'ensemble $\text{Rays}(s, \infty)$

On peut munir l'ensemble $\text{Rays}(s, \infty)$ des rayons d'une distance ultramétrique. Par exemple, pour $\xi = (e_k)_{k \geq 0}$ et $\xi' = (e'_k)_{k \geq 0}$ on pose :

$$d(\xi, \xi') = [1 + \sup \{k \in \mathbb{N} \mid \forall i = 0, 1, \dots, k, e_i = e'_i\}]^{-1}$$

Un argument d'extraction diagonale montre que $\text{Rays}(s, \infty)$ est compact (la finitude locale de G joue ici un rôle crucial).

Pour $e \in E(G)$, notons W_e l'ensemble des rayons de s à l'infini qui passent par e . Il est clair que W_e est un ouvert : si un rayon ξ passe par e , un rayon ξ' assez proche de ξ passera aussi par e .

Soit Π une coupe de s à l'infini. Par définition, $(W_e)_{e \in \Pi}$ est un recouvrement de $\text{Rays}(s, \infty)$, puis par compacité, il existe une partie finie Π' de Π telle $\text{Rays}(s, \infty) = \bigcup_{e \in \Pi'} W_e$. Ainsi, Π' est une partie finie de Π qui est elle-même une coupe.

On vient de démontrer le lemme suivant :

Lemme I.3. *Toute coupe de s vers l'infini contient une coupe finie de s vers l'infini.*

Limite de réseaux finis

Pour passer des réseaux finis aux réseaux infinis nous utilisons la méthode suivante : on considère une suite croissante $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties finies de $V(G)$ qui contiennent toutes s et tous les voisins de s et telles que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n = V(G)$$

Soit $Z_n = V(G) \setminus V_n$ et $G_n = G/Z_n$ (voir la définition I.3). On note z_n le nouveau sommet introduit dans cette construction, de sorte que $V(G_n) = V_n \sqcup \{z_n\}$. Le graphe G_n est fini et tel que $E(G_n) \subset E(G)$. On peut ainsi le munir, par restriction, d'une capacité encore notée c . De plus,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E(G_n) = E(G).$$

Nous pouvons maintenant passer à la démonstration du théorème FLOT-MAX / INF-COUBE.

Démonstration. Toute coupe $\Pi \in \text{Cutset}_{G_n}(s, z_n)$ est aussi une coupe de s vers l'infini dans G , donc

$$\begin{aligned} \inf \{c(\Pi) \mid \Pi \in \text{Cutset}_G(s, \infty)\} &\leq \min \{c(\Pi) \mid \Pi \in \text{Cutset}_{G_n}(s, z_n)\} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \min \{c(\Pi) \mid \Pi \in \text{Cutset}_{G_n}(s, z_n)\}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, si Π est une coupe dans G de s vers l'infini, d'après le lemme I.3, la coupe Π contient une coupe finie Π' , laquelle est, pour n assez grand, une coupe dans G_n entre s et z_n . Ainsi,

$$\begin{aligned} c(\Pi) &\geq c(\Pi') \geq \min \{c(\Pi) \mid \Pi \in \text{Cutset}_{G_n}(s, z_n)\} \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \min \{c(\Pi) \mid \Pi \in \text{Cutset}_{G_n}(s, z_n)\}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\inf \{c(\Pi) \mid \Pi \in \text{Cutset}_G(s, \infty)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \min \{c(\Pi) \mid \Pi \in \text{Cutset}_{G_n}(s, z_n)\}.$$

Par restriction, un flot $\theta \in \text{Flots}_G(s, \infty)$ induit un flot $\theta_n \in \text{Flots}_{G_n}(s, z_n)$ de même force. En utilisant le théorème FLOT-MAX/COUPE-MIN, on obtient :

$$\text{Force}(\theta) = \text{Force}(\theta_n) \leq \min \{c(\Pi) \mid \Pi \in \text{Cutset}_{G_n}(s, z_n)\}.$$

Enfin, en passant à la limite dans le membre de droite,

$$\text{Force}(\theta) \leq \inf \{c(\Pi) \mid \Pi \in \text{Cutset}_G(s, \infty)\}.$$

Pour démontrer l'autre inégalité, considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un flot maximal $\theta_n \in \text{Flots}(s, z_n)$. On peut étendre θ_n en un flot $\tilde{\theta}_n$ en posant $\tilde{\theta}_n(e) = 0$ dès que $e \notin E(G_n)$. Par compacité de $\text{Flots}(G)$, on peut, quitte à en extraire une sous-suite, supposer que $(\tilde{\theta}_n)$ converge vers un flot θ . On obtient, en utilisant le théorème FLOT-MAX/COUPE-MIN,

$$\begin{aligned} \text{Force}(\theta) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Force}(\tilde{\theta}_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Force}(\theta_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \min \{c(\Pi) \mid \Pi \in \text{Cutset}_{G_n}(s, z_n)\} \\ &= \inf \{c(\Pi) \mid \Pi \in \text{Cutset}_G(s, \infty)\}. \end{aligned}$$

Il ne reste qu'à remarquer que, pour tout $x \in V(G) \setminus \{s\}$, pour n assez grand,

$$\text{div}_x \tilde{\theta}_n = \text{div}_x \theta_n = 0.$$

En outre, par continuité de div_x ,

$$\text{div}_x \theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{div}_x \tilde{\theta}_n = 0.$$

Le flot positif admissible θ est donc bien un élément de $\text{Flots}(s, \infty)$, ce qui achève cette démonstration. \square

2 Réseaux non orientés et flots antisymétriques

2.1 Définitions et premières propriétés

Intuitivement, un graphe non orienté est un graphe dans lequel les arêtes sont données sans orientation, c'est-à-dire n'ont pas une origine et un but mais simplement deux extrémités. Cependant, nous n'allons pas tout à fait adopter ce point de vue : d'abord il nous priverait des définitions et théorèmes précédents mais surtout

nous aurons besoin d'une certaine forme d'orientation pour définir rigoureusement les flots et les courants qui nous intéressent.

Aussi, pour nous, un graphe non orienté est un graphe orienté ayant la propriété supplémentaire d'avoir pour chaque arête une unique arête qui lui est associée et qui va dans l'autre sens (voir la figure I.3).

Définition I.11. Un *graphe non orienté* est un graphe orienté G tel que, pour toute $e \in E(G)$, il existe une unique arête, notée $-e \in E(G)$ satisfaisant :

- * $-e \neq e$;
- * $-(-e) = e$;
- * **Origine** $(-e) = \mathbf{But}(e)$;
- * **But** $(-e) = \mathbf{Origine}(e)$.

Un *réseau non orienté* G est un réseau dont le graphe sous-jacent est non orienté et dont la capacité est symétrique, c'est-à-dire vérifie :

$$\forall e \in E(G), \quad c(-e) = c(e).$$

Dans ce contexte on peut aussi définir les arêtes non orientées.

Définition I.12. L'ensemble des arêtes non orientées de G est l'ensemble

$$\tilde{E}(G) = \{\{e; -e\} \mid e \in E(G)\}.$$

Si e est une arête orientée, on note $[e] := \{-e; e\}$ l'arête non orientée associée.

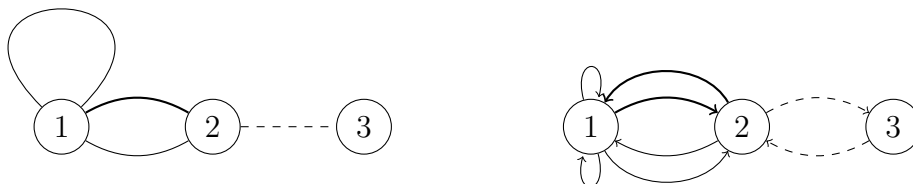


FIGURE I.3 – Un même graphe non orienté dessiné de deux façons différentes : à gauche les arêtes qui sont représentées sont non orientées ; à droite elles sont orientées.

Sous bien des aspects, il est beaucoup plus facile de travailler avec les réseaux non orientés. Si une arête e va d'un sommet x à un sommet y , alors l'arête $-e$ va du sommet y au sommet x . Aussi, la relation de voisinage $x \rightarrow y$ (voir la définition I.1) est ici symétrique et on note $x \rightleftharpoons y$. De même, s'il existe un chemin allant d'un sommet x vers un sommet y , le chemin opposé va du sommet y au sommet x . On dit alors que les sommets x et y sont connectés dans G et on note $x \leftrightarrow y$. La relation \leftrightarrow est une relation d'équivalence sur $V(G)$.

Définition I.13. les classes d'équivalence associées à la relation \leftrightarrow sont appelées les *composantes connexes* de G . Lorsque la seule composante connexe est $V(G)$ tout entier, on dit que le graphe G est *connexe*.

Définition I.14. On appelle *cycle simple* un cycle d'arêtes dont toutes les arêtes non orientées associées sont distinctes. Un graphe non orienté connexe sans cycle simple est appelé un *arbre*.

Proposition I.4. Soit G un graphe non orienté fini et connexe.

- * Il existe un sommet $x \in V(G)$ tel que $G_{|V(G)\setminus\{x\}}$ soit encore connexe.
- * $\text{Card}(\tilde{E}(G)) \geq \text{Card}(V(G)) - 1$.
- * Le graphe G est un arbre si et seulement si il y a égalité dans l'inégalité précédente.

Démonstration. 1. Soit Γ l'ensemble des chemins simples de sommets dans G (voir la définition I.4). Comme $V(G)$ est fini, il y a dans Γ des chemins de longueur maximale. Considérons un tel chemin $(x_1, \dots, x_N =: x)$, et notons $G' = G_{|V(G)\setminus\{x\}}$. Supposons que G' a plus d'une composante connexe. Par simplicité du chemin choisi, les sommets x_1, \dots, x_{N-1} sont dans l'une de ces composantes connexes A . Soit y un sommet appartenant à une autre composante B de G' . Par connexité de G , il existe un chemin simple $(x = y_1, y_2, \dots, y_K = y)$ entre x et y , avec y_2, \dots, y_K dans B . Alors, le chemin $(x_1, \dots, x_N = x = y_1, y_2)$ est de longueur $N + 1$, ce qui est contradictoire.

2. Si G a $n + 1$ sommets, l'on peut d'après le premier point choisir un sommet x de G tel que $G_{|V(G)\setminus\{x\}}$ soit connexe et ait n sommets et on peut conclure par récurrence.

3. On procède encore une fois par récurrence, le résultat étant évident si $n = 1$. Soit G ayant $n + 1$ sommets et soit x tel que $G_{|V(G)\setminus\{x\}}$ soit connexe. Supposons que G a n arêtes non orientées. Alors $G_{|V(G)\setminus\{x\}}$ a exactement $n - 1$ arêtes et est donc un arbre, par hypothèse de récurrence. Une seule arête non orientée part de x , donc G n'a pas de cycle simple et est un arbre.

Réciproquement, si G est un arbre, alors $G_{|V(G)\setminus\{x\}}$ également car il ne peut pas non plus avoir de cycles non triviaux. Ainsi, $G_{|V(G)\setminus\{x\}}$ a $n - 1$ arêtes non orientées. Si deux arêtes non orientées partent de x et le joignent à deux sommets distincts y_1 et y_2 , alors par connexité de $G_{|V(G)\setminus\{x\}}$, on peut trouver un chemin de y_1 à y_2 ne passant pas par x , de sorte que le chemin joignant x à y_1 puis y_2 et x est un cycle, ce qui est contradictoire, donc x n'est relié à $V(G) \setminus \{x\}$ que par une arête et G a exactement n arêtes. \square

Nous concluons cette sous-partie en mentionnant l'existence d'une distance naturelle sur les sommets d'un graphe non orienté.

Définition I.15. Soit G un graphe non orienté. La *distance de graphe* associée à G est la distance d_G sur l'ensemble $V(G)$ définie par : pour deux sommets x et y , $d_G(x, y)$ est égale à la longueur du plus petit chemin menant de x à y si ces sommets sont connectés, et vaut $+\infty$ sinon.

2.2 Flots antisymétriques admissibles

Nous changeons ici de point de vue sur les flots. Dans la partie précédente, on pouvait voir un flot *positif* comme un *échange réel* d'une certaine quantité (de l'information, de l'eau, des électrons, ...) entre des sommets, via des arêtes. Mais on peut aussi faire le *bilan algébrique* des échanges entre x et y via l'arête non orientée $[e]$ et l'on obtient un *flot antisymétrique* $\tilde{\theta}_{\text{bilan}}$. Ce bilan peut à son tour être associé à un flot positif *univoque* (c'est-à-dire à sens unique) ayant le même bilan, comme cela est illustré dans la figure I.4.

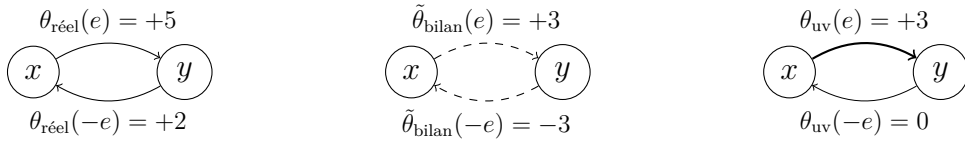


FIGURE I.4 – Un flot positif réel et les flots bilan antisymétrique et positif univoque qui lui sont associés.

Cette idée élémentaire mais assez subtile va nous permettre de donner une version du théorème FLOT-MAX/COUPE-MIN pour les réseaux non orientés et les flots antisymétriques. Mais avant cela, nous devons adapter nos définitions précédentes à ce cadre.

Définition I.16. Soit G un réseau non orienté. Un *flot antisymétrique* sur G est une fonction $\tilde{\theta} : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour toute arête e , $\tilde{\theta}(-e) = -\tilde{\theta}(e)$. On dit que $\tilde{\theta}$ est un *flot antisymétrique admissible* si, de plus, pour toute arête e , $|\tilde{\theta}(e)| \leq c(e)$. On note $\tilde{\text{Flots}}(G)$ l'ensemble des flots antisymétriques admissibles sur G .

Si $\tilde{\theta}$ est un flot antisymétrique et x est un sommet de G , la divergence de $\tilde{\theta}$ en x , notée $\tilde{\text{div}}_x(\tilde{\theta})$ est définie par

$$\tilde{\text{div}}_x(\tilde{\theta}) = \sum_{e_- = x} \tilde{\theta}(e).$$

L'ensemble des flots antisymétriques admissibles d'un sommet s vers un sommet t (resp. de s vers $+\infty$) est noté $\tilde{\text{Flots}}(s, t)$ (resp. $\tilde{\text{Flots}}(s, \infty)$), et la force d'un tel flot est $\tilde{\text{Force}}(\tilde{\theta}) := \tilde{\text{div}}_s(\tilde{\theta})$ (noter la très légère différence avec la définition I.6 de la partie précédente).

Dans un graphe non orienté, une *coupe symétrique* $\tilde{\Pi}$ est un *ensemble d'arêtes non orientées* tel que tout chemin d'arêtes de s vers t ait une arête dont l'une des orientations est dans $\tilde{\Pi}$. La capacité d'une telle coupe est

$$c(\tilde{\Pi}) = \sum_{[e] \in \tilde{\Pi}} c(e).$$

L'ensemble de ces coupes qui sont minimales pour l'inclusion est noté $\tilde{\text{Cutset}}(s, t)$ (resp. $\tilde{\text{Cutset}}(s, \infty)$).

Un flot positif θ sur G , réseau non orienté, est dit *univoque* lorsque pour toute arête e , $\theta(e) = 0$ ou $\theta(-e) = 0$.

Une *coupe univoque* Π_{uv} entre s et t est une coupe entre s et t ayant au plus une orientation de chaque arête.

Deux applications naturelles nous permettent de passer d'un flot positif à un flot antisymétrique et réciproquement. Nous les notons **Bilan** et **Univoque** (voir la figure I.4). L'application **Bilan**, de $\text{Flots}(G)$ vers $\tilde{\text{Flots}}(G)$ est définie par $\text{Bilan}(\theta) = \tilde{\theta}$, où

$$\forall e \in \mathbf{E}(G), \quad \tilde{\theta}(e) = \theta(e) - \theta(-e).$$

L'application **Univoque**, de $\tilde{\text{Flots}}(G)$ vers $\text{Flots}(G)$ est quant à elle définie par $\text{Univoque}(\tilde{\theta}) = \theta_{uv}$ où

$$\forall e \in \mathbf{E}(G), \quad \theta_{uv}(e) = \begin{cases} \tilde{\theta}(e) & \text{si } \tilde{\theta}(e) \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition I.5. *L'application **Bilan** est bien définie : l'image d'un flot positif admissible est un flot antisymétrique admissible. De plus, **Bilan** conserve la divergence en tout sommet.*

Démonstration. Soit $\theta \in \text{Flots}(G)$ et $\tilde{\theta} = \text{Bilan}(\theta)$. Pour toute arête $e \in \mathbf{E}(G)$,

$$\tilde{\theta}(-e) = \theta(-e) - \theta(-(-e)) = \theta(-e) - \theta(e) = -\tilde{\theta}(e),$$

donc $\tilde{\theta}$ est antisymétrique. De plus,

$$-c(e) \leq -\theta(-e) \leq \theta(e) - \theta(-e) \leq \theta(e) \leq c(e)$$

donc $\tilde{\theta}$ est bien admissible. Enfin, pour tout $x \in \mathbf{V}(G)$,

$$\begin{aligned} \text{div}_x(\theta) &= \sum_{e_- = x} \theta(e) - \sum_{e_+ = x} \theta(e) = \sum_{e_- = x} \theta(e) - \sum_{e_- = x} \theta(-e) \\ &= \sum_{e_- = x} (\theta(e) - \theta(-e)) = \text{div}_x(\tilde{\theta}). \end{aligned} \quad \square$$

Proposition I.6. *L'application **Univoque** est bien définie : l'image d'un flot antisymétrique admissible est un flot positif admissible. De plus, **Univoque** conserve la divergence en tout sommet.*

Démonstration. Soient $\tilde{\theta} \in \tilde{\text{Flots}}(G)$ et $\theta_{uv} = \text{Univoque}(\tilde{\theta})$. Le flot θ_{uv} est évidemment positif admissible. Puis, pour une arête $e \in \mathbf{E}(G)$, on a

$$\theta_{uv}(e) - \theta_{uv}(-e) = \begin{cases} \theta_{uv}(e) = \tilde{\theta}(e) & \text{si } \tilde{\theta}(e) \geq 0 \\ -\theta_{uv}(-e) = -\tilde{\theta}(-e) = \tilde{\theta}(e) & \text{si } \tilde{\theta}(-e) \geq 0 \end{cases}$$

Par conséquent, pour tout sommet $x \in V(G)$,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_x(\theta_{uv}) &= \sum_{e_- = x} \theta_{uv}(e) - \sum_{e_+ = x} \theta_{uv}(e) = \sum_{e_- = x} \theta_{uv}(e) - \sum_{e_- = x} \theta_{uv}(-e) \\ &= \sum_{e_- = x} \theta_{uv}(e) - \theta_{uv}(-e) = \sum_{e_- = x} \tilde{\theta}(e) = \tilde{\operatorname{div}}_x(\theta). \quad \square \end{aligned}$$

Corollaire I.7. *Si G est fini et non orienté et s et t sont deux sommets de G , alors*

$$\max \{ \operatorname{Force}(\theta) \mid \theta \in \operatorname{Flots}(s, t) \} = \max \{ \tilde{\operatorname{Force}}(\theta) \mid \theta \in \tilde{\operatorname{Flots}}(s, t) \}.$$

Si G est infini et s est un sommet de G , alors

$$\max \{ \operatorname{Force}(\theta) \mid \theta \in \operatorname{Flots}(s, \infty) \} = \max \{ \tilde{\operatorname{Force}}(\theta) \mid \theta \in \tilde{\operatorname{Flots}}(s, \infty) \}.$$

Démonstration. Le fait que $\max \{ \tilde{\operatorname{Force}}(\theta) \mid \theta \in \tilde{\operatorname{Flots}}(s, t) \}$ (resp. $\max \{ \tilde{\operatorname{Force}}(\theta) \mid \theta \in \tilde{\operatorname{Flots}}(s, \infty) \}$) existe se démontre de la même manière que pour les flots positifs admissible. Puis, dans chaque cas, les deux propositions précédentes fournissent les deux inégalités voulues. \square

Ainsi, nous avons fait le lien entre flots antisymétriques et flots positifs. Passons maintenant aux coupes symétriques et non symétriques. Grâce au lemme suivant, nous verrons que le minimum des capacités des coupes ne dépend pas de la définition choisie (I.7 ou I.16).

Lemme I.8. *Soit G un réseau non orienté fini (resp. infini) et Π une coupe (au sens de la définition I.7) entre une source s et un puits t (resp. entre une source s et l'infini). Alors Π contient une sous-coupe finie univoque Π_{uv} .*

Démonstration. Nous faisons la preuve dans le cas fini, le cas infini se traitant de la même manière. Soit Π une sous-coupe finie, a priori non symétrique, minimale pour l'inclusion. Supposons qu'il existe une arête non orientée $[e]$ telle que $[e] \subset \Pi$. Par minimalité de Π , ni $\Pi \setminus \{e\}$, ni $\Pi \setminus \{-e\}$ ne sont des coupes entre s et t , donc il existe deux chemins d'arêtes

$$\begin{aligned} \gamma_e &= (e^1, e^2, \dots, e^k = e, e^{k+1}, \dots, e^{k+n}) \quad \text{et} \\ \gamma_{-e} &= (e'^1, e'^2, \dots, e'^{k'} = -e, e'^{k'+1}, \dots, e'^{k'+n'}) \end{aligned}$$

allant tous les deux de s à t tels que γ_e n'est pas coupé par $\Pi \setminus \{e\}$ et γ_{-e} n'est pas coupé par $\Pi \setminus \{-e\}$. On peut également supposer que ces chemins ne contiennent aucun cycle. Soit

$$\gamma = (e'^1, e'^2, \dots, e'^{k'-1}, e^{k+1}, \dots, e^{k+n}).$$

Le chemin γ va de s vers t et ne passe ni par e , ni par $-e$, donc est coupé par Π et aussi par $\Pi \setminus [e]$. Mais alors, γ_e est coupé par $\Pi \setminus \{e\}$ ou γ_{-e} est coupé par $\Pi \setminus \{-e\}$, ce qui est contradictoire. \square

Corollaire I.9. *Si G est un réseau non orienté fini, et s et t sont deux sommets de G , alors,*

$$\min \{c(\Pi) : \Pi \in \text{Cutset}(s, t)\} = \min \{c(\tilde{\Pi}) : \tilde{\Pi} \in \tilde{\text{Cutset}}(s, t)\}.$$

Si G est un réseau non orienté infini et s est un sommet de G , alors,

$$\inf \{c(\Pi) : \Pi \in \text{Cutset}(s, \infty)\} = \inf \{c(\tilde{\Pi}) : \tilde{\Pi} \in \tilde{\text{Cutset}}(s, \infty)\}.$$

Démonstration. Nous venons de montrer que dans un réseau non orienté, toute coupe minimale pour l'inclusion est en fait univoque. On peut lui associer, de façon évidente, une coupe symétrique ayant la même capacité.

Réciproquement, à toute coupe symétrique minimale pour l'inclusion, l'on peut associer de façon évidente une coupe, laquelle contient une coupe univoque d'après le lemme précédent et celle-ci a la même capacité par minimalité de la coupe symétrique considérée. \square

Tous ces résultats et les théorème FLOT-MAX/COUPE-MIN et FLOT-MAX/INF-COUPE permettent enfin d'obtenir le théorème désiré :

Théorème I.10 (FLOT-MAX/COUPE-MIN pour les réseaux non orientés). *Soit G un réseau non orienté.*

1. *Si G est fini et s et t sont deux sommets de G , alors*

$$\max \{\text{Force}(\tilde{\theta}) \mid \tilde{\theta} \in \tilde{\text{Flots}}(s, t)\} = \min \{c(\tilde{\Pi}) \mid \tilde{\Pi} \in \tilde{\text{Cutset}}(s, t)\}.$$

2. *Si G est infini et s est un sommet de G , alors*

$$\max \{\text{Force}(\tilde{\theta}) \mid \tilde{\theta} \in \tilde{\text{Flots}}(s, \infty)\} = \inf \{c(\tilde{\Pi}) \mid \tilde{\Pi} \in \tilde{\text{Cutset}}(s, \infty)\}.$$

3 Cas des arbres infinis

\diamond Dans toute cette partie, les arbres considérés sont dénombrables et localement finis et implicitement munis d'une conductance qui en fait des réseaux non orientés.

Arbres enracinés, relation d'ordre et orientation des arêtes

Soit T un arbre et o un sommet de T (plus ou moins arbitraire selon les situations) que l'on appelle la racine de l'arbre enraciné (T, o) .

L'enracinement donne une structure supplémentaire aux sommets de (T, o) . Pour tout sommet $x \in V(T)$, il existe un unique chemin simple

$$(x = x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0 = o)$$

de sommets entre o et x . On note alors $|x| = n$, et cet entier est appelé la *hauteur* de x dans l'arbre enraciné (T, o) . Si $x \neq o$, alors x_{n-1} est appelé le *père*¹ de x et x est un *fils* de x_{n-1} . Le père de x est noté x_* . Le seul sommet qui n'a pas de père est la racine o et un sommet peut avoir plusieurs fils, mais jamais plus d'un père. Les sommets $x_{n-1}, \dots, x_1, x_0 = o$ sont appelés les *ancêtres* de x . La relation d'ordre partiel \leq sur $\mathbf{V}(T)$ est donnée par

$$x \leq y \iff x \text{ est un ancêtre de } y.$$

On note $\text{fils}(x)$ l'ensemble des fils de x et $\nu(x)$ le nombre de fils de x . Lorsque $\nu(x)$ est nul, on dit que x est une feuille de T . L'arbre issu de x , noté $T^{(x)}$ et implicitement enraciné en x est le sous-arbre induit de T dont les sommets sont les descendants de x (au sens large).

Dans l'arbre enraciné (T, o) , les arêtes non orientées sont en bijection avec l'ensemble des sommets distincts de la racine. Pour un sommet $x \neq o$, nous notons \vec{x} l'unique arête de but x et

$$\mathbf{E}(T, o) = \{\vec{x} \mid x \in \mathbf{V}(T) \setminus \{o\}\}.$$

L'ensemble $\mathbf{E}(T, o)$ contient exactement un représentant de chaque arête non orientée. Lorsque l'on identifie l'ensemble des arêtes non orientées $\tilde{\mathbf{E}}(T)$ avec $\mathbf{E}(T, o)$, on dit qu'on utilise l'orientation naturelle des arêtes (pour le choix de la racine o). Si une arête e est égale à $\pm \vec{x}$, on appelle encore hauteur de e le réel $|e| := |x|$.

Remarque I.2. Toutes les définitions données ci-dessus dépendent du choix de la racine o .

Coupes et rayons sur un arbre infini

Considérons un arbre enraciné infini (T, o) . La première remarque que nous pouvons faire est que $\text{Rays}(T)$ est non vide. En effet, comme (T, o) est infini, l'un des fils x_1 de la racine est tel que l'arbre issu de x_1 , $T^{(x_1)}$ est infini, puis l'un des fils x_2 de x_1 est tel que $T^{(x_2)}$ est infini, et en itérant ce processus, on définit une suite $(x_k)_{k \geq 1}$ de sommets, de telle sorte que $(\vec{x}_k)_{k \geq 1}$ est un rayon de T .

On peut aussi élaguer T vers l'infini en coupant toutes les branches finies de T . Formellement, on définit l'arbre T' comme le sous-arbre induit de T dont l'ensemble des sommets est

$$\mathbf{V}(T') = \{x \in \mathbf{V}(T) \mid T^{(x)} \text{ est infini}\}.$$

L'arbre T' est alors un arbre infini sans feuille.

Si $\Pi \in \text{Cutset}_T(o, \infty)$, alors Π est finie (d'après le lemme I.3) et est aussi une coupe pour T' car aucun rayon de T ne passe par un de ses sous-arbres finis. Il est

1. Nous utilisons ici les masculins par seul soucis de clarté, le terme « parent » étant en français légèrement ambigu (et plus long) et le genre de « mère » étant différent de celui de « sommet ». Nous nous excusons de perpétuer ainsi la tradition patriarcale de nos sociétés occidentales.

également clair que Π ne contient que des arêtes convenablement orientées (i.e. de la forme \vec{x}). On peut associer à Π l'arbre enraciné (S, o) où $V(S)$ est l'ensemble des sommets x de T tels qu'il existe un chemin de o à x ne passant pas par Π . Alors S est un sous-arbre fini de T .

Réciproquement, si l'on se donne un sous-arbre fini S de T , l'ensemble

$$\Pi = \{ \vec{x} \mid x_* \text{ est une feuille de } S \text{ et } T_x \text{ est infini} \}$$

est une coupe minimale pour l'inclusion entre o est $+\infty$.

Sens des flots sur un arbre enraciné

Nous disons qu'un flot θ positif univoque (resp. antisymétrique) respecte l'orientation naturelle de (T, o) , lorsque pour tout sommet x ,

$$\theta(-\vec{x}) = 0 \quad (\text{resp. } \theta(-\vec{x}) < 0).$$

Proposition I.11. *Soit (T, o) un arbre enraciné. Alors il existe un flot positif univoque θ , admissible de force maximale entre o et l'infini qui respecte l'orientation naturelle de (T, o) . Autrement dit,*

* pour tout sommet x , $0 \leq \theta(\vec{x}) \leq c(\vec{x})$ et $\theta(-\vec{x}) = 0$;

* pour tout sommet x ,

$$\theta(\vec{x}) = \sum_{y \in \text{fils } x} \theta(\vec{y}) ;$$

* $\text{Force}(\theta) = \max \{ \text{Force}(\theta') \mid \theta' \in \text{Flots}(o, \infty) \}$.

Démonstration. Le fait qu'on puisse choisir un flot positif maximal sous la forme d'un flot positif univoque résulte de la proposition I.6. D'autre part, la fin de la preuve du théorème MAX-FLOT/INF-COUCPE nous assure que l'on peut choisir un tel flot sous la forme d'une limite de flots maximaux sur des graphes quotients finis. Il nous reste donc à démontrer cette proposition dans le cas d'un flot positif univoque maximal θ sur le graphe fini $T_n = T/Z_n$ où Z_n est formé des sommets de hauteur strictement supérieure à n . Notons \tilde{T}_n le sous-arbre de T et sous-graphe de T_n induit par les sommets de hauteur inférieure ou égale à n de T , comme dans la figure I.5 ci-dessous. Soit θ un flot positif maximal, univoque, sur T_n et tel que le nombre de sommets $x' \in V(\tilde{T}_n)$ pour lesquels $\theta(-\vec{x}') > 0$ soit minimal. Nous raisonnons par l'absurde en supposant que ce nombre minimal est non nul.

Soit y un sommet de \tilde{T}_n , de hauteur minimale k tel que $\theta(-\vec{y}) > 0$.

Si $k = 1$, c'est-à-dire si y est un fils de la racine o , on définit le flot θ' , nul sur $[\vec{y}]$ et sur toutes les arêtes du sous-arbre formé par les descendants de y et égal à θ sinon. Il est facile de vérifier que θ vérifie encore la loi des nœuds sur $V(T_n) \setminus \{o, z_n\}$ et

$$\text{Force}(\theta') = \text{Force}(\theta) + \theta(-\vec{y}) > \text{Force}(\theta),$$

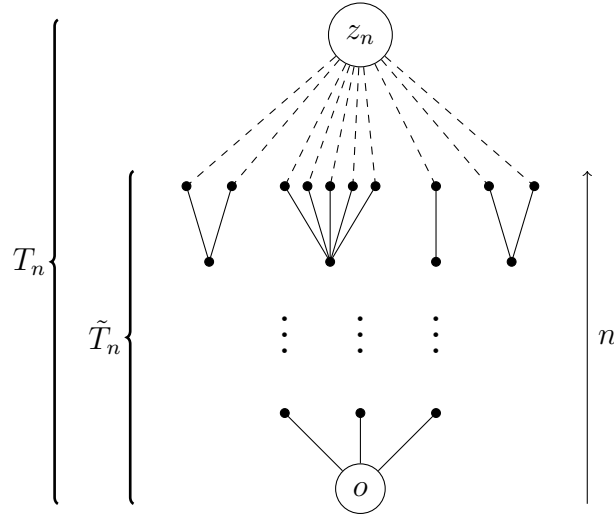


FIGURE I.5 – Le sous-arbre \tilde{T}_n et le graphe quotient $T_n = T/Z_n$.

ce qui contredit la maximalité de θ .

On peut donc supposer $k > 1$, de sorte que le père x de y n'est pas la racine. Comme $|x| = k - 1 < k$, on a $\theta(-\vec{x}) = 0$. La loi des nœuds en x impose alors que x ait un fils y' distinct de y tel que $\theta(\vec{y}') > 0$. Toujours par la loi des nœuds, il y a, d'une part un chemin orienté simple d'arêtes $\vec{\gamma}$ allant de x vers z_n sur lequel θ est strictement positif, et d'autre part un chemin simple orienté d'arêtes $\vec{\gamma}'$ allant de z_n vers x sur lequel θ est strictement positif, comme cela est illustré dans la figure I.6 suivante.

Considérons

$$m_1 := \min \left\{ \theta(e) \mid e \in \vec{\gamma} \cup \vec{\gamma}' \right\} > 0,$$

puis définissons le flot θ_1 , égal à θ partout, sauf sur $\vec{\gamma} \cup \vec{\gamma}'$, où il vaut $\theta - m_1$. Alors θ_1 est encore un flot positif maximal univoque sur T_n , mais cette fois, l'une des arêtes e^1 de $\vec{\gamma} \cup \vec{\gamma}'$ est telle que $\theta_1(e^1) = 0$. Si $e^1 \in \vec{\gamma}'$, alors θ_1 a strictement moins de sommets $x' \in V(\tilde{T}_n)$ pour lesquels $\theta_1(-\vec{x}') > 0$, ce qui est contradictoire.

Si $e^1 \in \vec{\gamma}$, alors il existe un autre chemin γ_1 de x vers z_n sur lequel θ_1 est non nul et on peut itérer la construction précédente ce qui, par finitude de T_n , aboutira nécessairement à une contradiction. \square

Cette dernière proposition nous sera utile pour démontrer le critère de transience de Lyons. Elle montre à quel point la structure d'arbre enraciné facilite le rapprochement entre flots, coupes et mesures.

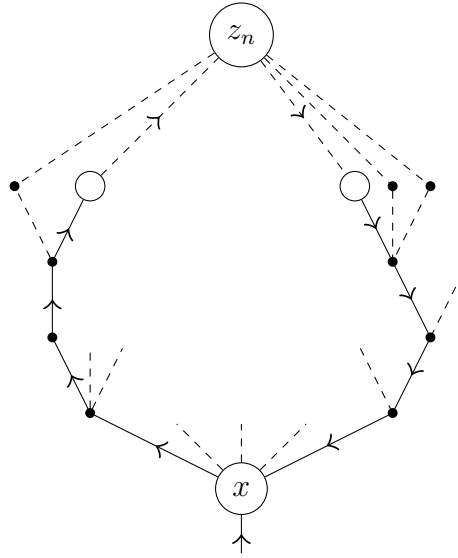


FIGURE I.6 – Chemin d’une feuille à une autre, le long duquel le flot est strictement positif.

Proposition I.12. Soient T un arbre infini, Π une coupe finie minimale pour l’inclusion entre o et ∞ et θ un flot positif univoque de o vers l’infini, respectant l’orientation naturelle de (T, o) . Alors

$$\text{Force}(\theta) = \sum_{e \in \Pi} \theta(e).$$

Démonstration. Comme θ est univoque et respecte l’orientation, on a, pour tout $x \in \mathcal{V}(T)$,

$$\text{div}_x(\theta) = \sum_{y \in \text{fils}(x)} \theta(\vec{y}) - \theta(\vec{x}).$$

Ensuite, on associe à la coupe Π le sous-arbre fini S de T comme dans le paragraphe 3.

En utilisant la loi des nœuds,

$$\begin{aligned} \text{Force}(\theta) &= \text{div}_o(\theta) = \sum_{x \in S} \text{div}_x(\theta) \\ &= \sum_{x \in S} \left(\sum_{y \in \text{fils}(x)} \theta(\vec{y}) - \theta(\vec{x}) \right) \\ &= \sum_{x \in S} \sum_{y \in \text{fils}(x)} \theta(\vec{y}) - \sum_{x \in S} \theta(\vec{x}). \end{aligned}$$

Les seuls termes qui ne s’annulent pas sont les $\theta(\vec{y})$ pour lesquels y est le fils d’un sommet x appartenant à S mais n’appartient pas lui-même à S . \square


Chapitre II

Courants sur un réseau

Nous commençons ce chapitre par une étude des réseaux électriques finis basée principalement sur les espaces euclidiens et la notion de fonction harmonique. Nous voyons ensuite que les courants et potentiels étudiés s'interprètent en terme de probabilités pour la marche aléatoire réversible sur le réseau.

1 Réseaux électriques finis

Nous laissons temporairement de côté les flots admissibles et les coupes pour nous intéresser à d'autres flots particuliers : les courants. Ici, la terminologie adoptée est celle des réseaux électriques et la fonction de poids sur les arêtes c s'appelle *conductance*.

 Dans cette partie, il sera toujours sous-entendu que les *réseaux sont non orientés* et les *flots sont antisymétriques*.

1.1 Fonctions harmoniques sur un réseau

Nous commençons par introduire quelques notations. Soit G un réseau. Pour deux sommets x et y de G , on note

$$c(x, y) = \sum_{e_-=x, e_+=y} c(e).$$

Comme G est non orienté, $c(x, y) = c(y, x)$.

On définit aussi une mesure π sur $V(G)$ par

$$\pi(x) = \sum_{e_-=x} c(e) = \sum_{y \neq x} c(x, y).$$

Si A est une partie de $V(G)$, on note \bar{A} l'ensemble des sommets de G qui sont dans A ou voisins d'un élément de A .

Définition II.1. Soit G un réseau et $f: \mathbf{V}(G) \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est *harmonique* en un sommet x lorsque

$$f(x) = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{e_-=x} c(e) f(e_+).$$

Proposition II.1 (Principe du Maximum). *Soit G un réseau fini ou infini et H un sous-graphe induit de G qui est connexe. Si $f: \mathbf{V}(G) \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction harmonique sur $\mathbf{V}(H)$ admettant un maximum M et que celui-ci est atteint en un sommet de H , alors f est constante, égale à M sur $\overline{\mathbf{V}(H)}$.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbf{V}(H)$ tel que $f(x) = M$. Comme

$$f(x) = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{y \neq x} c(x, y) f(y),$$

il serait absurde que l'un des $f(y)$, pour $y \in \overline{\{x\}}$ soit strictement inférieur à M . Ainsi, $f|_{\overline{\{x\}}} \equiv M$.

Soit $z \in \mathbf{V}(H)$. Par connexité de H , il existe un chemin de sommets

$$(x_1 = x, x_2, \dots, x_N = z)$$

menant de x à z dans H et par une récurrence facile sur N ,

$$M = f(x) = f(x_2) = \dots = f(z).$$

Par conséquent, $f|_{\mathbf{V}(H)} \equiv M$, puis $f|_{\overline{\mathbf{V}(H)}} \equiv M$. □

Proposition II.2 (Principe d'unicité). *Soit G un réseau connexe et W une partie stricte et finie de $\mathbf{V}(G)$. Si deux fonctions $f, g: \mathbf{V}(G) \rightarrow \mathbb{R}$ sont telles que f et g sont harmoniques sur W et coïncident sur $\mathbf{V}(G) \setminus W$, alors elles sont égales sur $\mathbf{V}(G)$ tout entier.*

Démonstration. Soit $h = f - g$. Nous allons montrer que $h \leq 0$ et par symétrie, nous aurons $h = 0$.

Il est clair que la fonction h est également harmonique sur W et qu'elle vaut 0 sur $\mathbf{V}(G) \setminus W$. Si il existe un $x \in W$ tel que $h(x) > 0$, alors par finitude de W , h admet un maximum sur $\mathbf{V}(G)$, atteint en un élément y de W . Soit C_y la composante connexe de y dans le réseau $G|_W$. D'après le principe du maximum, h est constante et strictement positive sur $\overline{C_y}$, puis par harmonicité de h sur $C_y \subset W$, h est encore constante sur $\overline{C_y}$.

Puis $\overline{C_y} \neq C_y$, sinon, dans G connexe, on aurait $\mathbf{V}(G) = C_y \subset W$, ce qui est exclus par hypothèse. Ainsi, h est strictement positive sur $\overline{C_y} \setminus C_y \subset \mathbf{V}(G) \setminus W$, ce qui est contradictoire. □

Proposition II.3 (Principe d'existence). *Soit G un réseau et W une partie finie de G . Soit $f_0 : \mathbf{V}(G) \setminus W \rightarrow \mathbb{R}$. Alors il existe une fonction f définie sur $\mathbf{V}(G)$ tout entier, qui prolonge f_0 et est harmonique sur W .*

Démonstration. Supposons d'abord que $\overline{W} = W$, c'est-à-dire que W est une composante connexe de G . Alors, toute fonction constante sur W et égale à f_0 en dehors de W fait l'affaire.

On se restreint donc au cas où $\overline{W} \neq W$. La recherche d'une solution revient à chercher la solution d'un système à n équations et n inconnues, où

$$W = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

$$\begin{cases} f(x_1) = \frac{1}{\pi(x_1)} \sum_{y \neq x_1} c(x_1, y) f(y) \\ f(x_2) = \frac{1}{\pi(x_2)} \sum_{y \neq x_2} c(x_2, y) f(y) \\ \vdots \\ f(x_n) = \frac{1}{\pi(x_n)} \sum_{y \neq x_n} c(x_n, y) f(y) \end{cases}$$

Comme les seules valeurs de f_0 qui interviennent dans ce système sont celles de $\overline{W} \setminus W$, on peut supposer, sans perdre de généralité, que $\overline{W} = \mathbf{V}(G)$. Enfin, quitte à décomposer \overline{W} en composantes connexes, on peut supposer que G est connexe.

Si $f_0|_{\overline{W} \setminus W} \equiv 0$, alors ce système est homogène. D'après le principe d'unicité, il admet une unique solution. On en déduit que le déterminant de ce système est non nul et donc que pour tout $f_0|_{\overline{W} \setminus W}$, le système a une solution (et celle-ci est unique si $\overline{W} \neq W$ et G est connexe). \square

1.2 Espaces de Hilbert associés à un réseau fini

\diamond Dans cette partie, nous supposons que tous les réseaux considérés sont *finis*.

La *résistance* $r : \mathbf{E}(G) \rightarrow]0; \infty[$ est définie par :

$$\forall e \in \mathbf{E}(G), \quad r(e) = \frac{1}{c(e)}.$$

On note $H_V(G)$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbf{V}(G)$ dans \mathbb{R} , muni du produit scalaire :

$$\forall f, g \in H_V(G), \quad \langle f, g \rangle_\pi = \sum_{x \in \mathbf{V}(G)} \pi(x) f(x) g(x).$$

L'espace vectoriel $H_E(G)$ des flots antisymétriques sur G est quant à lui muni du produit scalaire :

$$\forall \theta, \theta' \in H_E(G), \quad \langle \theta, \theta' \rangle_r = \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathbf{E}(G)} r(e) \theta(e) \theta'(e) = \sum_{[e] \in \tilde{\mathbf{E}}(G)} r(e) \theta(e) \theta'(e).$$

On appelle *énergie* d'un flot $\theta \in H_E(G)$ le carré de sa norme :

$$\|\theta\|_r^2 = \frac{1}{2} \sum_{e \in E(G)} r(e) \theta(e)^2.$$

On définit l'opérateur $d : H_V(G) \longrightarrow H_E(G)$, dit opérateur de *cobord*, analogue à un gradient par :

$$\forall f \in H_V(G), \forall e \in E(G), \quad df(e) = c(e) (f(e_-) - f(e_)).$$

L'opérateur $d^* : H_E(G) \longrightarrow H_V(G)$, appelé opérateur de *bord* est quant à lui similaire à un opérateur de divergence :

$$\forall \theta \in H_V(G), \forall x \in V(G), \quad d^*\theta(x) = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{e_- = x} \theta(e_-).$$

Proposition II.4. *Les opérateurs d et d^* sont adjoints l'un de l'autre. De plus, $f \in H_V(G)$ est harmonique en x si et seulement si $d^*df(x) = 0$.*

Démonstration. Ce sont de simples calculs. Pour $f \in H_V(G)$ et $\theta \in H_E(G)$, on a :

$$\begin{aligned} \langle df, \theta \rangle_r &= \frac{1}{2} \sum_{e \in E(G)} c(e) (f(e_-) - f(e_)) r(e) \theta(e) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{e \in E(G)} (f(e_-) - f(e_)) \theta(e) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{e \in E(G)} \theta(e) f(e_-) - \frac{1}{2} \sum_{e \in E(G)} \theta(e) f(e_+) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x \in V(G)} \sum_{e_- = x} \theta(e) f(x) - \frac{1}{2} \sum_{y \in V(G)} \sum_{e_+ = y} \theta(e) f(y) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x \in V(G)} f(x) \pi(x) \frac{1}{\pi(x)} \sum_{e_- = x} \theta(e) - \frac{1}{2} \sum_{y \in V(G)} f(y) \pi(y) \frac{1}{\pi(y)} \sum_{e_- = y} \theta(-e) \\ &= \sum_{x \in V(G)} \pi(x) f(x) \sum_{e_- = x} \theta(e) = \langle f, d^*\theta \rangle_\pi. \end{aligned}$$

Puis, pour tout $x \in V(G)$,

$$\begin{aligned} d^*df(x) &= \frac{1}{\pi(x)} \sum_{e_- = x} df(e) = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{e_- = x} c(e) (f(e_-) - f(e_)) \\ &= \frac{1}{\pi(x)} \sum_{e_- = x} c(e) f(x) - \frac{1}{\pi(x)} \sum_{e_- = x} c(e) f(e_+) \\ &= f(x) - \frac{1}{\pi(x)} \sum_{e_- = x} c(e) f(e_+). \end{aligned} \quad \square$$

Passons enfin aux dernières définitions relatives aux réseaux électriques.

Définition II.2. On dit qu'un flot $\theta \in H_E(G)$:

- * est un *courant* ou *dérive d'un potentiel* ou encore *vérifie la loi d'Ohm*, lorsque $\theta = df$ pour un certain $f \in H_V(G)$;
- * est *conservatif* en x ou encore *vérifie la loi des nœuds de Kirchhoff* en x , lorsque

$$d^*\theta(x) = 0 ;$$

- * *vérifie la loi des cycles de Kirchhoff*, lorsque pour tout cycle d'arêtes (e^1, \dots, e^N) ,

$$\sum_{i=1}^N r(e^i) \theta(e^i) = 0.$$

Proposition II.5. Soit $\theta \in H_E(G)$.

- * Si G est connexe, le flot θ dérive d'un potentiel si et seulement si il vérifie la loi des cycles, et ce potentiel est unique à une constante près.
- * Si $\theta = df$, alors θ vérifie la loi des nœuds en x si et seulement si f est harmonique en x .

Démonstration. Pour le premier point, l'un des sens est facile. Si $\theta = df$, et

$$(e^1, e^2, \dots, e^N)$$

est un cycle d'arêtes, alors, la dernière somme étant télescopique,

$$\sum_{i=1}^N r(e^i) \theta(e^i) = \sum_{i=1}^N (f(e_-^i) - f(e_+^i)) = f(e_-^1) - f(e_+^N) = 0$$

On démontre l'autre implication par récurrence sur le nombre de sommets. Si $n = 1$, les seules arêtes sont des boucles et la loi des cycles impose $\theta \equiv 0$. Toute valeur du potentiel en ce seul sommet fait l'affaire. Si $\text{Card}(V(G)) = n + 1$, choisissons un sommet y tel que

$$G' := G|_{V(G) \setminus \{y\}}$$

soit encore connexe. Sur G' , θ vérifie la loi des cycles, donc par hypothèse de récurrence, il existe un potentiel unique à une constante près $f : V(G') \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\forall e \in E(G'), \quad \theta(e) = df(e).$$

Si y est une feuille, c'est-à-dire a un seul voisin x , il suffit de poser

$$f(y) = f(x) + \frac{1}{\pi(y)} \sum_{e_-=y, e_+=x} \theta(e)$$

Comme θ vérifie la loi des cycles, si e et e' ont pour origine y et but x , on a

$$r(e)\theta(e) = r(e')\theta(e').$$

Ceci permet de vérifier que :

$$\begin{aligned} c(e)(f(y) - f(x)) &= \frac{c(e)}{\pi(y)} \sum_{e'_-=y, e'_+=x} \theta(e') \\ &= \frac{c(e)}{\pi(y)} \sum_{e'_-=y, e'_+=x} \theta(e) \frac{c(e')}{c(e)} = \theta(e). \end{aligned}$$

On remarque en particulier que la quantité $f(x) + r(e)\theta(e)$ ne dépend pas de l'arête e choisie de y vers x .

Si maintenant y a au moins deux voisins distincts x et x' , par connexité de G' , on peut trouver un cycle d'arêtes

$$(e = e^1, e^2, \dots, e^N = -e'),$$

où e et e' sont des arêtes d'origine y et de but respectivement x et x' . Appliquons la loi des cycles :

$$0 = \sum_{i=1}^N r(e^i)\theta(e^i) = r(e)\theta(e) - r(e')\theta(e') + f(x) - f(x')$$

Le réel $f(x) + r(e)\theta(e)$ ne dépend ni du voisin x de y choisi, ni de l'arête e allant de y vers x . On peut donc poser

$$f(y) = f(x) + r(e)\theta(e)$$

La vérification de $\theta = df$ est alors immédiate. Enfin, Le deuxième point de la proposition n'est qu'une simple utilisation des propriétés d'adjonction de d et d^* et de la proposition précédente. \square

Nous supposons maintenant, et jusqu'à la fin de cette sous-partie, que le graphe G est connexe. Soit $e \in E(G)$. On définit un flot *élémentaire* χ^e par :

$$\forall e' \in E(G), \quad \chi^e(e') = \begin{cases} 1 & \text{si } e' = e \\ -1 & \text{si } e' = -e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $x \in V(G)$, on définit le flot *étoile* en x , noté σ_x par

$$\sigma_x = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{e_-=x} c(e)\chi^e.$$

En particulier que pour tout sommet x ,

$$\langle \sigma_x, \theta \rangle = d^* \theta(x).$$

Soit

$$\gamma = (e^1, \dots, e^N)$$

un cycle d'arêtes. On associe à γ le flot *cycle* τ_γ par

$$\tau_\gamma = \sum_{i=1}^N \chi^{e^i}.$$

Un flot θ vérifie la loi des cycles si et seulement si pour tout cycle d'arêtes γ ,

$$\langle \tau_\gamma, \theta \rangle = 0.$$

On note $\star_E(G)$ le sous-espace de $H_E(G)$ engendré par les étoiles et $\diamond_E(G)$, le sous-espace engendré par les flots cycles.

Proposition II.6. *Avec les notations de la discussion ci-dessus, on a :*

1. $\diamond_E(G) = (\text{Im } d)^\perp = \ker d^*$;
2. $\star_E(G) = (\ker d^*)^\perp = \text{Im } d$;
3. $H_E(G) = \star_E(G) \oplus_\perp \diamond_E(G)$.

Démonstration. Tout cela découle assez facilement du travail fait précédemment. En effet, un flot θ est un courant si et seulement si il appartient à l'image de d . D'après la proposition précédente, cela équivaut à vérifier la loi des cycles donc à être orthogonal à $\diamond_E(G)$. On a donc $(\diamond_E(G))^\perp = \text{Im } d$. On obtient la première affirmation en passant à l'orthogonal et en utilisant l'adjonction de d et d^* .

Puis l'on remarque que $\theta \in \ker d^*$ si et seulement si pour tout sommet x , $\langle \sigma_x, \theta \rangle = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\theta \in (\star_E(G))^\perp$, ce qui entraîne la deuxième affirmation.

Enfin, La dernière affirmation découle immédiatement des deux premières. \square

Théorème II.7 (Principe de Thomson). *Soit $\theta \in H_E(G)$. Alors il existe un unique courant i tel que*

$$d^* i = d^* \theta.$$

De plus, si $\theta \neq i$, alors $\|\theta\|_r^2 > \|i\|_r^2$.

Démonstration. Un tel courant i est le projeté orthogonal de θ sur $\star_E(G)$, ce qui en assure l'existence et l'unicité. De plus, par Pythagore,

$$\|\theta\|_r^2 = \|i\|_r^2 + \|\theta - i\|_r^2,$$

ce qui entraîne la deuxième partie de ce théorème. \square

Remarque II.1. L'on peut se demander si, étant donnée une fonction $f : \mathbf{V}(G) \rightarrow \mathbb{R}$, il existe un flot θ tel que $d^*\theta = f$ (auquel cas d'après le principe de Thomson, il existera un unique courant i tel que $d^*i = f$). Si un tel flot θ existe, on doit avoir

$$\langle f, 1 \rangle_\pi = \langle d^*\theta, 1 \rangle_\pi = \langle \theta, d1 \rangle_r = 0.$$

La fonction f doit être orthogonale aux constantes, autrement dit on doit avoir

$$\sum_{x \in \mathbf{V}(G)} \pi(x) f(x).$$

Cette condition est également suffisante : d'après la proposition II.5, les constantes forment le noyau de d donc l'orthogonal de l'image de d^* .

1.3 Courants entre deux sommets

Rappelons qu'on dit qu'un flot θ est un flot entre un sommet s et un sommet t lorsque pour tout sommet x distinct de s et de t , θ vérifie la loi des nœuds en x , (i.e. $d^*\theta(x) = 0$) et que

$$\text{Force}(\theta) \mathbf{1} = \sum_{e_- = s} \theta(e) = \pi(s) d^*\theta(s).$$

Remarquons au passage que

$$\pi(s) d^*\theta(s) + \pi(t) d^*\theta(t) = \langle d^*\theta, 1 \rangle_\pi = \langle \theta, d1 \rangle_r = 0$$

donc que

$$\sum_{e_- = t} \theta(e) = - \sum_{e_- = s} \theta(e).$$

D'après la remarque II.1, de tels flots existent, quelle que soit la force que l'on se fixe. Notons $H_E(G; s, t)$ l'ensemble de ces flots. Comme la fonction Force est linéaire sur cet espace, elle admet une certaine norme d'opérateur $\|\text{Force}\|_{\mathcal{L}(H_E(G; s, t))}$.

Définition II.3. Soient s et t deux sommets de G . La *conductance effective* entre s et t , notée $C(s, t)$ est définie par

$$C(s, t) = \|\text{Force}\|_{\mathcal{L}(H_E(G; s, t))}^2.$$

La *résistance effective* entre s et t , notée $R(s, t)$ est définie par

$$R(s, t) = \frac{1}{C(s, t)}.$$

Le résistance et la conductance effective joueront un rôle majeur dans l'étude des marches aléatoires. Le théorème suivant fait le bilan des résultats obtenus.

1. Le contexte étant très clair ici, nous abandonnons provisoirement les \sim .

Théorème II.8. *Soient s et t deux sommets de G , réseau fini et connexe. Il existe un unique courant i entre s et t de force donnée et celui-ci est le seul à avoir une énergie minimale parmi les flots entre s et t de même force. C'est également le seul flot à vérifier les égalités :*

$$\|i\|^2 = R(s, t) (\text{Force}(i))^2 \quad \text{et} \quad (\text{Force}(i))^2 = C(s, t) \|i\|^2.$$

Le courant est aussi le seul de ces flots qui vérifie la loi des cycles. Il dérive d'un potentiel v unique à une constante additive près, harmonique sur $V(G) \setminus \{s, t\}$ et pour lequel on a :

$$v(s) - v(t) = \text{Force}(i) R(s, t).$$

Démonstration. Tout a déjà été mis en place précédemment. Nous démontrons simplement la dernière égalité :

$$\|i\|^2 = \langle i, i \rangle = \langle i, dv \rangle = \langle d^*i, v \rangle = \text{Force}(i)v(s) - \text{Force}(i)v(t),$$

ce qui, combiné avec les égalités précédentes, donne le résultat voulu. \square

Enfin, nous terminons ce chapitre par des résultats utiles (et bien connus !) pour calculer en pratique les résistances et conductances effectives.

Proposition II.9. *Soient s et t deux sommets de G .*

Loi des conductances en parallèles *Si il existe deux sous-réseaux G_1 et G_2 de G tel que tout chemin entre s et t soit inclus soit dans G_1 , soit dans G_2 , alors*

$$C_G(s, t) = C_{G_1}(s, t) + C_{G_2}(s, t).$$

Loi des résistances en séries *Si il existe un sommet u entre s et t tel que tout chemin entre s et t passe par u , alors*

$$R(s, t) = R(s, u) + R(u, t).$$

Démonstration. Pour démontrer la première loi, considérons le courant i dans G unitaire entre s et t et v le potentiel associé avec $v(t) = 0$. Par restriction, i_G induit des courants i_1 et i_2 entre s et t dans G_1 et G_2 . Le potentiel associé à ces courants est encore v , par unicité du potentiel à constante additive près. Ainsi,

$$1 = \text{Force}(i) = \text{Force}(i_1) + \text{Force}(i_2) = C_{G_1}(s, t)v(s) + C_{G_2}(s, t)v(s).$$

Il suffit pour conclure de rappeler que

$$v(s) = R_G(s, t) = \frac{1}{C_G(s, t)}.$$

Passons à la loi des résistances en série. Soit encore i le courant unitaire entre s et t et v un potentiel associé. Alors i induit aussi le courant unitaire entre s et u , de sorte que $v(s) - v(u) = R(s, u)$. De la même manière, $v(u) - v(t) = R(u, t)$ et enfin

$$R(s, t) = v(s) - v(t) = v(s) - v(u) + v(u) - v(t) = R(s, u) + R(u, t). \quad \square$$

2 Interprétations probabilistes

Dans cette partie, nous établissons les liens entre réseaux électriques finis et chaînes de Markov réversibles à espace d'états fini. Hormis quelques définitions et notations, nous ne ferons pas de rappels sur les chaînes de Markov. Pour se rafraîchir la mémoire, on pourra consulter par exemple le chapitre 13 du polycopié de cours [LG06] de Jean-François Le Gall ou le chapitre 4 de [BMP00].

2.1 Chaînes de Markov irréductibles réversibles

Considérons une chaîne de Markov canonique d'espace d'états dénombrable S et de matrice stochastique $Q = (Q(x, y))_{(x, y) \in S^2}$.

L'univers est noté $\Omega := S^{\mathbb{N}}$ et la famille de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par

$$X_n(\omega) = \omega_n.$$

L'univers Ω est muni de sa tribu cylindrique

$$\mathcal{T} = \mathcal{P}(S)^{\otimes \mathbb{N}} = \sigma(X_k : k \in \mathbb{N}).$$

Pour un état initial $s \in S$, on définit la probabilité \mathbb{P}_s sur Ω par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x_0, x_1, \dots, x_k \in S, \\ \mathbb{P}_s(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = \delta_s(x_0)Q(s, x_1)Q(x_1, x_2) \dots Q(x_{k-1}, x_k)$$

et le théorème d'extension de Kolmogorov. On note \mathbb{E}_s l'espérance associée.

Les opérateurs de translations sont notés $\Theta_1, \Theta_2, \dots$ et sont définis par

$$\Theta_k(\omega) = (\omega_{n+k})_{n \in \mathbb{N}}, \text{ où } \omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega.$$

Pour un état $s \in S$, on note

$$\tau_s = \inf \{n \geq 0 \mid X_n = s\} \quad \text{et} \quad \sigma_s = \inf \{n \geq 1 \mid X_n = s\}$$

les temps d'atteinte et de retour en s . Pour deux états s et t , on dit que s et t *communiquent* lorsqu'il existe $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que

$$\mathbb{P}_s(X_k = t) > 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_t(X_{k'} = s) > 0.$$

On note alors $s \leftrightarrow t$. Lorsque tous les états communiquent entre eux, la chaîne de Markov est dite *irréductible*. Enfin la chaîne est dite *localement finie* lorsque, pour tout état x ,

$$\text{Card} \{y \mid Q(x, y) > 0\} < \infty.$$

Rappelons qu'une mesure positive μ sur S est dite *stationnaire* lorsque

$$\forall x \in S, \quad (\mu Q)(x) := \sum_{y \in S} \mu(y)Q(y, x) = \mu(x)$$

et qu'une mesure π est dite *réversible* lorsque

$$\forall x, y \in S, \quad \pi(x)Q(x, y) = \pi(y)Q(y, x).$$

Lorsqu'une telle mesure existe sur S , la chaîne de Markov (S, Q) est elle-même dite *réversible*.

Dans la suite de cette partie, nous ne nous intéresserons qu'aux chaînes de Markov réversibles, irréductibles et localement finies.

Proposition II.10. *Soit une chaîne de Markov (S, Q) irréductible.*

1. *Si une mesure μ est stationnaire et non identiquement nulle, alors*

$$\forall x \in S, \quad \mu(x) > 0.$$

2. *Toute mesure π réversible est stationnaire.*

3. *Une mesure π est réversible si et seulement si, pour tous $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$,*

$$\pi(x_1)Q(x_1, x_2) \dots Q(x_{n-1}, x_n) = \pi(x_n)Q(x_n, x_{n-1}) \dots Q(x_2, x_1).$$

4. *Il existe une mesure réversible non nulle si et seulement si, pour tout cycle d'états $(x = x_1, x_2, \dots, x_n = x)$,*

$$Q(x, x_2)Q(x_2, x_3) \dots Q(x_{n-1}, x) = Q(x, x_{n-1})Q(x_{n-1}, x_{n-2}) \dots Q(x_2, x).$$

Démonstration. 1. Soit μ une mesure stationnaire et non nulle. Il est facile de vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu Q^n = \mu$. Soit $y \in S$ tel que $\mu(y) > 0$ et soit $x \in S$. Par irréductibilité de (S, Q) , il existe un entier naturel n tel que $Q^n(y, x) > 0$ et alors,

$$\mu(x) = \sum_{z \in S} \mu(z)Q^n(z, x) \geq \mu(y)Q^n(y, x) > 0.$$

2. Pour tout état x ,

$$(\pi Q)(x) = \sum_{y \in S} \pi(y)Q(y, x) = \sum_{y \in S} \pi(x)Q(x, y) = \pi(x) \sum_{y \in S} Q(x, y) = \pi(x).$$

3. Il suffit d'utiliser la définition et de faire une simple récurrence.

4. L'un des sens découle directement de la propriété précédente (prendre $x_1 = x_n$). Pour démontrer l'autre sens, nous allons construire une mesure réversible π . On note $\vec{\gamma} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un chemin d'états, $-\vec{\gamma} = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_1)$ le chemin suivi dans l'autre sens et

$$Q(\vec{\gamma}) := Q(x_1, x_2) \dots Q(x_{n-1}, x_n).$$

Soient deux états x et y et $\vec{\gamma}$ un chemin d'états entre x et y tel que $Q(\vec{\gamma}) > 0$. Soit z un troisième état. Il existe un chemin $\vec{\gamma}_1$ de y à z et un chemin $\vec{\gamma}_2$ de z à x tels que $Q(\vec{\gamma}_1) > 0$ et $Q(\vec{\gamma}_2) > 0$. Alors,

$$0 < Q(\vec{\gamma})Q(\vec{\gamma}_1)Q(\vec{\gamma}_2) = Q(-\vec{\gamma}_2)Q(-\vec{\gamma}_1)Q(-\vec{\gamma}).$$

En particulier, on a montré que si $Q(\vec{\gamma}) > 0$, alors $Q(-\vec{\gamma}) > 0$.

Soit x un état. Choisissons un réel $\pi(x) > 0$ arbitraire. Soit y un autre état. Par irréductibilité, il existe un chemin $\vec{\gamma}$ de x vers y tel que $Q(\vec{\gamma}) > 0$. On pose alors

$$\pi(y) = \frac{\pi(x) Q(\vec{\gamma})}{Q(-\vec{\gamma})}.$$

Cette définition ne dépend pas du chemin $\vec{\gamma}$ choisi. En effet, si $\vec{\gamma}'$ est un autre de ces chemins, alors en suivant les chemins $\vec{\gamma}$ puis $-\vec{\gamma}'$ on obtient un cycle partant de x , ce qui donne

$$Q(\vec{\gamma}) Q(-\vec{\gamma}') = Q(\vec{\gamma}') Q(-\vec{\gamma}).$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que π est bien réversible. Soient y_1 et y_2 deux états, $\vec{\gamma}_1$ un chemin de x vers y_1 et $\vec{\gamma}_2$ un chemin de x vers y_2 . En suivant $\vec{\gamma}_1$ puis en allant de y_1 à y_2 et en suivant $-\vec{\gamma}_2$, on obtient un cycle partant de x . Ainsi,

$$\begin{aligned} Q(\vec{\gamma}_1) Q(y_1, y_2) Q(-\vec{\gamma}_2) &= Q(\vec{\gamma}_2) Q(y_2, y_1) Q(-\vec{\gamma}_1) \\ \frac{Q(\vec{\gamma}_1)}{Q(-\vec{\gamma}_1)} Q(y_1, y_2) &= \frac{Q(\vec{\gamma}_2)}{Q(-\vec{\gamma}_2)} Q(y_2, y_1) \\ \frac{\pi(y_1)}{\pi(x)} Q(y_1, y_2) &= \frac{\pi(y_2)}{\pi(x)} Q(y_2, y_1). \quad \square \end{aligned}$$

De la chaîne de Markov au réseau

Étant donnée une chaîne de Markov irréductible, réversible et localement finie (S, Q) , de mesure réversible $\pi(x)$, nous définissons un réseau G de la façon suivante :

- * $\mathbf{V}(G) = S$;
- * $\mathbf{E}(G) = \{(x, y) \in S^2 \mid Q(x, y) > 0\}$;
- * pour $(x, y) \in \mathbf{E}(G)$, $\mathbf{Origine}((x, y)) = x$ et $\mathbf{But}((x, y)) = y$;
- * $\mathbf{c}(x, y) = \pi(x) Q(x, y)$.

Il est alors facile de vérifier que le réseau G ainsi défini est connexe, localement fini et non orienté. De plus, pour tout $x \in \mathbf{V}(G)$, on a

$$\pi(x) = \sum_{e_- = x} \mathbf{c}(e) = \sum_{y = x} \mathbf{c}(x, y).$$

Marche aléatoire réversible sur les sommets d'un réseau

Inversement, donnons-nous un réseau G connexe, non orienté, dénombrable et localement fini. Posons, pour x et y deux sommets,

$$\pi(x) = \sum_{e_- = x} \mathbf{c}(e) \quad \text{et} \quad Q(x, y) = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{e_- = x, e_+ = y} \mathbf{c}(e)$$

Ceci permet de définir une chaîne de Markov (S, Q) , où $S = \mathbf{V}(G)$, irréductible, localement finie et réversible, où la mesure réversible est π . Cette chaîne est appelée la *marche aléatoire réversible sur les sommets de G* , les probabilités de transition étant données par les poids \mathbf{c} sur les arêtes de G .

On dit que le réseau G est *transient* (resp. *récurrent*, *récurrent nul*, *récurrent positif*) lorsque la marche aléatoire sur les sommets de G est *transiente* (resp. *récurrente*, *récurrente nulle*, *récurrente positive*).

Marche aléatoire sur les arêtes d'un réseau

On peut légèrement raffiner le modèle précédent. On définit une chaîne de Markov (S_E, Q_E) en posant $S_E = \mathbf{E}(G)$ et

$$Q_E(e, e') = \begin{cases} \frac{1}{\pi(e_+)} \mathbf{c}(e') & \text{si } e_+ = e'_- \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si l'on note $(E^n)_{n \in \mathbb{N}}$ les arêtes successives explorées par cette marche aléatoire sur les arêtes de G , on retrouve la marche aléatoire sur les sommets en posant $X_n = E_n^-$. Inversement, si l'on se donne une marche aléatoire $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur les sommets, on peut définir des variables aléatoires $(E^n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbf{E}(G)$ en posant

$$\mathbb{P}(E^n = e \mid X_n) = \frac{1}{\pi(X_n)} \mathbf{c}(e) \mathbf{1}_{\{e_- = X_n\}}.$$

De cette manière, si E^0 et E'^0 ont la même loi, il en est de même de (E^n) et (E'^n) . Ainsi, les marches aléatoires sur les sommets et sur les arêtes sont très proches les unes des autres.

Un critère de récurrence positive

Rappelons que si une chaîne de Markov irréductible est récurrente alors elle admet des mesures stationnaires, toutes proportionnelles entre elles, et qu'elle est dite récurrente positive lorsque toutes ces mesures stationnaires μ sont *finies* (i.e. $\mu(S) < \infty$).

Dans notre cas, nous disposons déjà d'une mesure stationnaire : la mesure réversible π . Aussi, la marche aléatoire sur les sommets de G est récurrente positive si et seulement si

$$\pi(G) = \sum_{x \in \mathbf{V}(G)} \pi(x) = \sum_{x \in \mathbf{V}(G)} \sum_{e_- = x} \mathbf{c}(e) = \sum_{e \in \mathbf{E}(G)} \mathbf{c}(e) < \infty.$$

En résumé,

Théorème II.11. *La marche aléatoire sur les sommets de G , réseau non orienté, connexe, dénombrable, localement fini est récurrente positive si et seulement si*

$$\sum_{e \in \mathbf{E}(G)} \mathbf{c}(e) < \infty.$$

2.2 Réseaux électriques finis et probabilités

⚡ Tous les réseaux considérés dans cette sous-partie sont finis, connexes et non orientés. On conserve les notations de la sous-partie précédente.

Conductance, temps d'atteinte de la source et du puits

Fixons nous un réseau G et deux sommets distincts s et t de G . Partant d'un sommet x , nous nous intéressons à la probabilité d'atteindre s avant d'atteindre t . Nous définissons une fonction notée F sur $V(G)$ par

$$F(x) = \mathbb{P}_x(\tau_s < \tau_t).$$

Il est clair que $F(s) = 1$ et $F(t) = 0$. Puis, si $x \notin \{s, t\}$,

$$\mathbf{1}_{\{\tau_s < \tau_t\}} \circ \Theta_1 = \mathbf{1}_{\{\tau_s < \tau_t\}}, \quad \mathbb{P}_x\text{-presque sûrement.}$$

On peut donc appliquer la propriété de Markov faible au temps 1 :

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathbb{E}_x \left[\mathbf{1}_{\{\tau_s < \tau_t\}} \right] = \sum_{y \in S} \mathbb{E}_x \left[\mathbf{1}_{\{\tau_s < \tau_t\}} \mathbf{1}_{\{X_1=y\}} \right] \\ &= \sum_{y \in S} \mathbb{E}_x \left[\mathbf{1}_{\{\tau_s < \tau_t\}} \circ \Theta_1 \mathbf{1}_{\{X_1=y\}} \right] = \sum_{y \in S} \mathbb{E}_x \left[\mathbb{E}_{X_1} \left[\mathbf{1}_{\{\tau_s < \tau_t\}} \right] \mathbf{1}_{\{X_1=y\}} \right] \\ &= \sum_{y \in S} \mathbb{E}_x \left[\mathbf{1}_{\{X_1=y\}} \right] \mathbb{E}_y \left[\mathbf{1}_{\{\tau_s < \tau_t\}} \right] = \sum_{y \in S} Q(x, y) F(y) \\ &= \frac{1}{\pi(x)} \sum_{y \in S} c(x, y) F(y). \end{aligned}$$

Ainsi, F est harmonique sur $V(G) \setminus \{s, t\}$. Soit $I = dF$ le courant associé. D'après le théorème II.8, on a :

$$1 = F(s) - F(t) = R(s, t) \text{ Force}(I).$$

Nous désirons calculer la probabilité, partant de s , d'atteindre t avant de revenir en s . Comme

$$\mathbf{1}_{\{\tau_t < \sigma_s\}} \circ \Theta_1 = \mathbf{1}_{\{\tau_t < \tau_s\}}, \quad \mathbb{P}_s\text{-presque sûrement}$$

la propriété de Markov faible au temps 1 donne :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_s(\tau_t < \sigma_s) &= \sum_{x \in S} Q(s, x) \mathbb{P}_x(\tau_t < \tau_s) \\
&= \frac{1}{\pi(s)} \sum_{x \in S} \mathbf{c}(s, x) (1 - F(x)) \\
&= \frac{1}{\pi(s)} \sum_{x \in S} \mathbf{c}(s, x) (F(s) - F(x)) \\
&= \frac{1}{\pi(s)} \sum_{e_- = s} I(e) \\
&= \frac{1}{\pi(s)} \text{Force}(I) = \frac{\mathbf{C}(s, t)}{\pi(s)}.
\end{aligned}$$

Nous avons démontré, entre autres :

Proposition II.12. *Soit G un réseau (fini, connexe, non orienté) sur lequel on fait une marche aléatoire sur les sommets. Soient s et t deux sommets distincts de G , alors*

$$\mathbf{C}(s, t) = \pi(s) \mathbb{P}_s(\tau_t < \sigma_s). \quad (\text{II.1})$$

Considérons maintenant la variable aléatoire $N_{s,t}$ égale au nombre de visites de la marche aléatoire en s avant d'atteindre t . On définit la suite de temps d'arrêts $(\tau_s^{(k)})_{k \geq 1}$ par :

$$\tau_s^{(1)} = \tau_s \quad \text{puis} \quad \tau_s^{(n+1)} = \inf \{n \geq \tau_s^{(n)} \mid X_n = s\}.$$

Remarquons que

$$\mathbf{1}_{\{\tau_s^{(n)} < \tau_t\}} \mathbf{1}_{\{\sigma_s < \tau_t\}} \circ \Theta_{\tau_s^{(n)}} = \mathbf{1}_{\{\tau_s^{(n)} < \tau_t\}} \mathbf{1}_{\{\tau_s^{(n+1)} < \tau_t\}},$$

ce qui va nous permettre d'utiliser la propriété de Markov forte au temps $\tau_s^{(n)}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_s(\tau_s^{(n+1)} < \tau_t) &= \mathbb{E}_s \left(\mathbf{1}_{\{\tau_s^{(n)} < \tau_t\}} \mathbf{1}_{\{\tau_s^{(n+1)} < \tau_t\}} \right) \\
&= \mathbb{E}_s \left(\mathbf{1}_{\{\tau_s^{(n)} < \tau_t\}} \mathbf{1}_{\{\sigma_s < \tau_t\}} \circ \Theta_{\tau_s^{(n)}} \right) \\
&= \mathbb{E}_s \left(\mathbb{E}_s(\mathbf{1}_{\{\sigma_s < \tau_t\}}) \mathbf{1}_{\{\tau_s^{(n)} < \tau_t\}} \right) \\
&= \mathbb{P}_s(\sigma_s < \tau_t) \mathbb{P}_s(\tau_s^{(n)} < \tau_t) \\
&= \left(1 - \frac{\mathbf{C}(s, t)}{\pi(s)} \right) \mathbb{P}_s(\tau_s^{(n)} < \tau_t).
\end{aligned}$$

On en déduit que la variable aléatoire $N_{s,t}$ suit une loi géométrique :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}_s(N_{s,t} = k) = \frac{C(s,t)}{\pi(s)} \left(1 - \frac{C(s,t)}{\pi(s)}\right)^{k-1}.$$

En particulier,

$$\mathbb{E}_s(N_{s,t}) = \frac{\pi(s)}{C(s,t)} = \pi(s) R(s,t).$$

Potentiel sous un courant unitaire et fonction de Green

On considère la fonction de Green g_t définie par :

$$g_t(s, x) = \mathbb{E}_s(N_{x,t}).$$

C'est le nombre moyen de passages en x , pour une marche aléatoire commencée en s et stoppée en t . On introduit le potentiel $v = \frac{F}{\text{Force}(I)}$ et $i = \frac{I}{\text{Force}(I)}$, de sorte que le courant i associé à v est maintenant unitaire (c'est-à-dire sa force vaut 1). Nous allons démontrer la proposition suivante :

Proposition II.13. *Pour tous les états s et t , on a $g_t(s, x) = \pi(x)v(x)$.*

Mais avant cela, nous devons justifier le lemme suivant :

Lemme II.14. *Pour tous les sommets x et s , on a :*

$$\pi(s)g_t(s, x) = \pi(x)g_t(x, s).$$

Démonstration du lemme. Ce lemme repose sur l'utilisation de la réversibilité.

$$\begin{aligned} \pi(s)g_t(s, x) &= \pi(s) \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}_s \left(\mathbf{1}_{\{X_n=x, \tau_t \geq n+1\}} \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \neq t} \pi(s) Q(s, x_1) Q(x_1, x_2) \dots Q(x_{n-1}, x) \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \neq t} \pi(x) Q(x, x_{n-1}) Q(x_{n-1}, x_{n-2}) \dots Q(x_1, s) \\ &= \pi(x) g_t(x, s). \end{aligned} \quad \square$$

Démonstration de la proposition. Posons

$$f(x) = \frac{g_t(s, x)}{\pi(x)}.$$

On sait déjà que $f(t) = 0$ et $f(s) = R(s, t)$.

Par ailleurs, $v(t) = 0$ et

$$v(s) = \frac{1}{\text{Force}(I)} = R(s, t).$$

Pour terminer la démonstration, il suffit de démontrer que la fonction f est harmonique sur $V(G) \setminus \{s, t\}$. Comme

$$f(x) = \frac{g_t(s, x)}{\pi(x)} = \frac{g_t(x, s)}{\pi(s)},$$

il suffit de montrer que la fonction $x \mapsto g_t(x, s)$ est harmonique sur $V(G) \setminus \{s, t\}$. Comme $x \notin \{s, t\}$, on peut appliquer la propriété de Markov faible au temps $n = 1$:

$$\mathbb{E}_x(N_{s,t}) = \sum_{y \in S} Q(x, y) \mathbb{E}_y(N_{s,t}) = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{y \in S} c(x, y) g_t(y, s). \quad \square$$

Courant unitaire et nombre de traversées

Nous conservons les notations précédentes : i est un courant unitaire allant de s vers t . On lance une marche aléatoire sur les arêtes (E^n) en choisissant au départ une arête issue de s , puis en procédant comme indiqué dans la partie précédente. Avec un léger abus de notation, la loi de (E^n) est encore notée \mathbb{P}_s et l'on a

$$\mathbb{P}_s(E^0 = e) = \frac{1}{\pi(s)} \mathbf{1}_{\{e_- = s\}} c(e).$$

On associe à (E^n) la marche sur les sommets ($X_n = E^n_-$), laquelle a encore pour loi \mathbb{P}_s . On note encore τ_t le temps d'atteinte de t pour la marche aléatoire sur les sommets (X_n) et on s'intéresse à la variable aléatoire $S_{e,t}$ égale au nombre de passages de (E^n) en e avant que (X_n) n'atteigne t .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_s(S_{e,t}) &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}_s(\mathbf{1}_{\{X_n = e_-, E^n = e, \tau_t \geq n+1\}}) \\ &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_s(E^n = e \mid X_n = e_-, \tau_t \geq n+1) \mathbb{P}_s(X_n = e_-, \tau_t \geq n+1). \end{aligned}$$

Puis, par la propriété de Markov faible, on obtient :

$$\begin{aligned} &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_s(E^n = e \mid X_n = e_-) \mathbb{P}_s(X_n = e_-, \tau_t \geq n+1) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\pi(e_-)} c(e) \mathbb{P}_s(X_n = e_-, \tau_t \geq n+1) \\ &= \frac{1}{\pi(e_-)} c(e) g_t(s, e_-) = c(e) v(e_-). \end{aligned}$$

Finalement, la différence moyenne entre le nombre de passages en e et le nombre de passages en $-e$ n'est autre que le courant parcourant e :

$$\mathbb{E}_s(S_{e,t} - S_{-e,t}) = c(e) (v(e_-) - v(e_+)) = i(e).$$

3 Cas des réseaux infinis

Dans cette partie plus modeste, nous commençons par étendre les résultats des deux parties précédentes aux réseaux infinis. Ensuite, nous établirons un lien crucial entre l'existence de courants et l'existence de flots admissibles non nuls. Comme dans le premier chapitre, le passage du fini à l'infini se fait en considérant des suites croissantes de sous-graphes finis.

Proposition II.15. *Soit G un réseau infini (dénombrable, localement fini) connexe. Soit s un sommet de G et soit (V_n) une suite croissante de partie de G telle que*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n = \mathbb{V}(G).$$

Soit $Z_n = \mathbb{V}(G) \setminus V_n$ et $G_n = G/Z_n$, où z_n est le sommet ajouté à $\mathbb{V}(G_n)$ pour construire ce graphe quotient. Alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{C}_{G_n}(s, z_n) = \pi(s) \mathbb{P}_s(\sigma_s = \infty).$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que s et tous ses voisins sont dans tous les V_n . Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\tau_{Z_n} = \inf \{n \geq 0 \mid X_k \in Z_n\}$. D'après la proposition II.12, on a

$$\mathbb{C}_{G_n}(s, z_n) = \pi(s) \mathbb{P}_s(\tau_{z_n} < \sigma_s) = \pi(s) \mathbb{P}_s(\tau_{Z_n} < \sigma_s).$$

La suite d'événements $\{\tau_{Z_n} < \sigma_s\}$ est décroissante, donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_s(\tau_{Z_n} < \sigma_s) = \mathbb{P}_s\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{\tau_{Z_n} < \sigma_s\}\right).$$

Il est assez intuitif que les temps d'arrêt τ_{Z_n} sont tous presque sûrement finis. Supposons que cela n'est pas le cas. Alors, avec une probabilité non nulle, la marche aléatoire reste dans V_n . Comme V_n est fini, cela implique que la marche retourne infiniment souvent en un même point avec probabilité non nulle, donc est récurrente. Or, on a également, pour un sommet $y \notin V_n$, $\mathbb{P}_s(\tau_y < \infty) < 1$, ce qui est contradictoire. Par conséquent,

$$\{\sigma_s = \infty\} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{\tau_{Z_n} < \sigma_s\}.$$

Pour montrer l'autre implication, nous utilisons la distance de graphe (voir la définition I.15) et remarquons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_G(s, Z_n) = \infty.$$

En effet, la suite $(d_G(s, Z_n))$ est croissante. Si elle converge vers un entier N , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un sommet z dans Z_n et dans la boule $B_G(s, N)$. Or celle-ci ne contient qu'un nombre fini de sommets, donc est incluse dans un $V_{N'}$ pour N' assez grand, ce qui est absurde.

Vu la définition de la marche aléatoire, on a $\tau_{Z_n} \geq d_G(s, Z_n)$, donc presque sûrement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_{Z_n} = \infty \quad \text{puis} \quad \{\sigma_s = \infty\} \supset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{\tau_{Z_n} < \sigma_s\}. \quad \square$$

Remarquons qu'en particulier,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{G_n}(s, z_n)$$

existe et ne dépend pas de la suite (V_n) choisie.

Définition II.4. On appelle *conductance effective de s vers l'infini* la valeur de cette limite, et on note

$$C(s, \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_{G_n}(s, z_n).$$

Comme toujours, la résistance effective $R(s, \infty)$ est l'inverse de la conductance effective.

Tout ceci nous permet d'obtenir notre premier critère important de transience :

Théorème II.16. *Soit G un réseau infini et connexe. Alors G est transient si et seulement si la conductance de l'un de ses sommets (et de façon équivalente, de tous ses sommets) vers l'infini est non nulle.*

On note encore $H_E(G)$ l'espace de Hilbert des flots antisymétriques θ muni de la norme

$$\|\theta\|_r^2 = \frac{1}{2} \sum_{e \in E(G)} r(e) (\theta(e))^2$$

et $H_E(G, s, \infty)$ son sous-espace constitué des flots qui vérifient la loi des nœuds en tout sommet sauf en s .

Théorème II.17. *Soit G un réseau infini connexe. Alors G est transient si et seulement si $H_E(G, s, \infty)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, ce qui équivaut aussi à l'existence de courants non nuls entre s et l'infini.*

Démonstration. Nous gardons les mêmes notations que précédemment. Soit i_n le courant unitaire de s vers z_n dans G_n . Soit v_n le potentiel associé avec $v_n(z_n) = 0$. Avec un petit abus de notation, on note encore i_n le flot associé sur G et v_n la fonction sur $V(G)$ égale à v_n sur V_n et nulle sur $Z_n = V(G) \setminus V_n$. Rappelons que l'énergie de i_n , courant unitaire est

$$\|i_n\|_r^2 = R_{G_n}(s, z_n).$$

Pour $x \in V(G)$, notons comme dans le paragraphe sur la fonction de Green,

$$N_{x,Z_n} = \sum_{k \geq 0} \mathbf{1}_{\{X_k=x, \tau_{Z_n} \geq k+1\}} \quad \text{et} \quad N_x = \sum_{k \geq 0} \mathbf{1}_{\{X_k=x\}}.$$

En outre, pour n assez grand, en utilisant la proposition II.13 dans le réseau G_n , on obtient

$$\pi(x)v_n(x) = \mathbb{E}_s(N_{x,Z_n}).$$

Soit $v(x) = \frac{1}{\pi(x)}\mathbb{E}_s(N_x)$. Alors par convergence monotone,

$$v(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x).$$

Si G est transient, alors pour tout sommet x , $\mathbb{E}_s(N_x) < \infty$, donc la suite (v_n) converge ponctuellement. Mais alors, la suite (i_n) converge aussi ponctuellement. En effet, pour toute somme $e \in E(G)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} i_n(e) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{c}(e)(v_n(e_-) - v_n(e_+)) = \mathbf{c}(e)(v(e_-) - v(e_+)) =: i(e).$$

Il est clair que i est encore antisymétrique. Puis, pour chaque sommet x , comme la somme considérée est finie :

$$d^*i_n(x) = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{e_- = x} i_n(e) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi(x)} \sum_{e_- = x} i(e) = d^*i(x).$$

En particulier, i est bien un flot antisymétrique unitaire de s vers l'infini. Il ne reste qu'à vérifier que l'énergie de i est finie. On utilise le lemme de Fatou et le fait que la résistance effective de s à l'infini est finie si G est transient.

$$\|i\|_r^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|i_n\|_r^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} R_{G_n}(s, z_n) = R(s, \infty) < \infty.$$

Pour démontrer l'autre implication, supposons qu'il existe un flot unitaire $\theta \in H_E(G, s, \infty)$. Soit θ_n le flot défini sur G_n par $\theta_n = \theta|_{E(G_n)}$. Alors $\theta_n \in H_E(G_n, s, z_n)$ et par le principe de Thomson,

$$R_{G_n}(s, z_n) = \|i_n\|_r^2 \leq \|\theta_n\|_r^2 \leq \|\theta\|^2 < \infty.$$

Par conséquent, $R(s, \infty) < \infty$ et G est transient. \square

Ceci nous permet d'étendre toutes les formules des réseaux électriques aux réseaux transients.

Proposition II.18. *Soit G un réseau connexe transient. Avec les mêmes notations que précédemment,*

1. *Les suites (i_n) et (v_n) convergent ponctuellement, respectivement vers i et v .*
2. *$i = dv$.*

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|i_n\|_r^2 = \|i\|_r^2$.
4. i est l'unique flot unitaire antisymétrique de s vers l'infini d'énergie minimale.
5. i est l'unique courant unitaire de s vers l'infini d'énergie minimale.
6. $v(s) = \|i\|_r^2 = R(s, \infty)$.
7. $\forall x \in V(G)$, $v(x) = R(s, \infty) \mathbb{P}_x(\tau_s < \infty)$.
8. $\mathbb{E}_s(N_x) = \pi(x)v(x)$.
9. $\mathbb{E}_s(S_e - S_{-e}) = i(e)$.

Démonstration. Les deux premiers points ont déjà été démontrés. Le troisième point se déduit facilement de la preuve précédente : chaque implication fournit une inégalité. On sait également que i est un flot d'énergie minimale. L'unicité d'un tel flot est donnée par l'inégalité du parallélogramme.

Pour démontrer le cinquième point, il suffit de considérer un autre courant unitaire i' et par unicité du courant unitaire dans G_n , on aura $i'_n := i'|_{\mathbb{E}(G_n)} = i_n$ puis $i = i'$.

Les sixième et septième points sont des conséquences des convergences ponctuelles et des formules sur les réseaux électriques finis, le huitième point a déjà été démontré lors de la preuve précédente. Enfin, le dernier point se déduit du précédent comme dans le cas des réseaux finis. \square

Remarque II.2. Attention, dans le cas infini, il n'y a pas unicité du courant unitaire. Par exemple, dans le cas d'un arbre binaire de conductances $c(e) = \left(\frac{3}{2}\right)^{-|e|}$, on peut faire passer un courant unitaire régulier $i(\vec{x}) = 2^{-|x|}$ (c'est celui que donne la proposition précédente). Mais on peut aussi ne faire passer du courant que dans le sous-arbre droit par exemple

$$i'(\vec{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est dans le sous-arbre gauche} \\ 2^{-|x|+1} & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce qui est vrai, en revanche, est que tous les courants unitaires qui ne sont correspondent pas à la construction précédente (avec « potentiel 0 à l'infini ») ont une énergie strictement plus importante (dans notre cas, $\|i'\|_r^2 = 2\|i\|_r^2$).

Corollaire II.19. *Si G est transient, alors G admet des flots (antisymétriques ou positifs²) admissibles non nuls et en particulier,*

$$\max \left\{ \text{Force}(\theta) \mid \theta \in \text{Flots}(G, s, \infty) \right\} = \inf \left\{ c(\Pi) \mid \Pi \in \text{Cutset}_G(s, \infty) \right\} > 0$$

2. Ayant à de nouveau à faire aux deux types de flot différents, nous devons de nouveau faire intervenir le diacritique \sim . Les parenthèses autour de celui-ci indiquent que le résultat est vrai avec ou sans \sim .

Démonstration. Soit i le courant unitaire de s vers l'infini d'énergie minimale. Alors, pour toute arête e ,

$$\begin{aligned} |i(e)| &= c(e) |v(e_-) - v(e_+)| \\ &= c(e) R(s, \infty) \left| \mathbb{P}_{e_-}(\tau_s < \infty) - \mathbb{P}_{e_+}(\tau_s < \infty) \right| \\ &\leq c(e) R(s, \infty). \end{aligned}$$

Par conséquent le flot antisymétrique $C(s, \infty) i$ est admissible et non nul. D'après la version non orientée du théorème FLOT-MAX/INF-COUCPE, on a

$$\inf \left\{ c(\Pi) \mid \Pi \in \text{Cutset}_G(s, \infty) \right\} > 0$$

puis d'après le corollaire I.9,

$$\inf \{ c(\Pi) \mid \Pi \in \text{Cutset}_G(s, \infty) \} = \inf \left\{ c(\Pi) \mid \Pi \in \tilde{\text{Cutset}}_G(s, \infty) \right\} > 0.$$

Enfin, la version orientée du théorème FLOT-MAX/INF-COUCPE donne l'existence de flots positifs admissibles non nuls. \square

L'énoncé contraposé du corollaire précédent donne un important critère de récurrence :

Corollaire II.20. *Soit G un réseau infini et non orienté. Si*

$$\inf \left\{ c(\Pi) \mid \Pi \in \overset{(\sim)}{\text{Cutset}}_G(s, \infty) \right\} = 0,$$

alors le réseau non orienté et infini G est récurrent.

4 Cas des arbres infinis

4.1 Courant sur un arbre enraciné

Sens du courant

Proposition II.21. *Soit (T, o) un arbre enraciné transient. Tout courant de o vers l'infini d'énergie minimale respecte l'orientation naturelle de (T, o) .*

Démonstration. Si le courant est nul, il n'y a bien sûr rien à démontrer. Sinon, on peut quitte à le diviser par sa force, supposer qu'il est unitaire. Soit v le potentiel associé (nul à l'infini comme dans la proposition II.18). Alors,

$$i(\vec{x}) = c(\vec{x}) (v(x_*) - v(x)).$$

Il suffit donc de montrer que $v(x_*) \geq v(x)$, ce qui revient à démontrer que

$$\mathbb{P}_{x_*}(\tau_o < \infty) \geq \mathbb{P}_x(\tau_o < \infty).$$

Pour le justifier, on utilise le fait que tout chemin de x à o passe par x_* et la propriété de Markov en τ_{x_*} :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(\tau_o < \infty) &= \mathbb{E}_x(\mathbf{1}_{\{\tau_o < \infty\}}) \\ &= \mathbb{E}_x(\mathbf{1}_{\{\tau_o < \infty\}} \circ \Theta_{\tau_{x_*}} \mathbf{1}_{\{\tau_{x_*} < \infty\}}) \\ &= \mathbb{P}_x(\tau_{x_*} < \infty) \mathbb{P}_{x_*}(\tau_o < \infty). \end{aligned} \quad \square$$

Un critère d'existence de courants

Nous avons déjà démontré, dans le cadre général des réseaux connexes infinis non orientés que lorsqu'il existe un courant non nul entre un sommet s et l'infini, alors il existe un flot admissible non nul entre s et l'infini. Nous énonçons ici dans le cas des arbres une réciproque partielle de cet énoncé.

Proposition II.22. *Soit (T, o) un arbre infini, de conductance \mathbf{c} . Soit (w_n) une suite de réels positifs telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} w_n < \infty$. Pour une arête e , définissons*

$$\mathbf{c}'(e) = w_{|e|} \mathbf{c}(e).$$

S'il existe un flot non nul de o vers l'infini, admissible pour la capacité \mathbf{c}' , alors il existe un courant non nul sur (T, o) pour la conductance \mathbf{c} . En particulier, T est transient (pour \mathbf{c}).

Démonstration. Quitte à élaguer T , on peut supposer qu'il n'a pas de feuille. Dans ce cas, les coupes

$$\Pi_n = \{\vec{x} \mid |x| = n\}$$

sont minimales pour l'inclusion.

Soit θ un flot positif admissible non nul de o vers l'infini pour \mathbf{c}' . On peut supposer que θ est univoque et respecte l'orientation naturelle de T . On lui associe le flot antisymétrique $i := \text{Bilan}(\theta)$. Dans un arbre, tout flot antisymétrique de o vers l'infini est un courant (la loi des cycles est trivialement vérifiée). Il ne reste plus qu'à montrer que l'énergie de i est finie.

$$\begin{aligned} \|i\|_r^2 &= \sum_{e \in \mathbf{E}(T, o)} r(e) i(e)^2 = \sum_{e \in \mathbf{E}(T, o)} r(e) \theta(e)^2 \\ &\leq \sum_{e \in \mathbf{E}(T, o)} r(e) \mathbf{c}'(e) \theta(e) = \sum_{e \in \mathbf{E}(T, o)} w_{|e|} \theta(e) \\ &\leq \sum_{n \geq 1} w_n \sum_{x \in \Pi_n} \theta(e) = \sum_{n \geq 1} w_n \text{Force}(\theta) < \infty, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la proposition I.12 pour obtenir la dernière égalité. □

4.2 Marche aléatoire biaisée sur un arbre infini

Nous appliquons maintenant l'ensemble des résultats de ces deux premiers chapitres pour démontrer le simple et puissant critère de transience de Lyons. Soit (T, o) un arbre infini et $\lambda > 0$. Nous munissons T de la conductance

$$c(e) = \lambda^{-|e|}.$$

La mesure réversible associée est donnée par $\pi(o) = \frac{\nu(o)}{\lambda}$ et pour $x \neq o$,

$$\pi(x) = \lambda^{-|x|} + \nu(x)\lambda^{-|x|-1}.$$

Les probabilités de transition de la marche aléatoire associée sur les sommets sont données par

$$Q(o, y) = \begin{cases} \frac{1}{\nu(o)} & \text{si } y \in \text{fils}(o) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

$$Q(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda + \nu(x)} & \text{si } y \in \text{fils}(x) \\ \frac{\lambda}{\lambda + \nu(x)} & \text{si } y = x_* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

On note $\text{RW}_\lambda(T, o)$ la loi de cette marche aléatoire, dite biaisée de paramètre λ . Lorsque $\lambda = 1$, la marche est dite simple.

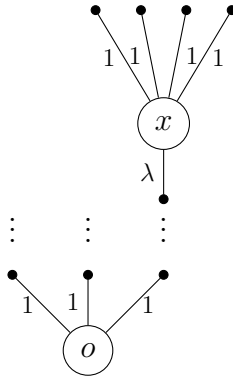


FIGURE II.1 – Poids relatifs de la marche aléatoire biaisée $\text{RW}_\lambda(T, o)$.

Notons provisoirement

$$\varphi(\lambda) = \inf \left\{ \sum_{e \in \Pi} \lambda^{-|e|} \mid \pi \in \text{Cutset}_T(o, \infty) \right\}.$$

Si $\varphi(\lambda) = 0$, alors d'après le corollaire II.20, la marche aléatoire $\text{RW}_\lambda(T, o)$ est récurrente et c'est alors encore le cas pour tout $\lambda' > \lambda$. Ceci nous amène à considérer le nombre

$$\text{br}(T) = \sup \{ \lambda > 0 \mid \varphi(\lambda) > 0 \}$$

appelé *nombre de branchement* de T . Nous venons de voir que si $\lambda > \text{br}(T)$, alors $\text{RW}_\lambda(T, o)$ est récurrente. Supposons maintenant que $\lambda < \text{br}(T)$ et considérons

$$\lambda < \lambda' < \text{br}(T).$$

D'après le théorème MAX-FLOT/INF-COUCPE, il y a des flots admissibles non nuls pour la capacité

$$c'(e) = \lambda'^{-|e|} = \lambda^{-|e|} \left(\frac{\lambda'}{\lambda} \right)^{-|e|}.$$

La proposition II.22 précédente avec

$$w_n = \left(\frac{\lambda'}{\lambda} \right)^{-n}.$$

nous garantit l'existence d'un courant de o vers l'infini et la transience de $\text{RW}_\lambda(T, o)$. Nous avons finalement obtenu :

Théorème II.23 (Lyons, 1990). *Si $\lambda > \text{br}(T)$, alors $\text{RW}_\lambda(T, o)$ est récurrente, aucun flot admissible non nul et en particulier aucun courant non nul ne peut aller de o vers l'infini pour les conductances $e \mapsto \lambda^{-|e|}$.*

Si $\lambda < \text{br}(T)$, alors $\text{RW}_\lambda(T, o)$ est transiente, il y a des courants non nuls donc des flots admissibles non nuls de la racine o vers l'infini pour les conductances $e \mapsto \lambda^{-|e|}$.

Remarque II.3. Comme nous allons le voir, pour $\lambda = \text{br}(T)$, les deux cas peuvent se produire.

5 Croissance d'un arbre infini

Définition II.5. Soit (T, o) un arbre enraciné. La *croissance* de (T, o) , lorsqu'elle existe est le nombre

$$\text{gr}(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{Card} \{x \in \mathbf{V}(T) \mid |x| = n\})^{1/n},$$

et sa *croissance inférieure* est

$$\underline{\text{gr}}(T) = \liminf_{n \rightarrow \infty} (\text{Card} \{x \in \mathbf{V}(T) \mid |x| = n\})^{1/n}.$$

Proposition II.24. *Pour tout arbre infini T ,*

$$\text{br}(T) \leq \underline{\text{gr}}(T).$$

Démonstration. Munissons (T, o) des conductances $c(e) = \lambda^{-|e|}$.

Considérons un réel $\lambda > \underline{\text{gr}}(T)$ et un flot θ univoque admissible de o à l'infini. Pour tout n , définissons la coupe entre o et l'infini

$$\Pi_n = \{\vec{x} \mid |x| = n\}.$$

D'après la proposition I.12, pour tout entier n

$$\text{Force}(\theta) = \sum_{\vec{x} \in \Pi_n} \theta(\vec{x}) \leq \sum_{\vec{x} \in \Pi_n} \lambda^{-n} = Z_n \lambda^{-n},$$

où Z_n désigne le nombre de sommets à hauteur n . Donc

$$\text{Force}(\theta) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} Z_n \lambda^{-n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(Z_n^{\frac{1}{n}} \lambda^{-1} \right)^n = 0,$$

donc $\lambda \geq \text{br}(T)$. □

Définition II.6. Un arbre enraciné (T, o) est dit à *symétrie sphérique* lorsque

$$\forall x, y \in \mathbf{V}(T), \quad |x| = |y| \implies \nu(x) = \nu(y).$$

Proposition II.25. *Si (T, o) est infini à symétrie sphérique, alors $\text{br}(T) = \underline{\text{gr}}(T)$.*

Démonstration. Cela peut se démontrer en travaillant directement sur les coupes, mais nous allons plutôt créer un courant unitaire de o à l'infini pour la conductance $c(e) = \lambda^{-|e|}$ avec $\lambda < \underline{\text{gr}}(T)$. Par symétrie sphérique, l'égalité suivante définit bien un flot vérifiant la loi des nœuds :

$$i(\vec{x}) = \frac{1}{Z_{|x|}},$$

où Z_n désigne encore le nombre de sommets à hauteur n . Son énergie vaut

$$\|i\|_r^2 = \sum_{n \geq 1} \sum_{|x|=n} \lambda^n Z_n^{-2} = \sum_{n \geq 1} \lambda^n Z_n^{-1} < \infty \quad \square.$$

Exemple II.1. Soit m un entier supérieur ou égal à 1 et (T_m, o) l'arbre enraciné m -aire, c'est-à-dire dans lequel tous les sommets ont m enfants. Cet arbre est évidemment à symétrie sphérique, donc

$$\text{br } T_m = \underline{\text{gr}}(T_m) = \text{gr } T_m = m.$$

Si $\lambda > m$, alors la marche aléatoire de biais λ y est récurrente, tandis qu'elle y est transiente pour $\lambda < m$.

Étudions le cas $\lambda = m$. Pour savoir s'il est transient, calculons la conductance effective de o à l'infini. En utilisant les lois des résistances en séries et des conductances en parallèles, on obtient

$$C_{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{C_n} + 1}$$

où C_n désigne la conductance effective entre o et le niveau n assimilé à un unique sommet. On vérifie immédiatement que $C_1 = 1$ puis que $C_n = \frac{1}{n}$, de sorte que

$$C(o, \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0.$$

Donc ce réseau est récurrent. La somme de toutes les conductances vaut

$$\sum_{n \geq 1} \sum_{|x|=n} m^{-n} = \sum_{n \geq 1} 1 = \infty$$

donc la marche aléatoire n'est pas récurrente positive, elle est récurrente nulle.

Exemple II.2. Soit (T, o) l'arbre à symétrie sphérique dont tous les sommets ont un seul enfant, à l'exception de ceux dont la hauteur vaut $2^n - 1$ pour $n \geq 1$.

Le nombre Z_n de sommet à hauteur n vaut donc $Z_n = 3^{\lfloor \log_2 n \rfloor}$, donc

$$\text{br } T = \text{gr } T = 1.$$

Nous pouvons pourtant faire passer un courant unitaire (d'énergie finie) entre o et l'infini pour la conductance constante égale à 1. En effet, par les mêmes argument que dans l'exemple précédent,

$$\sum_{\vec{x} \in E(T)} i(\vec{x})^2 = \sum_{n \geq 1} 3^{-\lfloor \log_2 n \rfloor} = \sum_{k \geq 0} \sum_{2^k \leq n < 2^{k+1}} 3^{-k} = \sum_{k \geq 0} 2^k 3^{-k} = 3 < \infty.$$

La marche aléatoire simple est donc bien transiente sur cet arbre infini, ce qui avec l'exemple précédent, justifie la remarque [II.3](#).

Chapitre III

Percolation sur un arbre infini

Intuitivement, faire une percolation sur les arêtes d'un graphe consiste à effacer « au hasard » certaines de ses arêtes. Une arête effacée est alors dite *fermée*, tandis qu'une arête conservée est dite *ouverte*.

Le graphe obtenu devient alors aléatoire. Il est en général non connexe, même si le graphe de départ l'était. On se pose le plus souvent les questions suivantes :

Question 1. Étant donné un sommet x dans le graphe, quelle est la probabilité que l'amas (c'est-à-dire la composante connexe) de x soit infinie ?

Question 2. Quelle est la probabilité qu'il existe un amas infini ?

Remarque sur les notations et définitions de ce chapitre

Dans ce chapitre, tous les graphes seront non orientés et localement finis et l'on s'intéressera particulièrement au cas des arbres. Comme toutes les arêtes sont non orientées, nous pouvons simplifier les notations. Une arête non orientée, notée précédemment $[e]$ sera simplement notée e et l'ensemble des coupes *finies et symétriques* entre un sommet x et l'infini sera noté $\text{Cutset}(x, \infty)$ (les coupes infinies contenant toujours une coupe finie, elles ne joueront plus aucun rôle par la suite).

Nous allons à présent avoir affaire à des arbres et des graphes aléatoires, qui sont des fonctions mesurables d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeur dans un certain espace constitué d'arbres ou de graphes, qui dépendra du contexte. Aussi nous noterons les arbres et les graphes « déterministes » en minuscules (par exemple t) et les arbres et les graphes aléatoires en majuscules (par exemple T).

1 Percolation générale

Soit \mathbf{g} un graphe. Notons $\mathcal{P}_{\mathbf{E}}(\mathbf{g})$ l'ensemble des sous-graphes de \mathbf{g} qui contiennent tous les sommets de \mathbf{g} (mais en général pas toutes les arêtes). L'ensemble $\mathcal{P}_{\mathbf{E}}(\mathbf{g})$ est naturellement en bijection avec l'ensemble des parties de $\mathbf{E}(\mathbf{g})$ et est donc, dans le

cas le plus intéressant où \mathbf{g} est infini, non dénombrable. Nous le munissons de la tribu $\mathcal{A}_E(\mathbf{g})$ engendrée par les événements

$$\{e \text{ est ouvert}\} = \{\mathbf{h} \in \mathcal{P}_E(\mathbf{t}) \mid e \in E(\mathbf{g})\}.$$

Une *percolation générale* sur \mathbf{g} est un graphe aléatoire, c'est-à-dire une fonction mesurable

$$H: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\mathcal{P}_E(\mathbf{g}), \mathcal{A}_E(\mathbf{g})).$$

Si x est un sommet de \mathbf{g} et $\mathbf{h} \in \mathcal{P}_E(\mathbf{t})$, on note $K_x(\mathbf{f})$ la composante connexe de x dans \mathbf{f} . En théorie de la percolation, une telle composante connexe est souvent appelée *amas* (en anglais, *cluster*).

Si x et e sont respectivement un sommet et une arête de \mathbf{g} , et $\mathbf{h} \in \mathcal{P}_E(\mathbf{g})$, on note $x \xleftrightarrow{\mathbf{h}} e$ lorsque $e \in E(K_x(\mathbf{h}))$. Lorsque l'amas $K_x(\mathbf{h})$ est infini, on note $x \xleftrightarrow{\mathbf{h}} \infty$, puis avec les notations usuelles des probabilités,

$$\begin{aligned} \{x \leftrightarrow e\} &= \left\{ \mathbf{h} \in \mathcal{P}_E(\mathbf{g}) \mid x \xleftrightarrow{\mathbf{h}} e \right\} \\ \left\{ x \xleftrightarrow{H} e \right\} &= \left\{ \omega \in \Omega \mid x \xleftrightarrow{H(\omega)} e \right\} \end{aligned}$$

Lemme III.1. *Les ensembles $\{x \leftrightarrow e\}$ et $\{x \leftrightarrow \infty\}$ sont mesurables.*

Démonstration. Notons $\Gamma_{x \leftrightarrow e}$ l'ensemble des chemins d'arêtes partant de x et dont la dernière arête est e . L'ensemble $\Gamma_{x \leftrightarrow e}$ est dénombrable et

$$\{x \leftrightarrow e\} = \bigcup_{(e^1, e^2, \dots, e^N = e) \in \Gamma_{x \leftrightarrow e}} \bigcap_{i=1}^N \{e_i \text{ est ouverte}\}.$$

Puis, l'amas de x est infini si et seulement si pour toute coupe Π , entre x et l'infini, il contient une arête de Π :

$$\{x \leftrightarrow \infty\} = \bigcap_{\Pi \in \text{Cutset}_{\mathbf{g}}(x, \infty)} \bigcup_{e \in \Pi} \{x \leftrightarrow e\}. \quad \square$$

Pour une coupe Π (ou plus généralement tout ensemble d'arêtes), nous notons

$$\{x \leftrightarrow \Pi\} = \bigcup_{e \in \Pi} \{x \leftrightarrow e\}.$$

Proposition III.2. *Étant donné une percolation générale H sur \mathbf{g} ,*

$$\mathbb{P}\left(x \xleftrightarrow{H} \infty\right) = \inf \left\{ \mathbb{P}\left(x \xleftrightarrow{H} \Pi\right) \mid \Pi \in \text{Cutset}_{\mathbf{g}}(x, \infty) \right\}. \quad (\text{III.1})$$

Démonstration. Pour $n \geq 1$, on note S_n l'ensemble des sommets de \mathfrak{g} à distance n de x , puis Π_n l'ensemble des arêtes situées entre les sommets de S_{n-1} et ceux de S_n . Si Π est une coupe finie de x vers l'infini, alors soit $C_\Pi(x)$ la composante connexe (nécessairement finie) de x dans le graphe \mathfrak{g} auquel on aurait enlevé les arêtes de Π . Soit

$$n_\Pi = \max_{y \in C_\Pi(x)} (d_{\mathfrak{g}}(x, y)).$$

Dés que $n \geq n_\Pi + 1$,

$$\{x \leftrightarrow \Pi_n\} \subset \{x \leftrightarrow \Pi\}.$$

Ainsi, l'on peut conclure :

$$\{x \leftrightarrow \infty\} = \bigcap_{\Pi \in \text{Cutset}_{\mathfrak{g}}(x, \infty)} \{x \leftrightarrow \Pi\} = \bigcap_{n \geq 1} \{x \leftrightarrow \Pi_n\}. \quad \square$$

Cette dernière formule montre qu'il va être important de pouvoir estimer les probabilités $\mathbb{P}\left(x \underset{H}{\leftrightarrow} \Pi\right)$. La *méthode du premier moment* qui suit fournit très simplement *une majoration* de ce nombre. Il suffit d'écrire

$$\mathbb{P}\left(x \underset{H}{\leftrightarrow} \Pi\right) \leq \mathbb{E}\left(\sum_{e \in \Pi} \mathbf{1}_{\{x \underset{H}{\leftrightarrow} e\}}\right) = \sum_{e \in \Pi} \mathbb{P}\left(x \underset{H}{\leftrightarrow} e\right). \quad (\text{III.2})$$

2 Percolations de Bernoulli et percolations indépendantes

Après ces considérations très générales, nous passons à la percolation de Bernoulli, cas très particulier mais très fréquent de percolation. Donnons-nous un réel $p \in]0; 1[$, un graphe \mathfrak{g} et un ensemble de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur lequel sont définies les variables aléatoires $(B_p^{(e)})_{e \in \mathbf{E}(\mathfrak{g})}$ indépendantes et identiquement distribuées suivant la loi de Bernoulli de paramètre p . Enfin, définissons la percolation H_p par

$$e \text{ est ouvert dans } H_p \iff B_p^{(e)} = 1.$$

La percolation de Bernoulli est en fait un cas particulier d'une famille légèrement plus générale de percolations.

Définition III.1. On dit qu'une percolation H sur un graphe \mathfrak{g} est *indépendante* lorsque la famille d'événements $(\{e \text{ est ouvert dans } H\})_{e \in \mathbf{E}(\mathfrak{g})}$ est indépendante.

La loi du zéro un de Kolmogorov s'applique ici.

Proposition III.3. *Si H est une percolation indépendante sur un graphe \mathfrak{g} , alors*

$$\mathbb{P}(H \text{ a un amas infini}) \in \{0, 1\}.$$

Démonstration. La percolation H ne dépend que des variables aléatoires indépendantes $B^{(e)} := \mathbf{1}_{\{e \text{ est ouvert dans } H\}}$.

Nous devons montrer que l'événement $\{H \text{ a un amas infini}\}$ est indépendant de toute sous-famille finie de $(B^{(e)})_{e \in E(\mathfrak{g})}$.

Donnons-nous des arêtes e^1, \dots, e^N dans \mathfrak{g} . Avec un léger abus de notation, notons

$$H \setminus \{e^1, \dots, e^N\}$$

le graphe obtenu à partir de H en effaçant ces arêtes. Les événements

$$\{H \text{ a un amas infini}\} \quad \text{et} \quad \{H \setminus \{e^1, \dots, e^N\} \text{ a un amas infini}\}$$

sont les mêmes. Par conséquent, l'événement $\{H \text{ a un amas infini}\}$ est bien indépendant des variables aléatoires $B^{(e^1)}, \dots, B^{(e^N)}$. C'est donc un « événement queue » et la loi du zéro un de Kolmogorov permet de conclure. \square

Proposition III.4. *Soient \mathfrak{g} un graphe connexe et H une percolation indépendante sur \mathfrak{g} telle que pour toute arête e , $\mathbb{P}(e \text{ est ouverte dans } H) > 0$. Si il y a presque sûrement un amas infini dans H , alors pour tout sommet x de \mathfrak{g} , $\mathbb{P}\left(x \overset{H}{\leftrightarrow} \infty\right) > 0$.*

Démonstration. Par hypothèse, il existe un sommet y dans \mathfrak{g} tel que

$$\mathbb{P}\left(y \overset{H}{\leftrightarrow} \infty\right) > 0.$$

Nous allons montrer que tout voisin y' de y est tel que $\mathbb{P}\left(y' \overset{H}{\leftrightarrow} \infty\right) > 0$. Alors, par connexité, le résultat sera démontré.

Soit e une arête entre y et y' . Par inclusion des deux événements,

$$\mathbb{P}\left(y' \overset{H}{\leftrightarrow} \infty\right) \geq \mathbb{P}\left(y \overset{H}{\leftrightarrow} \infty, e \text{ est ouverte dans } H\right).$$

Il suffit donc de démontrer que cette dernière probabilité est non nulle. Pour ce faire, notons $S_n = \{z \in V(\mathfrak{g}) \mid d_{\mathfrak{g}}(y, z) = n\}$ et remarquons que

$$\left\{y \overset{H}{\leftrightarrow} \infty\right\} = \bigcap_{n \geq 1}^{\downarrow} \left\{\exists z \in S_n, y \overset{H}{\leftrightarrow} z\right\} \quad \text{de sorte que}$$

$$\mathbb{P}\left(y \overset{H}{\leftrightarrow} \infty, e \text{ est ouverte dans } H\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\exists z \in S_n, y \overset{H}{\leftrightarrow} z, e \text{ est ouverte}\right).$$

Fixons un $n \geq 1$ et travaillons dans la boule fermée B_n de centre y et de rayon n (dans le graphe \mathfrak{g}). Il n'y a dans cette boule qu'un nombre fini d'arêtes, disons $e^1 = e, e^2, e^3, \dots, e^N$ et, par indépendance, la probabilité de l'événement $\left\{\exists z \in S_n, y \overset{H}{\leftrightarrow} z\right\}$

ne dépend que des valeurs prises par les variables aléatoires $B^{(e^1)}, \dots, B^{(e^N)}$, avec les mêmes notations que dans la démonstration précédente.

Nous pouvons ainsi séparer l'événement $\left\{ \exists z \in S_n, y \overset{H}{\leftrightarrow} z \right\}$ en événements élémentaires du type $\left\{ e^1 \text{ est ouvert}, e^2 \text{ est fermé}, \dots, e^N \text{ est ouvert} \right\}$. Notons E l'ensemble de ces événements élémentaires. Alors

$$\mathbb{P} \left(\left\{ \exists z \in S_n, y \overset{H}{\leftrightarrow} z \right\} \right) = \sum_{l \in E, e \text{ ouverte}} \mathbb{P}(l) + \sum_{l \in E, e \text{ fermée}} \mathbb{P}(l)$$

À chaque événement élémentaire du type $l \in E$ pour e fermé, de probabilité p_l , on peut associer un événement l' où les arêtes sont dans le même état que dans l , à l'exception de e , que l'on ouvre. Par indépendance,

$$p_{l'} = \frac{p}{1-p} p_l, \quad \text{où } p := \mathbb{P}(e \text{ est ouverte dans } H).$$

Ainsi,

$$\sum_{l \in E, e \text{ fermée}} \mathbb{P}(l) \leq \frac{1-p}{p} \sum_{l \in E, e \text{ ouverte}} \mathbb{P}(l) \quad \text{puis}$$

$$\mathbb{P} \left(\left\{ \exists z \in S_n, y \overset{H}{\leftrightarrow} z \right\} \right) \leq \frac{1}{p} \mathbb{P} \left(\left\{ \exists z \in S_n, y \overset{H}{\leftrightarrow} z \right\}, e \text{ ouverte} \right).$$

Enfin, en faisant tendre n vers l'infini,

$$\mathbb{P} \left(y \overset{H}{\leftrightarrow} \infty, e \text{ est ouverte dans } H \right) \geq p \mathbb{P} \left(y \overset{H}{\leftrightarrow} \infty \right) > 0. \quad \square$$

Revenons à la percolation de Bernoulli.

Proposition III.5. *La fonction $(p \mapsto \mathbb{P}(H_p \text{ a un amas infini}))$ est croissante.*

Démonstration. Bien que ce résultat soit très intuitif, sa démonstration est instructive. Soient p et p' dans $]0; 1[$, avec $p < p'$. Plutôt que de faire vivre directement sur Ω les variables $B_p^{(e)}$ et $B_{p'}^{(e)}$, donnons-nous cette fois une famille de variables aléatoires i.i.d $(U^{(e)})$ de loi uniforme sur $[0; 1]$. Ensuite définissons pour chaque arête e du graphe \mathfrak{g} ,

$$B_p^{(e)} = \begin{cases} 1 & \text{si } U^{(e)} < p \\ 0 & \text{si } U^{(e)} \geq p \end{cases} \quad \text{et} \quad B_{p'}^{(e)} = \begin{cases} 1 & \text{si } U^{(e)} < p' \\ 0 & \text{si } U^{(e)} \geq p' \end{cases}$$

Puis, de la même manière que précédemment, définissons les graphes aléatoires H_p et $H_{p'}$. Ce sont bien des percolations de Bernoulli. Mais nous avons maintenant l'inclusion :

$$\{H_p \text{ a un amas infini}\} \subset \{H_{p'} \text{ a un amas infini}\}$$

qui nous permet de conclure. □

Définition III.2. Soit \mathbf{g} un graphe. La probabilité critique de percolation sur \mathbf{g} est le réel

$$p_c(\mathbf{g}) = \sup \{p > 0 \mid \mathbb{P}(H_p \text{ a un amas infini}) = 0\}.$$

Remarque III.1. Si le graphe \mathbf{g} est connexe, d'après la proposition III.4,

$$\begin{aligned} p_c(\mathbf{g}) &= \sup \left\{ p > 0 \mid \exists x \in \mathbf{V}(\mathbf{g}), \mathbb{P}\left(x \overset{H_p}{\leftrightarrow} \infty\right) = 0 \right\} \\ &= \sup \left\{ p > 0 \mid \forall x \in \mathbf{V}(\mathbf{g}), \mathbb{P}\left(x \overset{H_p}{\leftrightarrow} \infty\right) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Application au cas des arbres

Soit (\mathbf{t}, o) un arbre enraciné et $p \in]0; 1[$. Notons F_p la forêt aléatoire obtenue par percolation de Bernoulli sur l'arbre \mathbf{t} . Pour toute arête e , on a

$$\mathbb{P}\left(o \overset{F_p}{\leftrightarrow} e\right) = p^{|e|}.$$

Ainsi, en utilisant la méthode du premier moment III.2,

$$\mathbb{P}\left(o \overset{F_p}{\leftrightarrow} \infty\right) \leq \inf \left\{ \sum_{e \in \Pi} p^{|e|} \mid \Pi \in \text{Cutset}(o, \infty) \right\}.$$

Par conséquent, si $p < 1/\text{br}(\mathbf{t})$, alors $\inf \left\{ \sum_{e \in \Pi} p^{|e|} \mid \Pi \in \text{Cutset}(o, \infty) \right\} = 0$, d'où l'on déduit que $p < p_c(\mathbf{t})$. En conclusion,

$$p_c(\mathbf{t}) \geq \frac{1}{\text{br} \mathbf{t}}. \quad (\text{III.3})$$

Nous allons voir dans la prochaine partie qu'il y a en fait égalité.

3 Méthode du deuxième moment, réseaux électriques

3.1 Méthode du deuxième moment

Soit \mathbf{g} un graphe sur lequel nous faisons une percolation générale H .

Pour obtenir l'égalité dans III.3, nous devons cette fois *minorer* les probabilités $\mathbb{P}\left(o \overset{H}{\leftrightarrow} \infty\right)$. Une méthode classique pour le faire est la *méthode de deuxième moment* :

Proposition III.6. Soit X une variable aléatoire à valeurs positives, ayant un moment d'ordre 2. Alors,

$$\mathbb{P}(X > 0) \leq \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}. \quad (\text{III.4})$$

Démonstration. Il suffit d'écrire :

$$\mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}\left(X \mathbf{1}_{\{X>0\}}\right)^2 \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \mathbb{E}(X^2) \mathbb{P}(X > 0). \quad \square$$

Pour pouvoir obtenir la minoration voulue, nous avons besoin d'une variable aléatoire X_Π satisfaisant

$$X_\Pi > 0 \implies o \underset{H}{\leftrightarrow} \Pi.$$

Un premier candidat est

$$X_\pi^{(\text{premier candidat})} = \sum_{e \in \Pi} \mathbf{1}_{\left\{o \underset{H}{\leftrightarrow} e\right\}}.$$

Mais pour obtenir la minoration la plus fine possible, nous allons devoir être légèrement plus subtil et chercher une combinaison linéaire de ces dernières indicatrices. De plus, pour simplifier l'expression III.4, il serait bon que X_Π ait pour espérance 1. Aussi, nous posons, pour toute mesure de probabilité μ sur Π ,

$$X_\Pi(\mu) = \sum_{e \in \Pi} \mu(e) \frac{\mathbf{1}_{\left\{o \underset{H}{\leftrightarrow} e\right\}}}{\mathbb{P}\left(o \underset{H}{\leftrightarrow} e\right)}. \quad (\text{III.5})$$

Notre variable aléatoire $X_\Pi(\mu)$ étant choisie, nous obtenons

$$\mathbb{P}\left(o \underset{H}{\leftrightarrow} \Pi\right) \geq \frac{1}{\mathbb{E}\left(X_\Pi(\mu)^2\right)} \quad (\text{III.6})$$

Puis, si nous notons $\mathcal{M}_1(\Pi)$ l'ensemble (compact) des mesures de probabilité sur Π , nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(o \underset{H}{\leftrightarrow} \Pi\right) &\geq \frac{1}{\min_{\mu \in \mathcal{M}_1(\Pi)} \left\{ \mathbb{E}\left(X_\Pi(\mu)^2\right) \right\}} \quad \text{puis} \\ \mathbb{P}\left(o \underset{H}{\leftrightarrow} \infty\right) &\geq \inf_{\Pi \in \text{Cutset}(o, \infty)} \frac{1}{\min_{\mu \in \mathcal{M}_1(\Pi)} \left\{ \mathbb{E}\left(X_\Pi(\mu)^2\right) \right\}}. \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

3.2 Cas des arbres

On considère maintenant le cas d'un arbre enraciné (\mathbf{t}, o) . Rappelons que nous avons défini dans ce cas une orientation naturelle sur les arêtes (l'origine d'une arête est l'extrémité la plus proche de la racine) et une relation d'ordre partielle \leq sur les sommets : $x \leq y$ si et seulement si x est un ancêtre de y . Pour deux sommets x et y , on définit le plus proche ancêtre commun :

$$x \wedge y := \max \{z \in \mathbf{V}(\mathbf{t}) \mid z \leq x \text{ et } z \leq y\}.$$

Si e et e' sont deux arêtes de \mathbf{t} , on note $e \wedge e' := e_- \wedge e'_-$. Enfin, rappelons qu'un sommet x distinct de la racine a un unique père x_* et que l'arête reliant ces deux sommets est notée \vec{x} .

Plaçons-nous dans le cadre d'une percolation *indépendante* F où toute arête e a une probabilité non nulle p_e d'être ouverte. Par simple développement, on obtient

$$\mathbb{E} \left(X_{\Pi}(\mu)^2 \right) = \sum_{e, e' \in \Pi} \mu(e) \mu(e') \frac{\mathbb{P} \left(o \overset{F}{\leftrightarrow} e, o \overset{F}{\leftrightarrow} e' \right)}{\mathbb{P} \left(o \overset{F}{\leftrightarrow} e \right) \mathbb{P} \left(o \overset{F}{\leftrightarrow} e' \right)}. \quad (\text{III.8})$$

Mais en utilisant l'indépendance de la percolation et les propriétés de l'arbre,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(o \overset{F}{\leftrightarrow} e \right) &= \mathbb{P} \left(o \overset{F}{\leftrightarrow} e \wedge e' \right) \mathbb{P} \left(e \wedge e' \overset{F}{\leftrightarrow} e \right) \quad \text{et} \\ \mathbb{P} \left(o \overset{F}{\leftrightarrow} e, o \overset{F}{\leftrightarrow} e' \right) &= \mathbb{P} \left(o \overset{F}{\leftrightarrow} e \wedge e' \right) \mathbb{P} \left(e \wedge e' \overset{F}{\leftrightarrow} e \right) \mathbb{P} \left(e \wedge e' \overset{F}{\leftrightarrow} e' \right) \end{aligned}$$

Ceci permet finalement d'obtenir l'expression :

$$\mathbb{E} \left(X_{\Pi}(\mu)^2 \right) = \sum_{e, e' \in \Pi} \frac{\mu(e) \mu(e')}{\mathbb{P} \left(o \overset{F}{\leftrightarrow} e \wedge e' \right)} = \sum_{\vec{x}, \vec{y} \in \Pi} \frac{\mu(\vec{x}) \mu(\vec{y})}{\mathbb{P} \left(o \overset{F}{\leftrightarrow} x \wedge y \right)}. \quad (\text{III.9})$$

Cette dernière espérance, que nous cherchons à minimiser, est appelée *l'énergie* de la mesure de probabilité μ sur la coupe Π et est notée $\mathcal{E}(\mu)$.

Nous allons relier ce problème à un problème de réseaux électriques. Soit $\bar{\Pi}$ l'ensemble des buts des arêtes de Π , c'est-à-dire

$$\bar{\Pi} = \{x \mid \vec{x} \in \Pi\}.$$

Notons \mathbf{t}_{Π} l'arbre obtenu à partir de \mathbf{t} en supprimant tous les sous-arbres issus des sommets appartenant à $\bar{\Pi}$, de sorte que \mathbf{t}_{Π} est fini et l'ensemble de ses feuilles distinctes de o est $\bar{\Pi}$. Enfin, considérons le graphe \mathbf{t}_{Π} , obtenu en identifiant l'ensemble des feuilles $\bar{\Pi}$ à un seul sommet encore noté $\bar{\Pi}$. Nous pouvons associer à toute mesure de probabilité μ sur Π , un flot¹ unitaire θ allant de o à $\bar{\Pi}$ et réciproquement.

Proposition III.7. *Si $\mu \in \mathcal{M}_1(\Pi)$, alors le flot θ défini par*

$$\theta(e) = \sum_{\substack{e' \geq e \\ e' \in \Pi}} \mu(e')$$

est unitaire et vérifie la loi des nœuds sur $\mathbf{V}(\mathbf{t}_{\Pi}) \setminus \{o, \bar{\Pi}\}$.

Réciproquement, si θ est un flot unitaire de o vers $\bar{\Pi}$, alors l'on définit une mesure de probabilité μ sur Π , en posant $\mu(e) = \theta(e)$.

1. Nous supposons implicitement qu'un tel flot respecte l'orientation naturelle de l'arbre enraciné et il n'est pas nécessaire de préciser s'il est univoque ou antisymétrique, seules ses valeurs sur les arêtes du type \vec{x} nous intéressent désormais.

Démonstration. Supposons donnée une probabilité μ sur Π et soit θ comme dans l'énoncé de la proposition. Par hypothèse,

$$\theta(o) = \sum_{\substack{e \geq o \\ e \in \Pi}} \mu(e) = \sum_{e \in \Pi} \mu(e) = 1.$$

Puis, si x est un sommet n'appartenant pas à $\bar{\Pi}$ et dont les fils sont x_1, \dots, x_k , on a la partition

$$\{e' \geq \vec{x}, e' \in \Pi\} = \bigsqcup_{i=1}^k \{e' \geq \vec{x}_i, e' \in \Pi\}.$$

En effet, si une même arête e' était telle que $e' \geq x_i$ et $e' \geq x_j$ pour deux fils x_i et x_j distincts, on obtiendrait un cycle dans l'arbre \mathbf{t}_π . Ceci implique la loi des nœuds :

$$\theta(\vec{x}) = \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{e' \geq x_i \\ e' \in \Pi}} \theta(e') = \sum_{i=1}^k \theta(x_i).$$

L'autre partie de la proposition est évidente. \square

Proposition III.8. *Munissons (\mathbf{t}_Π, o) de conductances. Soit θ un flot unitaire antisymétrique allant de o vers $\bar{\Pi}$. Alors θ a pour énergie :*

$$\|\theta\|_r^2 = \sum_{\vec{x}, \vec{y} \in \Pi} \frac{\theta(\vec{x}) \theta(\vec{y})}{\mathbf{C}(o, x \wedge y)} \quad (\text{III.10})$$

Démonstration. La loi des nœuds implique que pour toute arête \tilde{e} ,

$$\theta(\tilde{e}) = \sum_{\substack{e \geq \tilde{e} \\ e \in \Pi}} \theta(e).$$

Puis nous calculons :

$$\begin{aligned} \|\theta\|_r^2 &= \sum_{\tilde{e} \in \mathbf{E}(\mathbf{t}, o)} r(\tilde{e}) \theta(\tilde{e})^2 = \sum_{\tilde{e} \in \mathbf{E}(\mathbf{t}, o)} r(\tilde{e}) \sum_{\substack{e \geq \tilde{e} \\ e \in \Pi}} \theta(e) \sum_{\substack{e' \geq \tilde{e} \\ e' \in \Pi}} \theta(e') \\ &= \sum_{\tilde{e} \in \mathbf{E}(\mathbf{t}, o)} r(\tilde{e}) \sum_{\substack{e, e' \in \Pi \\ \tilde{e} \leq e \wedge e'}} \theta(e) \theta(e') = \sum_{e, e' \in \Pi} \theta(e) \theta(e') \sum_{\tilde{e} \leq e \wedge e'} r(\tilde{e}). \end{aligned}$$

Or, dans l'arbre \mathbf{t}_f , les résistances allant de o à un sommet $e \wedge e'$ sont en série, par conséquent, $\sum_{\tilde{e} \leq e \wedge e'} r(\tilde{e}) = \mathbf{R}(o, e \wedge e')$, ce qui achève notre calcul. \square

Idéalement, nous aimerions trouver des conductances *ad hoc* sur l'arbre \mathbf{t} de façon à avoir pour tous sommets x et y , $\mathbf{C}(o, x \wedge y) = \mathbb{P}\left(o \overset{F}{\leftrightarrow} x \wedge y\right)$. Ce n'est pas tout à fait possible car

$$\infty = \mathbf{C}(o, o) \neq \mathbb{P}\left(o \overset{F}{\leftrightarrow} o\right) = 1.$$

3.3 Réseau électrique associé à une percolation indépendante

Puisque cette dernière tentative a échoué, cherchons une fonction « proche de l'identité » qui envoie l'infini sur 1. Un bon candidat semble être $x \mapsto (x^{-1} + 1)^{-1}$. Ainsi, nous cherchons des résistances qui satisfont :

$$\forall x \in \mathbf{V}(\mathbf{t}), \quad \frac{1}{\mathbb{P}\left(o \overset{F}{\leftrightarrow} x\right)} = \mathbf{R}(o, x) + 1. \quad (\text{III.11})$$

En notant $p_{\vec{y}} := \mathbb{P}(\vec{y} \text{ est ouverte dans } H)$ et en utilisant la loi des résistances en série et l'indépendance de la percolation, on obtient pour $x \neq o$

$$\prod_{y \leq x} \frac{1}{p_{\vec{y}}} = \sum_{y \leq x} r(\vec{y}) + 1 \quad (\text{III.12})$$

Puis, en utilisant la même relation pour le père x_* de o et en remarquant que $r(\vec{x}) = \sum_{y \leq x} r(\vec{y}) - \sum_{y \leq x_*} r(\vec{y})$,

$$r(\vec{x}) = \prod_{y \leq x} \frac{1}{p_{\vec{y}}} - \prod_{y \leq x_*} \frac{1}{p_{\vec{y}}} = \frac{1 - p_{\vec{x}}}{\prod_{y \leq x} p_{\vec{y}}}. \quad (\text{III.13})$$

Cette dernière formule est encore valable si x n'a pas de grand-père, comme on le voit directement dans l'égalité III.12. Il est immédiat de vérifier que réciproquement, si l'on se donne ces résistances sur les arêtes de \mathbf{t} , alors le problème III.11 est résolu.

Définition III.3. Ces résistances sont dites *adaptées à la percolation indépendante* F sur l'arbre \mathbf{t} .

Muni de ces résistances, si Π est une coupe donnée et la probabilité μ et le flot θ sont associés comme dans la proposition III.7, on obtient $\mathcal{E}(\mu) = \|\theta\|_r^2 + 1$ puis

$$\min_{\mu \in \mathcal{M}_1(\Pi)} \mathcal{E}(\mu) = 1 + \|i_\Pi\|^2 = 1 + \mathbf{R}(o, \bar{\Pi}), \quad (\text{III.14})$$

où i_π est le courant unitaire entre o et $\bar{\Pi}$. Il ne reste plus qu'à remarquer que

$$\inf_{\Pi \in \text{Cutset}_{\mathbf{g}}(o, \infty)} \mathbf{R}(o, \bar{\Pi}) = \mathbf{R}(o, \infty)$$

pour obtenir

$$\inf_{\Pi \in \text{Cutset}_{\mathbf{g}}(o, \infty)} \left(\min_{\mu \in \mathcal{M}_1(\Pi)} \mathbb{E}(X_\Pi(\mu)^2) \right) = \mathbf{R}(o, \infty) + 1 \quad (\text{III.15})$$

et enfin,

$$\mathbb{P}\left(o \overset{F}{\leftrightarrow} \infty\right) \geq \frac{1}{1 + \mathbf{R}(o, \infty)}. \quad (\text{III.16})$$

Or, d'après le critère de transience II.16, $R(o, \infty) < \infty$ si et seulement si l'arbre \mathfrak{t} (muni des résistances adaptées à la percolation) est transient. Aussi, si \mathfrak{t} est transient, $\mathbb{P}\left(o \stackrel{F}{\leftrightarrow} \infty\right) > 0$ et ceci ne dépend pas du choix de la racine o d'après les propositions III.3 et III.4.

Nous récapitulons tous nos résultats dans le théorème suivant.

Théorème III.9. *Soit \mathfrak{t} un arbre sur lequel on fait une percolation indépendante F telle que pour toute arête e de \mathfrak{t} ,*

$$p_e := \mathbb{P}(e \text{ est ouverte dans } F) > 0.$$

On choisit arbitrairement une racine o dans l'arbre \mathfrak{t} , puis on munit \mathfrak{t} de résistances dites adaptées à cette percolation en posant, pour toute arête \vec{x} ,

$$r(\vec{x}) = \frac{1 - p_{\vec{x}}}{\prod_{y \leq x} p_{\vec{y}}}.$$

Dans ces conditions, si la marche aléatoire sur \mathfrak{t} est transiente, alors la percolation F a presque sûrement un amas infini et l'amas de tout sommet de \mathfrak{t} est infini avec une probabilité non nulle.

Théorème III.10. *Pour tout arbre \mathfrak{t} , infini et localement fini,*

$$p_c(\mathfrak{t}) = \frac{1}{\text{br}(\mathfrak{t})}. \quad (\text{III.17})$$

Démonstration. Soit $p \in]0; 1[$. Les conductances associées à la percolation de Bernoulli sont

$$c(\vec{x}) = (1 - p)^{-1} (p^{-1})^{-|\vec{x}|}.$$

On peut évidemment supprimer dans leur expression le facteur constant $(1 - p)^{-1}$, cela ne change pas le noyau de transition de la marche aléatoire qui n'est autre que la marche aléatoire biaisée de paramètre p^{-1} . D'après le théorème II.23 si $\frac{1}{p} < \text{br}(\mathfrak{t})$, alors la marche aléatoire est transiente, puis d'après le théorème précédent (III.9) il y a presque sûrement un amas infini, donc $p \geq p_c(\mathfrak{t})$. Ceci étant vrai pour tout $p > \frac{1}{\text{br}(\mathfrak{t})}$, on obtient $p_c(\mathfrak{t}) \leq \frac{1}{\text{br}(\mathfrak{t})}$, donc l'égalité d'après III.3. \square

4 Une première percolation en milieu aléatoire

Nous revenons brièvement au cas général avant de revenir à la percolation sur les arbres. Considérons un graphe \mathfrak{g} sur lequel l'on fait une première percolation de Bernoulli, de paramètre $p > p_c(\mathfrak{g})$:

$$H_p: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow \mathcal{P}_E(\mathfrak{g}).$$

Soit $p' \in]0; 1[$. Sur un autre espace de probabilité $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$, définissons une famille de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées $(B_{p'}^{(e)})_{e \in \mathbb{E}(\mathbf{g})}$, de loi de Bernoulli de paramètre p' . Ces variables permettent en fait de définir une percolation $H'_{p', \mathbf{h}}$ sur chaque sous-graphe $\mathbf{h} \in \mathcal{P}_{\mathbb{E}}(\mathbf{g})$ donc en particulier sur chaque $H_p(\omega)$ pour $\omega \in \Omega$. Nous définissons alors la percolation

$$\begin{aligned} H: (\Omega \times \Omega', \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}', \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}') &\longrightarrow \mathcal{P}_{\mathbb{E}}(\mathbf{g}) \\ (\omega, \omega') &\longrightarrow H'_{p', H_p(\omega)}(\omega') \end{aligned}$$

Il est facile de voir que H est encore une percolation de Bernoulli sur \mathbf{g} , de paramètre pp' :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}' (e \text{ est ouverte dans } H) &= \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}' (e \text{ est ouverte dans } H_p, B_{p'}^{(e)} = 1) \\ &= \mathbb{P} (e \text{ est ouverte dans } H_p) \mathbb{P}' (B_{p'}^{(e)} = 1) = pp', \end{aligned}$$

l'indépendance des événements $\{e \text{ est ouverte dans } H\}$ et $\{e' \text{ est ouverte dans } H\}$ pour $e \neq e'$ se montrant exactement de la même manière. Cette discussion nous permet de donner un sens à la proposition suivante et de la démontrer.

Proposition III.11. *Soient \mathbf{g} un graphe, $p > p_c(\mathbf{g})$, et H_p une percolation de Bernoulli de paramètre p sur \mathbf{g} . Alors,*

$$p_c(H_p) = \frac{p_c(\mathbf{g})}{p} \quad \mathbb{P}\text{-p.s.} \quad (\text{III.18})$$

Démonstration. Soit $p' \in]0; 1[$. Supposons d'abord que $pp' < p_c(\mathbf{g})$. Alors d'après la discussion précédente,

$$\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}' (H \text{ a un amas infini}) = 0$$

donc, en notant $\mathbb{E} \otimes \mathbb{E}'$ l'espérance associée à $\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}'$,

$$\mathbb{E} \otimes \mathbb{E}' (\mathbf{1}_{\{H \text{ a un amas infini}\}}) = 0.$$

Mais alors, par Fubini,

$$\mathbb{E} [\mathbb{P}' (H_{p', H_p, \mathbf{g}} \text{ a un amas infini})] = 0, \quad (\text{III.19})$$

par conséquent

$$\mathbb{P}' (H_{p', H_p, \mathbf{g}} \text{ a un amas infini}) = 0 \quad \mathbb{P}\text{-p.s.} \quad (\text{III.20})$$

Ainsi,

$$\mathbb{P} (\{\omega \in \Omega \mid p_c(H_p(\omega)) < p'\}) = 1. \quad (\text{III.21})$$

En faisant tendre p' vers $\frac{p_c(\mathbf{g})}{p}$, on obtient une intersection dénombrable d'événements de probabilité 1, donc

$$p_c(H_p(\omega)) \leq \frac{p_c(\mathbf{g})}{p} \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

On procède exactement de la même manière pour l'autre inégalité, en utilisant la loi du zéro un (proposition III.3). \square

Remarque III.2. Pour un graphe \mathbf{g} , si nous notons $\mathcal{C}(\mathbf{g})$ l'ensemble des amas de \mathbf{g} , on vérifie facilement que

$$p_c(\mathbf{g}) = \inf \{p_c(\mathbf{h}) \mid \mathbf{h} \in \mathcal{C}(\mathbf{g})\}.$$

Si nous appliquons cela à la percolation H_p , sur l'événement $\{p_c(H_p) = \frac{p_c(\mathbf{g})}{p}\}$, de probabilité 1, nous pouvons définir pour tout $\varepsilon > 0$ un sous-graphe aléatoire *connexe* K_p de H_p tel que $p_c(K_p) < \frac{p_c(\mathbf{g})}{p} - \varepsilon$.

Cette dernière remarque est particulièrement féconde lorsqu'elle est appliquée aux arbres.

Corollaire III.12. *Soit \mathbf{t} un arbre infini et F_p une percolation de Bernoulli de paramètre p sur \mathbf{t} . Alors, il existe un arbre aléatoire $T_{p,\varepsilon}$ inclus dans F_p (et donc dans \mathbf{t}) tel que*

$$\text{br}(T_{p,\varepsilon}) > p \text{ br}(\mathbf{t}) - \varepsilon \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser la remarque précédente, la proposition III.11 et le théorème III.10. \square

5 Une classe particulière de percolations non indépendantes sur les arbres

Nous aurons besoin dans le chapitre 4 d'une version légèrement plus générale du corollaire précédent III.12 et du théorème III.10. Il s'agit en fait d'un cas particulier de ce que Lyons appelle *percolation quasi-indépendante* (dans [LP14], paragraphe 5.4) ou *percolation quasi-Bernoulli* (dans [Lyo89], paragraphe 3).

Définition III.4. Soit F une percolation sur un arbre infini enraciné (\mathbf{t}, o) et $p \in]0; 1[$. Nous disons que F vérifie la condition (PB_p) lorsque :

- * Pour toute $\vec{x} \in \mathbf{E}(\mathbf{t}, o)$, $\mathbb{P}(\vec{x} \text{ est ouverte dans } F) = p$.
- * Pour toutes \vec{x} et \vec{y} , avec $x_* \neq y_*$, les événements $\{\vec{x} \text{ est ouverte dans } F\}$ et $\{\vec{y} \text{ est ouverte dans } F\}$ sont indépendants.

Nous allons voir qu'une telle percolation a essentiellement les mêmes propriétés qu'une percolation de Bernoulli.

Pour commencer, elle vérifie également la propriété du zéro un. En effet, si l'on note Aretes_x la variable aléatoire égale à l'ensemble des arêtes ouvertes issues de x (c'est-à-dire allant de x à ses fils), la famille de variables aléatoires $(\text{Aretes}_x)_{x \in \mathbf{V}(\mathbf{t})}$ est indépendante et l'événement $\{F \text{ a un amas infini}\}$ est mesurable par rapport à l'ensemble de ces variables et indépendant de n'importe laquelle de ses sous-familles finies, aussi la loi du zéro un de Kolmogorov s'applique :

$$\mathbb{P}(F \text{ a un amas infini}) \in \{0, 1\}. \quad (\text{III.22})$$

Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbf{V}(\mathbf{t})$, on a par indépendance

$$\mathbb{P}\left(o \underset{F}{\leftrightarrow} x\right) = \mathbb{P}\left(x \underset{F}{\leftrightarrow} x_*, x_* \underset{F}{\leftrightarrow} x_{**}, \dots, x_{*(|x|-1)} \underset{F}{\leftrightarrow} o\right) = p^{|x|}.$$

Nous en venons à la propriété la plus importante de ces percolations².

Proposition III.13. *Soient x et y deux sommets de \mathbf{t} , alors*

$$\frac{\mathbb{P}\left(o \underset{F}{\leftrightarrow} x, o \underset{F}{\leftrightarrow} y\right)}{\mathbb{P}\left(o \underset{F}{\leftrightarrow} x\right) \mathbb{P}\left(o \underset{F}{\leftrightarrow} y\right)} \leq \frac{1}{p^2} \frac{1}{\mathbb{P}\left(o \leftrightarrow x \wedge y\right)}. \quad (\text{III.23})$$

Démonstration. Le résultat est évident si $x = x \wedge y$ ou $y = x \wedge y$. Supposons donc que cela n'est pas le cas et considérons x' (resp. y') le premier sommet rencontré en allant de $x \wedge y$ à x (resp. y). On obtient alors

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbb{P}\left(o \underset{F}{\leftrightarrow} x, o \underset{F}{\leftrightarrow} y\right)}{\mathbb{P}\left(o \underset{F}{\leftrightarrow} x\right) \mathbb{P}\left(o \underset{F}{\leftrightarrow} y\right)} \\ &= \frac{\mathbb{P}\left(o \underset{F}{\leftrightarrow} x \wedge y, x \wedge y \underset{F}{\leftrightarrow} x', x \wedge y \underset{F}{\leftrightarrow} y', x' \underset{F}{\leftrightarrow} x, y' \underset{F}{\leftrightarrow} y\right)}{\mathbb{P}\left(o \underset{F}{\leftrightarrow} x \wedge y, x \wedge y \underset{F}{\leftrightarrow} x', x' \underset{F}{\leftrightarrow} x\right) \mathbb{P}\left(o \underset{F}{\leftrightarrow} x \wedge y, x \wedge y \underset{F}{\leftrightarrow} y', y' \underset{F}{\leftrightarrow} y\right)} \\ &= \frac{\mathbb{P}\left(x \wedge y \underset{F}{\leftrightarrow} x', x \wedge y \underset{F}{\leftrightarrow} y'\right)}{\mathbb{P}\left(o \underset{F}{\leftrightarrow} x \wedge y\right) \mathbb{P}\left(x \wedge y \underset{F}{\leftrightarrow} x'\right) \mathbb{P}\left(x \wedge y \underset{F}{\leftrightarrow} y'\right)} \\ &= \frac{\mathbb{P}\left(x \wedge y \underset{F}{\leftrightarrow} x', x \wedge y \underset{F}{\leftrightarrow} y'\right)}{\mathbb{P}\left(o \underset{F}{\leftrightarrow} x \wedge y\right) p^2} \leq \frac{1}{p^2} \frac{1}{\mathbb{P}\left(o \leftrightarrow x \wedge y\right)}. \quad \square \end{aligned}$$

2. En remplaçant $\frac{1}{p^2}$ par une constante finie M quelconque, on obtient la définition des percolations quasi-indépendantes de Lyons.

Ceci va nous permettre d'utiliser la méthode du deuxième moment.

Théorème III.14. *Soit F une percolation sur un arbre enraciné (\mathbf{t}, o) vérifiant la condition (PB_p) . Alors,*

$$p > \frac{1}{\text{br } \mathbf{t}} \implies \mathbb{P} \left(o \overset{F}{\leftrightarrow} \infty \right) \implies \mathbb{P} (F \text{ a un amas infini}) = 1.$$

Démonstration. Peu de choses vont changer par rapport au paragraphe 3.3. Nous en conservons les notations. Si Π est une coupe entre o et l'infini, d'après (III.8), son énergie est

$$\mathcal{E}(\mu) := \sum_{\vec{x}, \vec{y} \in \Pi} \mu(\vec{x}) \mu(\vec{y}) \frac{\mathbb{P} \left(o \overset{F}{\leftrightarrow} x, o \overset{F}{\leftrightarrow} y \right)}{\mathbb{P} \left(o \overset{F}{\leftrightarrow} x \right) \mathbb{P} \left(o \overset{F}{\leftrightarrow} y \right)} \quad (\text{III.24})$$

$$\leq \frac{1}{p^2} \sum_{\vec{x}, \vec{y} \in \Pi} \frac{\mu(\vec{x}) \mu(\vec{y})}{\mathbb{P} \left(o \overset{F}{\leftrightarrow} x \wedge y \right)} =: \frac{1}{p^2} \mathcal{E}'(\mu) \quad (\text{III.25})$$

On associe à la percolation F des résistances sur les arêtes qui vérifient l'équation III.11. On vérifie immédiatement qu'on a encore

$$\forall x \in \mathbf{V}(\mathbf{t}), \quad r(\vec{x}) = (1-p)p^{|\mathbf{x}|}.$$

Les résistances associées à la percolation F sont donc les mêmes que celles de la percolation de Bernoulli, de paramètre p . En associant à la mesure de probabilité μ sur Π un flot θ unitaire entre o et $\bar{\Pi}$ (comme à la proposition III.7) il vient encore

$$\min_{\mu \in \mathcal{M}_1(\Pi)} \mathcal{E}'(\mu) = \min_{\theta} \left\{ 1 + \|\theta\|_r^2 \right\} = 1 + \mathbf{R}(o, \bar{\Pi})$$

Il ne reste plus qu'à reprendre mot pour mot la fin du paragraphe 3.3 pour obtenir

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(o \overset{F}{\leftrightarrow} \infty \right) &\geq \frac{1}{\inf_{\Pi \in \text{Cutset}_{\mathbf{t}}(o, \infty)} \left(\min_{\mu \in \mathcal{M}_1(\Pi)} \mathcal{E}(\mu) \right)} \\ &\geq \frac{p^2}{\inf_{\Pi \in \text{Cutset}_{\mathbf{t}}(o, \infty)} \left(\min_{\mu \in \mathcal{M}_1(\Pi)} \mathcal{E}'(\mu) \right)} \geq \frac{p^2}{1 + \mathbf{R}(o, \infty)} \quad \square \end{aligned}$$

Remarque III.3. La méthode du premier moment s'applique également à l'identique à la percolation F . Aussi, si $p < \frac{1}{\text{br } \mathbf{t}}$, alors $\mathbb{P} \left(o \overset{F}{\leftrightarrow} \infty \right) = 0$.

Proposition III.15. *Avec les mêmes hypothèses qu'au théorème précédent, soient $p' \in]0; 1[$ et, pour $\mathbf{f} \in \mathcal{P}_{\mathbf{E}}(\mathbf{t})$, soit*

$$F'_{p', \mathbf{f}}: (\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}') \longrightarrow (\mathcal{P}_{\mathbf{E}}(\mathbf{t}), \mathcal{A}_{\mathbf{E}}(\mathbf{t}))$$

une percolation de Bernoulli sur \mathfrak{f} . Alors, la percolation

$$\begin{aligned} F: (\Omega \times \Omega', \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}', \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}') &\longrightarrow (\mathcal{P}_{\mathbb{E}}(\mathfrak{t}), \mathcal{A}_{\mathbb{E}}(\mathfrak{t})) \\ (\omega, \omega') &\longmapsto F'_{p', F(\omega)}(\omega') \end{aligned}$$

vérifie la condition $(PB_{pp'})$.

Démonstration. Il suffit de reprendre exactement les mêmes arguments que dans la discussion qui précède la proposition III.11. □

Corollaire III.16. Soit F une percolation sur un arbre enraciné (\mathfrak{t}, o) vérifiant la condition (PB_p) avec $p > \frac{1}{\text{br } \mathfrak{t}}$. Alors,

$$p_c(F) = \frac{1}{p \text{ br } \mathfrak{t}} \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-arbre aléatoire T_ε de F tel que

$$\text{br } T_\varepsilon > p \text{ br } \mathfrak{t} - \varepsilon \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Démonstration. Le premier point se démontre de la même manière que la proposition III.11 en utilisant les deux propositions et la remarque précédente. Le second point est ensuite justifié par la remarque III.2, et le théorème III.10. □

Chapitre IV

Arbres de Galton-Watson

1 Processus de Galton-Watson

On considère une suite de réels positifs $(p_k)_{k \geq 0}$ telle que

$$\sum_{k \geq 0} p_k = 1 \quad \text{et} \quad p_1 \neq 1$$

et une variable aléatoire L à valeurs entières telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(L = k) = p_k.$$

Soit $(L_i^n)_{i \geq 1, n \geq 0}$ une famille de variables aléatoires i.i.d. de même loi que L .

Définition IV.1. Un processus de Galton-Watson associé à la famille (p_k) est une suite $(Z_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} telles que :

$$Z_0 = 1 \quad \mathbb{P} - \text{p.s.}$$
$$\forall n \geq 0, \quad Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} L_i^{(n+1)}$$

Intuitivement, il s'agit d'étudier l'évolution d'une population se reproduisant de façon indépendante suivant la loi L : l'on part d'un unique individu qui a L fils, puis ses fils eux-même se reproduisent suivant L , etc. Z_n est alors le nombre d'individus de la génération n .

La suite d'événements $\{Z_n = 0\}_{n \geq 0}$ est croissante. Sa réunion est appelée *extinction* du processus de Galton-Watson.

Proposition IV.1. *Sur l'événement de non-extinction, on a presque sûrement*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = \infty.$$

Démonstration. Une suite d'entiers naturels diverge vers $+\infty$ si et seulement si elle n'admet aucune valeur d'adhérence. De plus, il est clair que (Z_n) est une chaîne de Markov irréductible dont l'espace d'états est inclus dans \mathbb{N} . Nous voulons montrer que le seul état éventuellement récurrent pour la chaîne est l'état 0.

Supposons d'abord que $p_0 = 0$. Soient k et n deux entiers non nuls tels que $\mathbb{P}(Z_n = k) \neq 0$.

$$\mathbb{P}(\exists n' > n, Z_{n'} = k \mid Z_n = k) < 1 - \mathbb{P}(Z_{n+1} > k \mid Z_n = k) = p_1^k < 1.$$

Si maintenant $p_0 = 0$, alors

$$\mathbb{P}(\exists n' > n, Z_{n'} = k \mid Z_n = k) < 1 - \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0 \mid Z_n = k) = 1 - p_0^k < 1. \quad \square$$

Nous désirons connaître la probabilité d'extinction du processus de Galton-Watson. Pour ce faire, commençons par considérer la fonction génératrice f de la variable aléatoire L , c'est-à-dire :

$$\forall s \in [0; 1], \quad f(s) = \sum_{k \geq 0} p_k s^k.$$

Le rayon de convergence de cette série entière est supérieur ou égal à 1, aussi f est de classe C^∞ sur l'intervalle $[0; 1[$. De plus, $f(0) = p_0$ et $f(1) = 1$. Il est également assez facile de vérifier que f est convexe et strictement croissante sur l'intervalle $[0; 1]$.

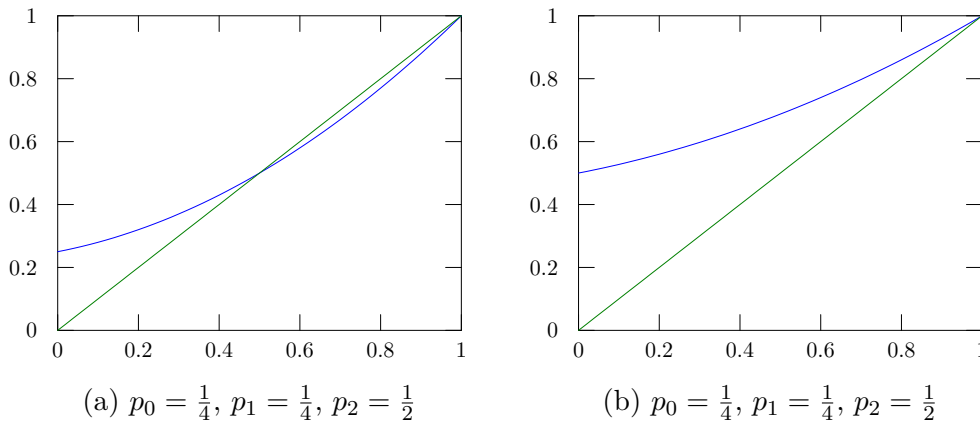


FIGURE IV.1 – Représentation de deux exemples de fonctions génératrices

Dans le cas d'un processus de Galton-Watson, la fonction génératrice a d'étonnantes propriétés.

Proposition IV.2. *Pour tout $s \in [0; 1]$,*

1. pour tout entier n ,

$$\mathbb{E} \left[s^{Z_{n+1}} \mid Z_n \right] = f(s)^{Z_n} ; \quad (\text{IV.1})$$

2. pour tout entier n , la fonction génératrice de la variable aléatoire Z_n est donnée par

$$\mathbb{E} \left[s^{Z_n} \right] = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n(s) := f^n(s) ;$$

3. la probabilité d'extinction q vaut $q = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(0)$.

Démonstration. 1. Cette espérance conditionnelle se calcule en utilisant l'indépendance des variables aléatoires $L_i^{(n+1)}$ et Z_n :

$$\mathbb{E} \left[s^{Z_{n+1}} \mid Z_n \right] = \mathbb{E} \left[s^{\sum_{i=1}^{Z_n} L_i^{(n+1)}} \mid Z_n \right] = \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^{Z_n} s^{L_i^{(n+1)}} \mid Z_n \right] = \prod_{i=1}^{Z_n} \mathbb{E} \left[s^{L_i} \right].$$

2. Ensuite, si g_n désigne la fonction génératrice de la variable aléatoire Z_n ,

$$\mathbb{E} \left[s^{Z_{n+1}} \right] = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[s^{Z_{n+1}} \mid Z_n \right] \right] = \mathbb{E} \left[f(s)^{Z_n} \right] = g_n(f(s))$$

Ainsi, $g_{n+1} = g_n \circ f$ et le résultat est obtenu par une récurrence évidente.

3. Enfin, comme $g_n = f^n$ est la fonction génératrice de Z_n ,

$$\mathbb{P}(Z_n = 0) = g_n(0) = f^n(0)$$

donc la probabilité q d'extinction vaut

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{n \geq 0}^{\uparrow} \{Z_n = 0\} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n = 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(0). \quad \square$$

Théorème IV.3. Notons $m = \mathbb{E}[L]$ et (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

* Si $m \leq 1$, alors dans le processus de Galton-Watson, il y a presque sûrement extinction ($q = 1$). De plus, on a

$$f'(1) = m \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1.$$

* Si $m > 1$, alors dans le processus de Galton-Watson, il y a extinction avec probabilité $q < 1$, où q est le plus petit point fixe de la fonction f . De plus, on a

$$f'(1) = m \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = q.$$

Démonstration. Cela se déduit de la proposition précédente et des quelques rappels d'analyse élémentaire de la section ci-dessous. \square

2 Un peu d'analyse élémentaire

Théorème IV.4 (Théorème « de la limite de la dérivée »). Soient a et b deux réels et f une fonction continue sur $]a; b[$ et dérivable sur $]a; b[$.

- * Si $\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x) = \ell < \infty$, alors f est dérivable (à gauche) en b et $f'_g(b) = \ell$.
- * Si $\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x) = \pm\infty$, alors « la dérivée à gauche de f en b est infinie », c'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \pm\infty.$$

Démonstration. Soit $h > 0$ tel que $b - h \in]a; b[$. On considère le taux de variations :

$$\frac{f(b) - f(b - h)}{h}.$$

L'égalité des accroissements finis, appliquée à f entre $b - h$ et b montre qu'il existe un réel $\xi_h \in]b - h; b[$ tel que

$$\frac{f((b - h) + h) - f(b - h)}{h} = f'(\xi_h).$$

Enfin, on remarque que $\lim_{h \rightarrow 0^+} \xi_h = b$ et après composition des limites, le théorème est démontré. \square

Théorème IV.5 (Abel). Soit $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Si la série $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$ est convergente alors

$$\lim_{x \rightarrow R^-} f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n R^n$$

et f peut être ainsi prolongée par continuité.

On peut trouver la preuve de ce théorème dans tout ouvrage d'analyse élémentaire traitant des séries entières.

Dans le cas où $\sum_{n \rightarrow \infty} a_n R^n = +\infty$, on peut facilement généraliser le théorème d'Abel à condition que les termes généraux de la série entière soient positifs.

Proposition IV.6. $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On suppose que pour tout entier n , $a_n \geq 0$ et que $\sum_{n \rightarrow \infty} a_n R^n = +\infty$. Alors,

$$\lim_{x \rightarrow R^-} f(x) = +\infty.$$

Démonstration. On utilise le lemme de Fatou :

$$\infty = \sum_{n \geq 0} \left(\lim_{x \rightarrow R^-} a_n x^n \right) \leq \lim_{x \rightarrow R^-} \sum_{n \geq 0} a_n x^n. \quad \square$$

Il y a un résultat analogue pour la fonction dérivée en R .

Proposition IV.7. $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ pour laquelle il y a aussi convergence en R .

1. Si la série $\sum_{n \geq 1} na_{n-1}R^{n-1}$ converge, alors f est dérivable (à gauche) en R et

$$f'_g(R) = \lim_{x \rightarrow R^-} f'(x) = \sum_{n \geq 1} na_{n-1}R^{n-1}.$$

2. Si les a_n sont positifs et la série $\sum_{n \geq 1} na_{n-1}R^{n-1}$ diverge vers $+\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow R^-} \frac{f(x) - f(R)}{x - R} = \lim_{x \rightarrow R^-} f'(x) = \sum_{n \geq 1} na_{n-1}R^{n-1} = +\infty.$$

Démonstration. Le théorème d'Abel (IV.5) commence par nous assurer que la fonction f est bien continue sur $[0; R]$ et que $f(R) = \sum_{n \geq 0} a_n R^n$, aussi la question de la dérivabilité à gauche de f en R se pose vraiment.

1. Toujours d'après le théorème d'Abel, on peut prolonger f' par continuité sur $[0; R]$. Notons g cette fonction prolongée. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow R^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow R^-} g(x) = g(R) = \sum_{n \geq 1} na_{n-1}R^{n-1}.$$

Le théorème de la limite de la dérivée (IV.4) s'applique alors pour établir que f est bien dérivable à gauche en R et que l'on a :

$$f'_g(R) = \sum_{n \geq 1} na_{n-1}R^{n-1}.$$

2. On applique cette fois la proposition IV.6 à la fonction f' :

$$\lim_{x \rightarrow R^-} f'(x) = \sum_{n \geq 1} na_{n-1}R^{n-1} = +\infty.$$

Mais alors le deuxième point du théorème de la limite de la dérivée achève notre preuve. □

Nous concluons cette section en terminant la démonstration du théorème IV.3.

Lemme IV.8. Soit $f: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$, distincte de la fonction identité et telle que :

- a) $f(0) > 0$ et $f(1) = 1$;
- b) f est continue sur $[0; 1]$, deux fois dérivable sur $[0; 1[$;
- c) sur $]0; 1[$, $f' > 0$ et $f'' > 0$.

Alors, la limite

$$f'_g(1) := \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) \in]0; \infty]$$

est bien définie. De plus, la fonction f a exactement deux points fixes sur $[0; 1]$ si et seulement si $f'_g(1) > 1$. Dans le cas contraire, elle admet un seul point fixe qui est 1.

Démonstration. Comme sur $]0; 1[$, $f'' > 0$. La fonction f' est strictement croissante sur $]0; 1[$, donc la limite $f'_g(1) := \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x)$ existe dans $]0; \infty]$ et d'après le théorème IV.4 c'est bien la dérivée à gauche en 1 (éventuellement infinie). Il ne reste ensuite plus qu'à étudier la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$.

Si $f'_g(1) \leq 1$, alors l'étude de la fonction g conduit au tableau de variations IV.2. Tandis que si $f'_g(1) > 1$ (en particulier si $f'_g(1) = +\infty$), on obtient le tableau de

x	0	1
$g''(x)$	⋮	⋮
$g'(x)$	+	$f'_g(1) - 1 \leq 0$
$g(x)$	$f(0)$	0

FIGURE IV.2 – Tableau de variations de g dans le cas où $f'_g \leq 1$

variation IV.3. □

3 Croissance typique de la taille des générations

On commence par un beau résultat de martingales.

Proposition IV.9. *Supposons $0 < m < \infty$. La variable aléatoire $M_n = \frac{Z_n}{m^n}$ est une martingale positive. Elle converge presque sûrement vers une variable aléatoire W à valeurs dans $[0; \infty[$.*

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[Z_n] = m^n$.

x	0	q	α	1
$g''(x)$			+	
$g'(x)$	$g'(0) < 0$		0	$f'_g(1) - 1 > 0$
$g(x)$	$f(0) > 0$	0	$g(\alpha) < 0$	0

FIGURE IV.3 – Tableau de variations de g dans le cas où $f'_g > 1$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid M_n]$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{n+1} \mid M_n] &= \frac{1}{m^{n+1}} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{Z_n} L_i^{(n+1)} \mid Z_n \right] \\ &= \frac{1}{m^{n+1}} \sum_{i=1}^{Z_n} \mathbb{E}[L] \\ &= \frac{1}{m^{n+1}} Z_n \times m = M_n. \end{aligned}$$

La première conséquence en est que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_0] = 1$, donc $\mathbb{E}[Z_n] = m^n$.

Puis par le théorème de convergence des martingales positives (voir par exemple le théorème 3.8 dans [BMP00] ou le paragraphe 12.3 dans [LG06]), M_n converge presque-sûrement vers une variable aléatoire W qui est finie presque sûrement sur $\{M_0 < \infty\}$, c'est-à-dire ici presque sûrement. \square

Sur l'événement $\{W > 0\}$, le nombre Z_n de sommets à hauteur n est donc de l'ordre de m^n . Évidemment, sur l'extinction, W est nulle presque sûrement, mais a-t-on toujours pour autant $W > 0$ sur l'événement de non-extinction? Et quand avons-nous $\mathbb{E}[W] = \mathbb{E}[M_0] = 1$? Ceci est précisé par le théorème de Kesten-Stigum ([KS66]) que nous ne démontrerons pas ici.

Théorème IV.10 (Théorème de Kesten-Stigum (1966)). *Dans le cas où $1 < m < \infty$, les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathbb{P}(W = 0) = q$;

2. $\mathbb{E}[W] = 1$;
3. $\mathbb{E}[L \log^+ L] < \infty$.

Sur la même problématique, nous allons en revanche démontrer le théorème suivant, dû à Seneta ([Sen68]) et Heyde ([Hey10]).

Théorème IV.11 (Théorème de Seneta-Heyde). *Dans le cas où $1 < m < \infty$, il existe des constantes c_n et une variable aléatoire Y telles que :*

1. $\frac{Z_n}{c_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} Y$, presque-sûrement ;
2. Y est presque sûrement finie ;
3. $\mathbb{P}(Y = 0) = q$, c'est-à-dire $Y > 0$ presque-sûrement sur l'événement de non-extinction ;
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = m$.

Pour en faire la démonstration, nous allons prendre un peu de hauteur : plutôt que de ne s'intéresser qu'aux tailles (Z_n) des générations, nous allons considérer tout l'arbre généalogique associé aux $(L_n^{(i)})_{i,n \in \mathbb{N}}$. Ce faisant, nous créons un *arbre aléatoire*. Nous donnons un sens précis à ce concept dans le paragraphe suivant.

4 Espace des arbres planaires enracinés

4.1 Notation de Neveu

Nous utilisons ici la notation de J. Neveu ([Nev86]). Elle permet d'étiqueter de façon simple les sommets des arbres et fournit un espace d'arbres sur lequel il sera commode de travailler¹.

Soit $\mathcal{U} = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{N}^{*n}$ l'ensemble des mots finis sur \mathbb{N} , avec $\mathbb{N}^0 := \{o\}$, où o est le mot vide.

Un arbre planaire enraciné \mathbf{t} est un arbre enraciné en o dont l'ensemble $\mathbf{V}(\mathbf{t})$ est une partie de \mathcal{U} vérifiant les propriétés suivantes :

- * $o \in \mathbf{V}(\mathbf{t})$;
- * $u_1 \dots u_{k-1} u_k \in \mathbf{V}(\mathbf{t}) \implies \forall v \in \{1, 2, \dots, u_k\}, u_1 \dots u_{k-1} v \in \mathbf{V}(\mathbf{t})$.

Le père du sommet $x = u_1 u_2 \dots u_{k-1} u_k \neq o$ est alors défini comme étant $x_* = u_1 u_2 \dots u_{k-1}$. Les arêtes de \mathbf{t} sont les couples (père, fils) et (fils, père). Il est clair que le graphe \mathbf{t} ainsi défini est bien un arbre. La hauteur d'un sommet x dans (\mathbf{t}, o) coïncide avec sa longueur comme mot de \mathcal{U} . Notons \mathcal{T} l'ensemble des arbres planaires enracinés.

1. La topologie des graphes pointés connexes et localement finis, très similaire, est décrite dans les notes de cours de N. Curien ([Cur15]). Grâce à la notation de Neveu, nous n'avons pas besoin avec les arbres de travailler à isomorphisme près, contrairement à ce que l'on doit faire avec les graphes.

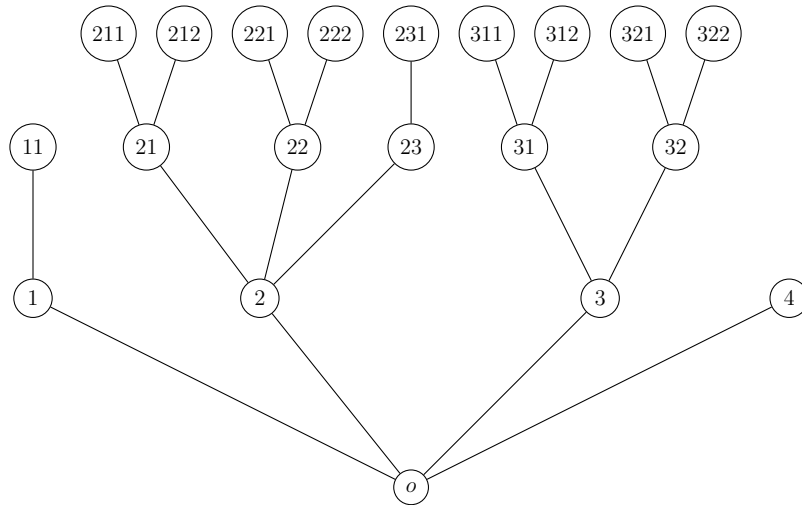


FIGURE IV.4 – Un arbre planaire enraciné étiqueté avec la notation de Neveu.

Tout arbre peut être représenté de cette façon. Il suffit de l'enraciner, puis d'ordonner les fils de chacun de ses sommets.

Si $\mathbf{t} \in \mathcal{T}$, on note $\mathbf{t}|_r$ le sous-arbre de \mathbf{t} induit par les sommets de hauteur inférieure ou égale à r , c'est-à-dire dont les sommets sont les éléments de $(\bigcup_{n=0}^r \mathbb{N}^{*k}) \cap \mathbf{V}(\mathbf{t})$. On définit sur \mathcal{T} une distance ultramétrique en posant

$$d(\mathbf{t}, \mathbf{t}') = (1 + \sup \{r \geq 0 \mid \mathbf{t}|_r = \mathbf{t}'|_r\})^{-1}.$$

Autrement dit, deux arbres sont proches si ils coïncident jusqu'à une grande hauteur. Cette distance fait de \mathcal{T} un espace polonais (c'est-à-dire un espace métrique complet séparable) dont les boules, à la fois ouvertes et fermées sont les ensembles du type

$$[\mathbf{t}]_r = \{\mathbf{t}' \in \mathcal{T} \mid \mathbf{t}'|_r = \mathbf{t}|_r\}.$$

On munit \mathcal{T} de sa tribu borélienne. Un arbre (planaire enraciné) aléatoire est une application mesurable d'un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dans \mathcal{T} muni de sa tribu borélienne. Par un argument de classe monotone, une mesure borélienne de probabilité μ sur \mathcal{T} est complètement déterminée par la donnée des valeurs $\mu([\mathbf{t}]_r)$, où r parcourt \mathbb{N} et \mathbf{t} l'ensemble des arbres finis dans \mathcal{T} .

Enfin, si $\mathbf{t} \in \mathcal{T}$ et x est un sommet de \mathbf{t} , le sous-arbre de \mathbf{t} issu de x peut être canoniquement représenté par $\mathbf{t}^{(x)} \in \mathcal{T}$ dont l'ensemble des sommets est

$$\mathbf{V}(\mathbf{t}^{(x)}) = \{u \in \mathcal{U} \mid xu \in \mathbf{V}(\mathbf{t})\}.$$

4.2 Loi des arbres de Galton-Watson

Revenons sur les arbres de Galton-Watson. Si l'on se donne les variables i.i.d $(L_i^{(n)})_{i \geq 1, n \geq 0}$, comme dans le premier paragraphe de ce chapitre, on peut facilement

construire l'arbre généalogique T associé, étage par étage. Si l'arbre est construit jusqu'à une hauteur $n \geq 0$, on trie l'ensemble des sommets à hauteur n dans l'ordre lexicographique :

$$\{x \in \mathbf{V}(T) \mid |x| = n\} =: \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_{Z_n}^{(n)}\}$$

puis l'on associe à chaque sommet $x_i^{(n)}$ son nombre de fils

$$\nu_T(x_i^{(n)}) := L_i^{(n)}$$

et on étiquette les fils des $x_i^{(n)}$ avec la notation de Neveu. L'application T obtenue est bien mesurable : il suffit de vérifier que pour tout r et tout arbre fini \mathbf{t} de hauteur inférieure ou égale à r , l'ensemble $\{T|_r = \mathbf{t}\}$ l'est, ce qui est clair. De plus, la loi de T est entièrement déterminée par l'égalité

$$\mathbb{P}(T|_r = \mathbf{t}) = \prod_{x \in \mathbf{V}(\mathbf{t})} \mathbb{P}(L = \nu_{\mathbf{t}}(x)). \quad (\text{IV.2})$$

Tout arbre aléatoire vérifiant cette propriété est appelé arbre de Galton-Watson de loi de reproduction L et l'on note \mathbf{GW}_L sa loi. On retrouve le processus de Galton-Watson (Z_n) en posant

$$Z_n = \text{Card} \{x \in \mathbf{V}(T) \mid |x| = n\}.$$

Proposition IV.12. *Soit T un arbre aléatoire. Alors T suit la loi \mathbf{GW}_L si et seulement si $\nu_T(o)$ a la même loi que L et pour tout k tel que $\mathbb{P}(\nu_T(o) = k) > 0$, conditionnellement à $\nu_T(o) = k$ les arbres aléatoires $T^{(1)}, T^{(2)}, \dots, T^{(k)}$ sont i.i.d de même loi que T .*

Démonstration. Par un argument de classe monotone, la dernière condition s'écrit

$$\mathbb{P}(T^{(1)}|_r = \mathbf{t}_1, T^{(2)}|_r = \mathbf{t}_2, \dots, T^{(k)}|_r = \mathbf{t}_k \mid \nu_T(o) = k) = \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(T|_r = \mathbf{t}_i), \quad (\text{IV.3})$$

pour tout $r \geq 0$ et tous arbres $\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_r$, de hauteur inférieure ou égale à r .

En considérant l'arbre \mathbf{t} de hauteur $r+1$, dont la racine a k fils et tel que $\mathbf{t}^{(i)} = \mathbf{t}_i$ pour tout i entre 1 et k , on voit que le terme de gauche est égal à

$$\mathbb{P}(T|_{r+1} = \mathbf{t} \mid \nu_T(o) = k)$$

et l'équivalence avec (IV.2) s'en déduit. \square

4.3 Héritage

Sur l'ensemble \mathcal{T} des arbres planaires enracinés, on appelle *propriété héritée* toute propriété \mathcal{P} telle que :

- * Tout arbre fini vérifie \mathcal{P} .
- * Si un arbre $\mathbf{t} \in \mathcal{T}$ vérifie \mathcal{P} , alors les sous-arbres issus des fils de o , c'est-à-dire $\mathbf{t}^{(1)}, \dots, \mathbf{t}^{(u(o))}$, vérifient aussi \mathcal{P} .

Proposition IV.13. *Soit T un arbre aléatoire suivant la loi GW_L avec $m > 1$ et \mathcal{P} une propriété héritée sur l'ensemble des arbres. Alors, T vérifie la propriété \mathcal{P} avec probabilité 1 ou q .*

Démonstration. Notons A l'ensemble des arbres vérifiant la propriété \mathcal{P} .

Tout d'abord, en rappelant que Z_1 est le nombre de fils de la racine,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T \in A) &= \mathbb{E}[\mathbb{P}(T \in A \mid Z_1)] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left(T^{(1)} \in A, T^{(2)} \in A, \dots, T^{(Z_1)} \in A \mid Z_1\right)\right] \end{aligned}$$

car si l'un de ces sous-arbres n'a pas la propriété \mathcal{P} , c'est que T ne l'avait pas non plus. Puis, en utilisant la propriété IV.12,

$$\mathbb{P}(T \in A) \leq \mathbb{E}\left[\mathbb{P}(T \in A)^{Z_1}\right] = f(\mathbb{P}(T \in A)).$$

Par ailleurs, comme la propriété \mathcal{P} est vérifiée par les arbres finis, on a $\mathbb{P}(T \in A) \geq q$. Un coup d'œil sur la courbe de la fonction f (figure IV.1a) permet de se convaincre que $\mathbb{P}(T \in A)$ vaut soit q soit 1. \square

En fait, cette loi du « $q - 1$ » donne déjà gratuitement le résultat qui suit.

Corollaire IV.14. *Supposons que $1 < m < \infty$, alors $\mathbb{P}(W = 0) = q$ ou 1.*

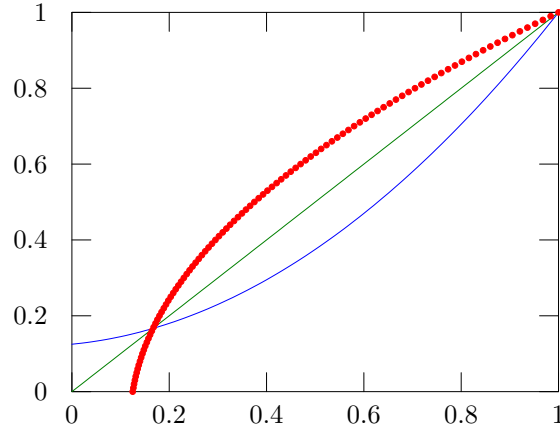
Démonstration. Nous gardons les mêmes notations qu'à la démonstration précédente. À chaque sous-arbre $T^{(i)}$, pour $i \in \{1, 2, \dots, Z_1\}$, on associe le processus $(Z_n^{(i)})_{n \geq 0}$, où $Z_n^{(i)}$ est le nombre de sommets à hauteur n dans l'arbre $T^{(i)}$, puis la variable aléatoire

$$W^{(i)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z_n^{(i)}}{m^n}.$$

On a alors pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{Z_n}{m^n} = m \sum_{i=1}^{Z_1} \frac{Z_{n-1}^{(i)}}{m^{n-1}} \quad \text{de sorte que} \quad W = m \sum_{i=1}^{Z_1} W^{(i)}.$$

Sur l'événement $\{W = 0\}$, on a donc pour tout $i = 1, \dots, Z_1$, $W^{(i)} = 0$. La propriété $(W = 0)$ est bien héritée. \square

FIGURE IV.5 – Fonction réciproque de f , utilisée pour définir la martingale $(s_n^{z_n})$

Passons maintenant à la démonstration du théorème de Seneta-Heyde.

Démonstration du théorème de Seneta-Heyde. Nous allons définir une nouvelle martingale. La fonction génératrice f définit une bijection de $[q, 1]$ dans lui-même (voir la figure IV.5 ci-dessous). Choisissons un s_0 quelconque dans $]q; 1[$ et définissons la suite (s_n) par

$$\forall n \geq 0, \quad s_{n+1} = f^{-1}(s_n).$$

La suite (s_n) est croissante et converge vers 1. Le processus $(s_n^{z_n})$ est une martingale. En effet, d'après la formule (IV.1) et la propriété de Markov,

$$\mathbb{E} [s_n^{Z_n} \mid Z_0, \dots, Z_{n-1}] = f(s_n)^{Z_{n-1}} = f(f^{-1}(s_{n-1}))^{Z_{n-1}} = s_{n-1}^{Z_{n-1}}.$$

De plus, cette martingale est positive et bornée par 1, donc en particulier uniformément intégrable. Elle converge ainsi presque sûrement et dans L^1 vers une variable aléatoire S . De plus,

$$\mathbb{E} [S] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [s_n^{Z_n}] = \mathbb{E} [s_0^{Z_0}] = s_0.$$

Posons

$$c_n := -\frac{1}{\ln s_n} \quad \text{de sorte que} \quad s_n^{Z_n} = e^{-Z_n/c_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{\ln(S)}.$$

Le premier point est justifié, en posant $Y = -\ln(S)$.

Par ailleurs, d'après le théorème IV.3 et la règle de l'Hôpital,

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} \frac{-\ln(f(s))}{-\ln(s)} = \lim_{s \rightarrow 1^-} \frac{f'(s)s}{f(s)} = m.$$

En composant, on obtient le quatrième point : $\lim_{n \rightarrow \infty} c_{n+1}/c_n = m$.

Ceci va nous permettre de terminer la démonstration en utilisant l'héritage. On reprend les notations de la démonstration du corollaire IV.14 et pour $i = 1, \dots, Z_1$, on note $Y^{(i)}$ la limite presque sûre du processus $\left(\frac{Z_n^{(i)}}{c_n}\right)$. On obtient

$$\frac{Z_n}{c_n} = \frac{c_n}{c_{n-1}} \sum_{i=1}^{Z_1} \frac{Z_{n-1}^{(i)}}{c_{n-1}}, \quad \text{donc} \quad Y = m \sum_{i=1}^{Z_1} Y^{(i)}.$$

Les variables aléatoires Y et $Y^{(i)}$ étant positives, on en déduit que les propriétés ($Y < \infty$) et ($Y = 0$) sont héritées donc ont une probabilité égale à 1 ou q .

Comme $\mathbb{E}[S] = s_0 \in]q; 1[$, la probabilité de l'événement $\{S = 1\}$ est égale à q , ce qui prouve le troisième point.

Enfin, la probabilité $\mathbb{P}(S > 0)$ ne peut être égale à q , sinon on aurait

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[S \mathbf{1}_{\{S > 0\}}] \leq \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{S > 0\}}] = q,$$

ce qui prouve le deuxième point et achève cette démonstration. \square

Le théorème de Seneta-Heyde permet en particulier de calculer la croissance de l'arbre de Galton-Watson.

Proposition IV.15. *Soit T un arbre de Galton-Watson, dans le cas où $1 < m < \infty$. Alors, presque sûrement sur l'événement de non-extinction, $\text{gr}(T) = m$.*

Démonstration. Dans ce contexte, la croissance si elle est bien définie n'est autre que la variable aléatoire

$$\text{gr}(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} (Z_n)^{1/n}.$$

Avec les mêmes notations que le théorème de Seneta-Heyde, on a pour tout n ,

$$(Z_n)^{1/n} = \exp \left[\frac{1}{n} \ln \frac{Z_n}{c_n} + \frac{1}{n} \ln c_n \right]$$

Or, $\ln \frac{Z_n}{c_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ln Y < \infty$, donc $\frac{1}{n} \ln \frac{Z_n}{c_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Il ne reste plus qu'à justifier que $\frac{1}{n} \ln c_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ln m$, ce qui résulte du lemme classique qui suit. \square

Lemme IV.16. *Soit (c_n) une suite de réels strictement positifs.*

$$\text{Si} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = m > 0, \quad \text{alors} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n^{1/n} = m.$$

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$ et $N \leq n$, on a

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{1}{c_n^n} \right) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n (\ln(c_k) - \ln(c_{k-1})) + \frac{1}{n} \ln(c_0) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^N (\ln(c_k) - \ln(c_{k-1})) + \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n (\ln(c_k) - \ln(c_{k-1})) + \frac{1}{n} \ln(c_0) \end{aligned}$$

On fixe N tel que pour tout $n > N$, $|\ln(c_k) - \ln(c_{k-1}) - \ln(m)| \leq \varepsilon$. On a alors

$$\frac{n-N}{n}(\ln m - \varepsilon) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n (\ln(c_k) - \ln(c_{k-1})) \leq \frac{n-N}{n}(\ln m + \varepsilon).$$

On fait tendre n vers l'infini et on obtient

$$\ln m - \varepsilon \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \ln(c_n^{1/n}) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \ln(c_n^{1/n}) \leq \ln m + \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout ε , cela achève cette démonstration. \square

Ceci implique en particulier, d'après la proposition II.24 que si T est un arbre de Galton-Watson, $\text{br} T \leq m$ presque-sûrement. Il y a en fait égalité et nous allons le montrer (sans même utiliser cette inégalité) en utilisant la théorie de la percolation développée au chapitre précédent.

5 Percolation sur un arbre de Galton-Watson

Proposition IV.17. *Soit T un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction L et $p \in]0; 1[$. Soit $K_o^p(T)$ l'arbre obtenu en faisant une percolation de Bernoulli de paramètre p sur T , puis en prenant l'amas de la racine o et en réordonnant les sommets. Alors $K_o^p(T)$ a la même loi qu'un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction $L^{(p)}$ donnée par*

$$L^{(p)} = \sum_{i=1}^L B_i$$

où les B_i sont des variables indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p , et indépendantes de L .

En particulier, si $\mathbb{E}(L) = m$, alors $\mathbb{E}(L^{(p)}) = mp$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser la propriété IV.12. La dernière égalité est obtenue en écrivant

$$\mathbb{E}[L^{(p)}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[L^{(p)} \mid L]] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^L B_i \mid L\right]\right] = \mathbb{E}[pL] = mp. \quad \square$$

Théorème IV.18. *Soit T un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction L avec $\mathbb{E}(L) = m > 1$. Alors, presque sûrement sur l'événement de non extinction,*

$$p_c(T) = \frac{1}{m}. \quad (\text{IV.4})$$

Démonstration. On fait vivre une (très grande) famille de variables aléatoires indépendantes $\left(U^{(\vec{x})}\right)_{x \in \mathcal{U}}$, de loi uniforme sur $[0; 1]$ sur un espace de probabilité $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ puis on définit les variables aléatoires indépendantes

$$\forall p \in]0; 1[, \quad \forall x \in \mathcal{U}, \quad B_p^{(\vec{x})} = \mathbf{1}_{\{U^{(\vec{x})} < p\}}.$$

L'arbre de Galton-Watson T est une variable aléatoire définie sur un autre espace de probabilités :

$$T : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathcal{T})).$$

Soit q la probabilité d'extinction pour T . Nous devons montrer que

$$\mathbb{P}\left(p_c(T) = \frac{1}{m}\right) = 1 - q$$

ou encore,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{p < \frac{1}{m} \\ p \in \mathbb{Q}}} \{\omega \in \Omega \mid \mathbb{P}'[\mathcal{K}_o^p(T(\omega)) \text{ est infini}] > 0\} \cup \bigcap_{\substack{p > \frac{1}{m} \\ p \in \mathbb{Q}}} \{\omega \in \Omega \mid \mathbb{P}'[\mathcal{K}_o^p(T(\omega)) \text{ est infini}] = 0\}\right) = q \quad (\text{IV.5})$$

On commence par régler le compte des termes du haut. Si $p \leq 1/m$, on sait d'après la proposition IV.17 que $\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}'$ presque-sûrement, $\mathcal{K}_o^p(T)$ est fini. En conséquence,

$$\mathbb{E} \otimes \mathbb{E}'\left(\mathbf{1}_{\{\mathcal{K}_o^p(T) \text{ est infini}\}}\right) = 0$$

puis par Fubini,

$$\mathbb{E}(\mathbb{P}'[\mathcal{K}_o^p(T) \text{ est infini}]) = 0$$

et finalement,

$$\mathbb{P}'[\mathcal{K}_o^p(T) \text{ est infini}] = 0 \quad \mathbb{P}\text{-p-s.}$$

On s'occupe maintenant des termes du bas. Fixons $p = 1/m + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ très petit. Toujours d'après la proposition IV.17,

$$\mathbb{E}(\mathbb{P}'[\mathcal{K}_o^p(T) \text{ est infini}]) > 0$$

donc en particulier

$$\mathbb{P}(\mathbb{P}'[\mathcal{K}_o^p(T) \text{ est infini}] > 0) > 0$$

Mais la propriété

$$\{\mathbf{t} \in \mathcal{T} \mid \mathbb{P}'[\mathcal{K}_o^p(\mathbf{t}) \text{ est fini}] = 1\}$$

est héritée, donc d'après la proposition IV.13,

$$\mathbb{P}(\mathbb{P}'[\mathcal{K}_o^p(T) \text{ est fini}] = 1) \in \{1, q\}$$

et nous voyons ici que cette probabilité ne peut valoir 1, donc elle vaut q . Par conséquent, pour tout $p > 1/m$ (avec $p \in \mathbb{Q}$),

$$\{\omega \in \Omega \mid \mathbb{P}'[\mathcal{K}_o^p(T(\omega)) \text{ est infini}] = 0\} = \{\omega \in \Omega \mid T(\omega) \text{ est infini}\} \quad \mathbb{P}\text{-p-s.}$$

Cela achève cette preuve. □

Corollaire IV.19. *Avec les mêmes notations que précédemment, presque sûrement sur l'événement de non-extinction*

$$\text{br}(T) = m. \tag{IV.6}$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème précédent et du théorème III.10. □

Remarque IV.1. Ceci implique en particulier que si $\lambda > m$ (resp. $\lambda < m$), alors presque-sûrement sur l'événement de non-extinction, la marche aléatoire de biais λ est récurrente (resp. transiente).

Ici le cas limite peut être tranché. Si $\lambda = m$, la marche aléatoire est presque sûrement récurrente sur l'événement de non-extinction. Pour le montrer, il faut utiliser la proposition IV.17 et une réciproque du théorème III.9. On pourra consulter le paragraphe 5.6 dans le livre [LP14].

Chapitre V

Marche aléatoire en milieu aléatoire sur un arbre

1 Récurrence et récurrence positive

On considère un arbre infini enraciné (t, o) . Nous souhaitons étudier la marche aléatoire biaisée sur t dans le cas où *le biais est lui-même aléatoire*.

On se donne une variable aléatoire $\Lambda : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow]0; \infty[$ et une famille de variables aléatoires i.i.d sur le même espace de probabilité, de même loi que Λ indexée par $V(t) : (\Lambda_{\vec{x}})_{x \in V(t)}$, où la variable $\Lambda_{\vec{x}}$ n'intervient pas dans la définition de la marche aléatoire mais permettra d'obtenir des résultats plus simples et plus cohérents avec le cas déterministe.

À $\omega \in \Omega$ fixé, on peut donc définir une marche aléatoire réversible sur t de la même manière qu'au paragraphe 4.2. On obtient la matrice de transition Q^ω suivante (où $\nu(x)$ désigne le nombre de fils du sommet x).

$$Q^\omega(o, y) = \begin{cases} \frac{1}{\nu(o)} & \text{si } y \in \text{fils}(o) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
$$Q^\omega(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\Lambda_{\vec{x}}(\omega) + \nu(x)} & \text{si } y \in \text{fils}(x) \\ \frac{\Lambda_{\vec{x}}(\omega)}{\Lambda_{\vec{x}}(\omega) + \nu(x)} & \text{si } y = x_* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Toujours à ω fixé, on peut associer à cette chaîne de Markov une mesure réversible

$$\pi^\omega(x) = (\Lambda_{\vec{x}}(\omega) + \nu(x)) \prod_{o \leq y \leq x} (\Lambda_{\vec{y}}(\omega))^{-1}$$

puis des conductances

$$c^\omega(\vec{x}) = \prod_{o \leq y < x} (\Lambda_{\vec{y}}(\omega))^{-1},$$

où la constante multiplicative $\Lambda_{\vec{y}}(\omega)$ a été rajoutée pour nous simplifier (énormément) la vie. Vérifier que ces conductances et cette mesure conviennent n'est qu'un simple calcul.

La loi du zéro un de Kolmogorov permet d'affirmer que la marche aléatoire est soit transiente \mathbb{P} -p.s., soit récurrente \mathbb{P} -p.s. Se pose alors la question de déterminer, en fonction à la fois de l'arbre \mathbf{t} et de la loi de Λ , quel régime se produit.

De façon à ce stade peu surprenante, c'est le nombre de branchement $\text{br } \mathbf{t}$ qui intervient pour l'arbre. Pour la loi de Λ , la quantité qui intervient est le réel $\lambda \in [0; +\infty[$ défini par

$$\lambda^{-1} = \min_{0 \leq t \leq 1} \mathbb{E} \left(\Lambda^{-t} \right). \quad (\text{V.1})$$

Vérifions l'existence de ce minimum. On découpe

$$\mathbb{E} \left(\Lambda^{-t} \right) = \mathbb{E} \left(\Lambda^{-t} \mathbf{1}_{\{\Lambda \geq 1\}} \right) + \mathbb{E} \left(\Lambda^{-t} \mathbf{1}_{\{\Lambda < 1\}} \right).$$

La fonction $(t \mapsto \mathbb{E} \left(\Lambda^{-t} \mathbf{1}_{\{\Lambda \geq 1\}} \right))$ est continue sur $[0; 1]$ d'après le théorème de continuité de Lebesgue. La fonction $(t \mapsto \mathbb{E} \left(\Lambda^{-t} \mathbf{1}_{\{\Lambda < 1\}} \right))$ est continue à gauche d'après le théorème de convergence monotone. Ainsi, leur somme continue à gauche sur le compact $[0; 1]$ atteint sa borne inférieure.

Le théorème qui suit permet alors de connaître le régime presque sûr de la marche aléatoire en milieu aléatoire dans la plupart des cas.

Théorème V.1 ([LP92]). *Avec les définitions précédentes :*

1. Si $\lambda < \text{br } \mathbf{t}$, alors la marche aléatoire en milieu aléatoire est presque sûrement transiente.
2. Si $\lambda > \text{br } \mathbf{t}$, ou plus généralement si

$$\inf_{\Pi \in \text{Cutset}_t(o, \infty)} \sum_{\vec{x} \in \Pi} \lambda^{-|\vec{x}|} = 0,$$

alors la marche aléatoire est presque sûrement récurrente.

3. Si

$$\sum_{\vec{x} \in \mathbf{E}(\mathbf{t}, o)} \lambda^{-|\vec{x}|} < \infty,$$

alors la marche aléatoire est presque sûrement récurrente positive.

Démonstration des points 2. et 3. Commençons par démontrer le troisième point. Soit $t_0 \in [0; 1]$ tel que $\lambda^{-1} = \mathbb{E} \left(\Lambda^{-t_0} \right)$. En utilisant le théorème de Fubini puis l'indépendance des $\Lambda_{\vec{y}}$, on obtient

$$\mathbb{E} \left(\sum_{\vec{x} \in \mathbf{E}(\mathbf{t}, o)} c(\vec{x})^{t_0} \right) = \sum_{\vec{x} \in \mathbf{E}(\mathbf{t}, o)} \mathbb{E} \left(\prod_{o \leq y < x} \Lambda_{\vec{y}}^{-t_0} \right) = \sum_{\vec{x} \in \mathbf{E}(\mathbf{t}, o)} \lambda^{-|\vec{x}|} < \infty.$$

Ainsi, la série $\sum_{\vec{x} \in E(t,o)} c(\vec{x})^{t_0}$ est presque sûrement convergente. On en déduit d'abord que presque sûrement, les $c(\vec{x})$ sont inférieurs à 1, sauf peut-être un nombre fini d'entre eux, puis, comme pour $s \leq 1$, $s \leq s^{t_0}$, on obtient

$$\sum_{\vec{x} \in E(t,o)} c(\vec{x}) < \infty \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Les conductances étant presque sûrement sommables, il suffit pour conclure d'utiliser le théorème II.11.

Passons au deuxième point. Soit (Π_n) une suite de coupes entre o et l'infini telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\vec{x} \in \Pi_n} \lambda^{-|x|} = 0.$$

On note encore $c(\Pi_n) = \sum_{\vec{x} \in \Pi_n} c(\vec{x})$. En utilisant le lemme de Fatou, on obtient

$$\mathbb{E} \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} c(\Pi_n) \right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sum_{\vec{x} \in \Pi_n} c(\vec{x}) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\vec{x} \in \Pi_n} \lambda^{-|x|} = 0.$$

Ainsi, $\liminf_{n \rightarrow \infty} c(\Pi_n) = 0$ presque sûrement, donc

$$\inf \{c(\Pi) \mid \Pi \in \text{Cutset}_t(o, \infty)\} = 0 \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

D'après le corollaire II.20 (dédit du théorème FLOT-MAX/COUPE-MIN et de l'étude des réseaux électriques), la marche aléatoire est presque sûrement récurrente. \square

La démonstration du premier point est beaucoup plus délicate et nécessite les trois résultats qui suivent.

2 Trois résultats intermédiaires

2.1 Un peu d'analyse convexe

Le premier lemme nous permettra d'utiliser une autre forme de λ^{-1} , plus adaptée pour démontrer la transience.

Lemme V.2. *Avec les notations de la partie précédente,*

$$\lambda^{-1} = \min_{0 \leq t \leq 1} \mathbb{E}(\Lambda^{-t}) = \max_{0 < u \leq 1} \inf_{t \geq 0} u^{1-t} \mathbb{E}(\Lambda^{-t}). \quad (\text{V.2})$$

Ce résultat est une conséquence du théorème de dualité de Fenchel, dont la preuve peut être trouvée dans l'ouvrage de référence de Rockafellar ([Roc70], chapitre 31).

Théorème V.3 (Théorème de dualité de Fenchel). *Soit f une fonction convexe de \mathbb{R}^n dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ non identiquement égale à $+\infty$ et g une fonction concave de \mathbb{R}^n dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ non identiquement égale à $-\infty$. On définit, pour $s \in \mathbb{R}^n$,*

$$f^*(s) = \sup_{t \in \mathbb{R}^n} \{\langle s, t \rangle - f(t)\} \quad \text{et} \quad g^*(s) = \inf_{t \in \mathbb{R}^n} \{\langle s, t \rangle - g(t)\}$$

On note les domaines respectifs de f et de g $\text{dom } f = \{t \mid f(t) < \infty\}$, $\text{dom } g = \{t \mid g(t) > -\infty\}$ et pour une partie quelconque A de \mathbb{R}^n , on définit son intérieur relatif $\text{ri}(A)$ comme étant l'intérieur de A pour la topologie induite par le sous-espace affine qu'il engendre.

Si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1. $\text{ri dom } f \cap \text{ri dom } g \neq \emptyset$;
2. f est semi-continue inférieurement, g est semi-continue supérieurement et

$$\text{ri dom } f^* \cap \text{ri dom } g^* \neq \emptyset,$$

alors,

$$\inf_{t \in \mathbb{R}^n} \{f(t) - g(t)\} = \sup_{s \in \mathbb{R}^n} \{g^*(s) - f^*(s)\}. \quad (\text{V.3})$$

De plus, si la première condition est vérifiée, alors la borne supérieure est atteinte dans (V.3) et si la deuxième condition est vérifiée, la borne inférieure est atteinte.

Démonstration du lemme V.2. Les fonctions f et g sont définies par

$$f(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t < 0 \\ \ln(\mathbb{E}[\Lambda^{-t}]) & \text{sinon} \end{cases} \quad g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 1 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction f est convexe d'après l'inégalité de Hölder : si $\lambda \in]0; 1[$, en posant $p^{-1} = \lambda$ et $q^{-1} = 1 - \lambda$, on obtient pour tous $t, t' \geq 0$,

$$\mathbb{E} \left[\Lambda^{-\frac{t}{p}} \Lambda^{-\frac{t'}{q}} \right] \leq \mathbb{E} \left[\Lambda^{-t} \right]^{\frac{1}{p}} \mathbb{E} \left[\Lambda^{-t'} \right]^{\frac{1}{q}}.$$

Comme $f(0) = 0$ et g est concave non identiquement égale à $-\infty$, les premières hypothèses du théorème sont vérifiées. De plus, si f vaut l'infini partout sauf en 0, alors on peut conclure directement (il n'y a pas besoin du théorème de Fenchel) mais dans le cas contraire, l'ensemble $\{t \mid f(t) < \infty\}$ est un intervalle non réduit à $\{0\}$ donc les ensemble $\text{ri dom } f$ et $\text{ri dom } g$ s'intersectent on peut donc appliquer le théorème de Fenchel en sachant que la borne supérieure est atteinte dans (V.3). Enfin,

$$g^*(s) = \begin{cases} -\infty & \text{si } s > 0 \\ s & \text{si } s \leq 0 \end{cases}$$

donc le terme de droite de (V.3) vaut

$$\max_{s \in \mathbb{R}} \{g * (s) - f^*(s)\} = \max_{s \leq 0} s - \sup_{t \geq 0} \{st - \ln \mathbb{E} [\Lambda^{-t}]\} \quad (\text{V.4})$$

$$\stackrel{s = \ln(u)}{=} \max_{0 < u \leq 1} \ln u - \sup_{t \geq 0} \{\ln(u^t) - \ln \mathbb{E} [\Lambda^{-t}]\} \quad (\text{V.5})$$

$$= \ln \left[\max_{0 < u \leq 1} \inf_{t \geq 0} \{u^{1-t} \mathbb{E} [\Lambda^{-t}]\} \right], \quad (\text{V.6})$$

tandis que pour le terme de droite on a

$$\inf_{t \in \mathbb{R}^n} \{f(t) - g(t)\} = \inf_{t \in [0;1]} \ln (\mathbb{E} [\Lambda^{-t}]) = \ln \left[\min_{t \in [0;1]} \mathbb{E} [\Lambda^{-t}] \right]. \quad (\text{V.7}) \quad \square$$

2.2 Inégalité de Chernoff-Cramér

Le second résultat est un théorème classique de la théorie des grandes déviations qui sera l'un des ingrédients principaux de la preuve. La forme qui est donnée ici vient directement de l'article [LP92]. On peut trouver sa démonstration dans le livre de A.Dembo et O.Zeitouni ([DZ98]).

Théorème V.4 (Théorème de Chernoff-Cramér). *Soit X une variable aléatoire réelle. Soient*

$$\phi(\theta) := \mathbb{E}(e^{\theta X}) \quad \text{et} \quad \gamma(a) := \inf_{\theta \geq 0} (-a\theta + \ln \phi(\theta)).$$

Soient $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^}$ une famille de variables i.i.d. de même loi que X et, pour tout $n \geq 1$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$,*

$$\frac{1}{n} \ln \mathbb{P}(S_n \geq na) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma(a) \quad (\text{par valeurs inférieures}).$$

2.3 Un calcul de nombre de branchement

Enfin, ce dernier lemme porte sur le nombre de branchement d'un arbre dans lequel on n'aurait gardé que les sommets dont la hauteur est multiple d'un certain entier k .

Lemme V.5. *Soient (\mathbf{t}, o) un arbre infini enraciné et $k \in \mathbb{N}^*$. Définissons l'arbre enraciné (\mathbf{t}^k, o) par :*

- * *Le sommet x appartient à $\mathbf{V}(\mathbf{t}^k)$ si et seulement si $x \in \mathbf{V}(\mathbf{t})$ et k divise la hauteur $|x|_{\mathbf{t}}$ de x dans \mathbf{t} .*
- * *Si x appartient à $\mathbf{V}(\mathbf{t}^k)$, son père dans \mathbf{t}^k est son k -ième ancêtre x_{*k} dans \mathbf{t} .*

Alors, $\text{br}(\mathbf{t}^k) = (\text{br } \mathbf{t})^k$.

Démonstration. Nous commençons par démontrer l'inégalité $\text{br}(\mathbf{t}^k) \geq (\text{br } \mathbf{t})^k$. Pour cela, nous définissons une application

$$\Pi^k \in \text{Cutset}_{\mathbf{t}^k}(o, \infty) \longmapsto \Pi \in \text{Cutset}_{\mathbf{t}}(o, \infty)$$

en imposant que si une arête dans Π^k joint le sommet x_{*k} au sommet x , alors l'arête de \mathbf{t} qui joint x_* à x est dans Π .

Nous avons bien défini une coupe. En effet, un rayon dans l'arbre \mathbf{t} est associé à une suite (o, x_1, x_2, \dots) de sommets de \mathbf{t} , avec $|x_i|_{\mathbf{t}} = i$. Nous le transportons dans \mathbf{t}^k en considérant la suite (o, x_k, x_{2k}, \dots) . Ce rayon étant coupé par Π^k , il y a dans Π^k une arête reliant x_{sk} à $x_{(s+1)k}$ pour un $s \geq 0$. Par conséquent, l'arête reliant $x_{(s+1)k-1}$ à $x_{(s+1)k}$ est dans Π qui coupe donc bien le rayon considéré.

Par ailleurs, pour tout $\lambda \geq 1$,

$$\sum_{\vec{x} \in \Pi^k} \lambda^{-|x|_{\mathbf{t}^k}} = \sum_{\vec{x} \in \Pi} \lambda^{-\frac{|x|_{\mathbf{t}}}{k}}$$

d'où nous déduisons l'inégalité

$$\inf \left\{ \sum_{\vec{x} \in \Pi^k} \lambda^{-|x|_{\mathbf{t}^k}} \mid \Pi^k \in \text{Cutset}_{\mathbf{t}^k}(o, \infty) \right\} \geq \inf \left\{ \sum_{\vec{x} \in \Pi} \lambda^{-\frac{|x|_{\mathbf{t}}}{k}} \mid \Pi \in \text{Cutset}_{\mathbf{t}}(o, \infty) \right\}.$$

Si $\lambda^{1/k} < \text{br } \mathbf{t}$, alors le terme de droite est non nul, donc celui de gauche également et $\lambda \leq \text{br}(\mathbf{t}^k)$. Ceci étant vrai pour tout $\lambda < (\text{br } \mathbf{t})^k$, on en déduit que $\text{br}(\mathbf{t}^k) \geq (\text{br } \mathbf{t})^k$.

Nous passons maintenant à la démonstration de l'inégalité $\text{br}(\mathbf{t}^k) \leq (\text{br } \mathbf{t})^k$. La méthode est similaire, il faut cette fois définir une application

$$\Pi \in \text{Cutset}_{\mathbf{t}}(o, \infty) \longmapsto \Pi^k \in \text{Cutset}_{\mathbf{t}^k}(o, \infty).$$

Cela est légèrement plus délicat et nous supposons que toutes les arêtes de Π ont une hauteur supérieure ou égale à k (cela ne posera pas de problème par la suite). Soit $\vec{x} \in \Pi$ avec $|x|_{\mathbf{t}} = kq + r$, où q et r sont entiers, $q \geq 1$, $r \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. On lui associe son r -ième ancêtre $x^k := x_{*r}$, de telle sorte que $|x^k|_{\mathbf{t}} = qk$ et $|x^k|_{\mathbf{t}^k} = q$. On met alors dans Π^k l'arête reliant x^k à son père dans \mathbf{t}^k (c'est-à-dire x_{*k}^k).

Nous avons bien défini une coupe dans Π^k . En effet, un chemin infini (o, y_1, y_2, \dots) dans \mathbf{t}^k avec $|y_i|_{\mathbf{t}^k} = i$ se transporte de façon canonique dans \mathbf{t} en ajoutant les sommets manquants. On a ainsi un chemin dans \mathbf{t}

$$(o, z_1, z_2, \dots, z_k = y_1, \dots, z_{2k} = y_2, \dots)$$

avec $|z_i|_{\mathbf{t}} = i$. Un tel chemin est coupé par une arête de Π , disons (z_{qk+r-1}, z_{qk+r}) ¹. À cette arête est associée dans Π^k l'arête de \mathbf{t}^k : $(z_{qk-k}, z_{qk}) = (y_{q-1}, y_q)$, ce qui assure que le chemin infini de \mathbf{t}^k est bien coupé par Π^k .

1. La notation \vec{z}_{qk+r} étant ici trop ambiguë, le couple (z_{qk+r-1}, z_{qk+r}) désigne l'arête qui va de z_{qk+r-1} à z_{qk+r} .

Nous comparons maintenant les conductances de ces deux coupes. Soit $\lambda \geq 1$. Notant $|x|_{\mathfrak{t}} = q_x k + r_x$ la division euclidienne de $|x|_{\mathfrak{t}}$ par k , il vient

$$\sum_{\vec{x} \in \Pi} \lambda^{-|x|_{\mathfrak{t}}} = \sum_{\vec{x} \in \Pi} (\lambda^k)^{-q_x} \lambda^{-r_x} \geq \lambda^{-k-1} \sum_{\vec{x}^k \in \Pi^k} (\lambda^k)^{-|x^k|_{\mathfrak{t}^k}}.$$

Si $\lambda > \text{br } \mathfrak{t}$ et Π_n est une suite de coupes dans \mathfrak{t} telle que

$$\sum_{\vec{x} \in \Pi_n} \lambda^{-|x|_{\mathfrak{t}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

alors à partir d'un certain rang, toutes les Π_n ont des arêtes de hauteur supérieure ou égale à k . On peut leur associer des Π_n^k comme ci-dessus. D'après l'inégalité précédente, on a aussi

$$\sum_{\vec{x}^k \in \Pi_n^k} (\lambda^k)^{-|x^k|_{\mathfrak{t}^k}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

donc

$$\inf \left\{ \sum_{\vec{x}^k \in \Pi^k} (\lambda^k)^{-|x^k|_{\mathfrak{t}^k}} \mid \Pi^k \in \text{Cutset}_{\mathfrak{t}^k}(o, \infty) \right\} = 0,$$

ce qui entraîne $\lambda^k \geq \text{br } (\mathfrak{t}^k)$, puis l'inégalité voulue. \square

3 Transience

Nous démontrons dans cette section le premier point du théorème V.1. Notre stratégie consiste à trouver un sous-arbre aléatoire T de \mathfrak{t} dont les conductances sont « presque sûrement assez sympathiques » pour pouvoir utiliser le critère II.22. Cet arbre sera obtenu par percolation.

Ainsi, supposons que $\lambda < \text{br } \mathfrak{t}$. Commençons par utiliser le lemme V.2 et considérons $u \in]0; 1]$ tel que

$$\lambda^{-1} = \inf_{t \geq 0} u^{1-t} \mathbb{E}(\Lambda^{-t}).$$

Nous utilisons ensuite l'inégalité de Chernoff-Cramér (V.4) avec $X = -\ln(\Lambda)$ et $a = \ln u$. On obtient ainsi

$$\frac{1}{|x|} \ln \mathbb{P}(\mathfrak{c}(\vec{x}) \geq u^{|x|}) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \gamma(\ln u),$$

tandis que

$$\begin{aligned} \gamma(\ln u) &= \inf_{\theta \geq 0} \left(\ln \left(u^{-\theta} \mathbb{E}(\Lambda^{-\theta}) \right) \right) \\ &= \inf_{\theta \geq 0} \ln \left(u^{1-\theta} \mathbb{E}(\Lambda^{-\theta}) \right) - \ln(u) \\ &= \ln(\lambda^{-1}) - \ln(u) = \ln(u^{-1} \lambda^{-1}) > \ln(u^{-1} (\text{br } \mathfrak{t})^{-1}). \end{aligned}$$

Ainsi, il existe un entier k tel que, pour tout x de hauteur k ,

$$\mathbb{P}\left(\mathbf{c}(\vec{x}) \geq u^k\right) > (u \operatorname{br} \mathbf{t})^{-k}.$$

Par ailleurs, comme Λ est finie, $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Lambda \leq N) = 1$ donc, par indépendance, pour tout sommet x de hauteur k ,

$$\mathbb{P}\left(\forall o \leq y < x, \Lambda_{\vec{y}} \leq N\right) = \mathbb{P}(\Lambda \leq N)^k \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1.$$

Ainsi, pour N assez grand et pour tout x de hauteur k ,²

$$p := \mathbb{P}\left(\mathbf{c}(\vec{x}) \geq u^k, \forall o \leq y < x, \Lambda_{\vec{y}} \leq N\right) > (u \operatorname{br} \mathbf{t})^{-k}. \quad (\text{V.8})$$

Nous créons maintenant l'arbre \mathbf{t}^k à partir de \mathbf{t} comme dans le lemme V.5. D'après ce lemme, $\operatorname{br}(\mathbf{t}^k) = (\operatorname{br} \mathbf{t})^k$. Dans \mathbf{t}^k , on procède à la percolation F^k suivante : si x est un sommet dont la hauteur $|x|_{\mathbf{t}}$ est un multiple (non nul) de k , l'arête le joignant à son k -ième ancêtre x_{*k} est ouverte dans F^k si et seulement si

$$\prod_{x_{*k} \leq y < x} \Lambda_{\vec{y}}^{-1} \geq u^k \quad \text{et} \quad \forall x_{*k} \leq y < x, \Lambda_{\vec{y}} \leq N.$$

La probabilité de chacun de ces événements est p . La percolation F^k n'est pas indépendante (voir par exemple le cas où x et x' sont à hauteur k mais ont un ancêtre commun différent de la racine o). En revanche elle vérifie clairement la condition $(PB)_p$ (définition : III.4). Comme $p > \frac{1}{\operatorname{br}(\mathbf{t}^k)}$, F^k a presque sûrement des amas infini et mieux encore. On choisit $\varepsilon > 0$ assez petit pour avoir $p > (1 + \varepsilon)^{k+1} u^{-k} (\operatorname{br} \mathbf{t})^{-k}$, et on applique le corollaire III.16 : il existe un sous-arbre aléatoire T_ε^k de \mathbf{t}^k tel que, \mathbb{P} -presque sûrement,

$$\operatorname{br} T_\varepsilon^k > (1 + \varepsilon)^{-1} p \operatorname{br}(\mathbf{t}^k) > (1 + \varepsilon)^k u^{-k} \quad (\text{V.9})$$

On revient dans l'arbre \mathbf{t} . À partir de T_ε^k , on crée un sous-arbre aléatoire T_ε de \mathbf{t} en « remettant les sommets intermédiaires » :

$$z \in \mathbf{V}(T_\varepsilon) \iff \exists x, y \in \mathbf{V}(T_\varepsilon^k), x \leq z \leq y.$$

Toujours d'après le lemme V.5,

$$\operatorname{br}(T_\varepsilon) > (1 + \varepsilon) u^{-1} \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Notons o_{T_ε} la racine de T_ε de hauteur kq_0 . Soit x un sommet T_ε et

$$o_{T_\varepsilon} =: x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{2k}, \dots, x_{qk}, x_{qk+1}, \dots, x_{qk+r} := x$$

2. Cette probabilité ne dépend que de la loi de k copies indépendantes de Λ , donc ne dépend en rien du sommet x de hauteur k choisi.

la suite de ses ancêtres dans T_ε , où

$$|x|_{T_\varepsilon} = qk + r \text{ avec } 0 \leq r \leq k - 1 \quad \text{et} \quad |x|_{\mathfrak{t}} = (q + q_0)k + r.$$

Alors la conductance de \vec{x} est minorée :

$$\begin{aligned} \mathfrak{c}(\vec{x}) &= \prod_{o \leq y < o_{T_\varepsilon}} \Lambda_{\vec{y}}^{-1} \left[\prod_{i=0}^{q-1} \left(\prod_{x_{ik} \leq y_i < x_{(i+1)k}} \Lambda_{\vec{y}_i}^{-1} \right) \right] \prod_{j=0}^{r-1} \Lambda_{\vec{x}_{qk+r}}^{-1} \\ &\geq \left(\prod_{o \leq y < o_{T_\varepsilon}} \Lambda_{\vec{y}}^{-1} \right) u^{qk} \left(\frac{1}{N} \right)^{-k+1} \geq Au^{|x|} \end{aligned}$$

où A est une certaine constante strictement positive (qui dépend certes de ω mais pas de x).

Pour toute coupe Π_ε dans T_ε , entre o_{T_ε} et l'infini, on a alors

$$\sum_{\vec{x} \in \Pi_\varepsilon} (1 + \varepsilon)^{-|x|} \mathfrak{c}(\vec{x}) \geq A \sum_{\vec{x} \in \Pi_\varepsilon} [(1 + \varepsilon) u^{-1}]^{-|x|} > 0$$

car $\text{br}(T_\varepsilon) > (1 + \varepsilon) u^{-1}$. D'après la proposition II.22 il existe donc un courant unitaire entre o_{T_ε} et l'infini. Il est facile d'étendre ce courant en un courant unitaire entre o et l'infini en lui imposant de valoir 1 sur les arêtes entre o et o_{T_ε} et 0 ailleurs. Ainsi, \mathfrak{t} est \mathbb{P} -presque sûrement transient.

Bibliographie

- [BMP00] Paolo Baldi, Laurent Mazliak, and Pierre Priouret. *Martingales et chaînes de Markov : théorie élémentaire et exercices corrigés*. Hermann, 2000.
- [Cur15] Nicolas Curien. Random graphs, the local convergence point of view. <http://www.math.u-psud.fr/~curien/cours-RG.pdf>, 2015. Polycopié de cours.
- [DZ98] Amir Dembo and Ofer Zeitouni. *Large deviations techniques and applications*, volume 38. Springer, 1998.
- [FF56] Lester R Ford and Delbert R Fulkerson. Maximal flow through a network. *Canadian journal of Mathematics*, 8(3) :399–404, 1956.
- [Hey10] CC Heyde. Extension of a result of seneta for the super-critical galton–watson process. In *Selected Works of CC Heyde*, pages 115–118. Springer, 2010.
- [KS66] Harry Kesten and Bernt P Stigum. A limit theorem for multidimensional galton-watson processes. *The Annals of Mathematical Statistics*, pages 1211–1223, 1966.
- [LG06] Jean-François Le Gall. Intégration, probabilités et processus aléatoires. <http://www.math.u-psud.fr/~jflegall/IPPA2.pdf>, 2006. Polycopié de cours.
- [LP92] Russell Lyons and Robin Pemantle. Random walk in a random environment and first-passage percolation on trees. *The Annals of Probability*, pages 125–136, 1992.
- [LP14] Russell Lyons and Yuval Peres. Probability on trees and networks. <http://pages.iu.edu/~rdlyons/prbtree/prbtree.html>, 2014. Livre en cours de rédaction, disponible sur la toile.
- [Lyo89] Russell Lyons. The ising model and percolation on trees and tree-like graphs. *Communications in Mathematical Physics*, 125(2) :337–353, 1989.
- [Lyo90] Russell Lyons. Random walks and percolation on trees. *The annals of Probability*, pages 931–958, 1990.
- [Nev86] Jacques Neveu. Arbres et processus de galton-watson. In *Annales de l’IHP Probabilités et statistiques*, volume 22, pages 199–207, 1986.

- [Roc70] Ralph Tyrrell Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton University Press, 1970.
- [Sen68] Eugene Seneta. On recent theorems concerning the supercritical galton-watson process. *The Annals of Mathematical Statistics*, pages 2098–2102, 1968.