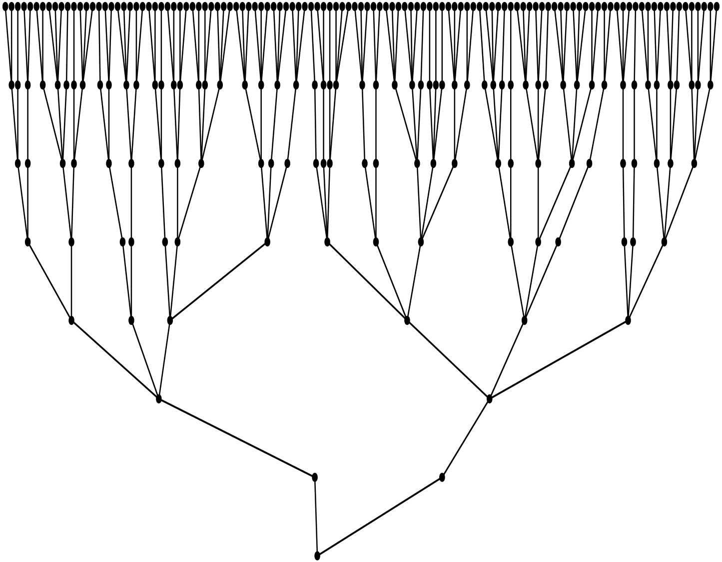
Marches aléatoires sur les arbres aléatoires

Pierre Rousselin

LAGA
Université Paris 13

17 décembre 2018



Les arbres et leurs bords

Marche aléatoire λ-biaisée

Théorie ergodique sur les arbres de Galton-Watson

Arbres à longueurs récursives

Arbres pondérés aléatoires : cas transient

Arbres pondérés aléatoires : cas sous-diffusif

Les arbres et leurs bords

Marche aléatoire λ-biaisée

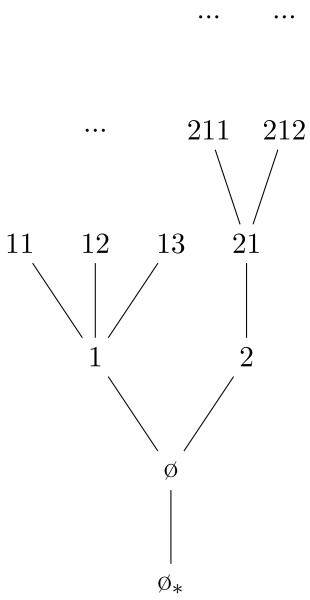
Théorie ergodique sur les arbres de Galton-Watson

Arbres à longueurs récursives

Arbres pondérés aléatoires : cas transient

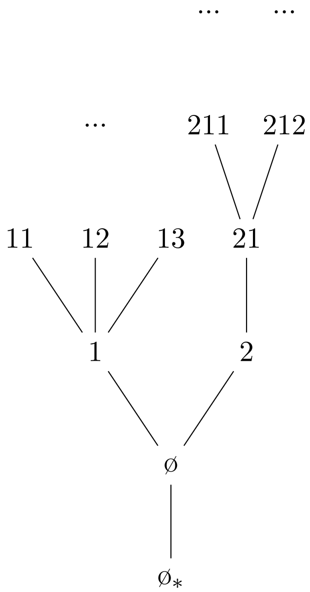
Arbres pondérés aléatoires : cas sous-diffusif

Arbres plans : notation de Neveu



- Arbre t : partie de l'ensemble des mots finis sur $\mathbb{N}^*$;
- enraciné en $\emptyset$;
- parent artificiel de la racine $\emptyset_*$;
- hauteur dans l'arbre : $|212| = 3$.
- parent : $(212)_* = 21$;
- nombre d'enfants : $\nu_t(1) = 3$;
- hypothèse :
  $\forall x \in t,\ \nu_t(x) \in [1, \infty[$.

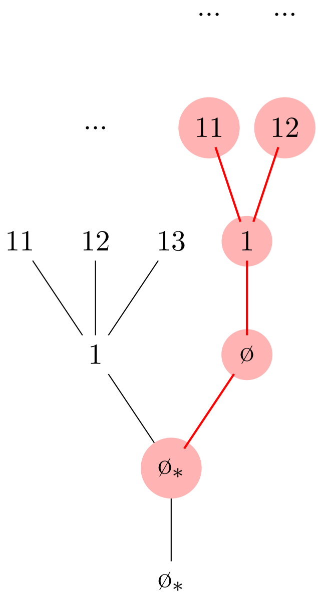
Sous-arbre réindexé



t un arbre et x dans t.

$$t[x] = \{y \in t : xy \in t\}.$$

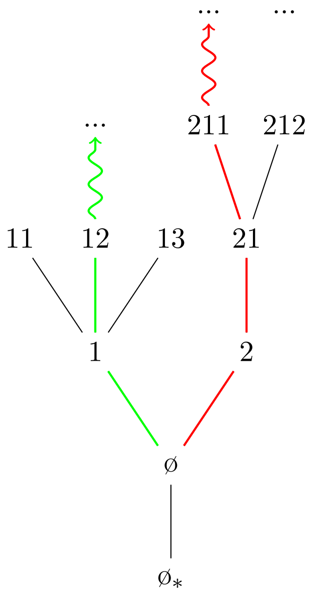
Sous-arbre réindexé



t un arbre et x dans t.

$$t[x] = \{y \in t : xy \in t\}.$$

Bord d'un arbre

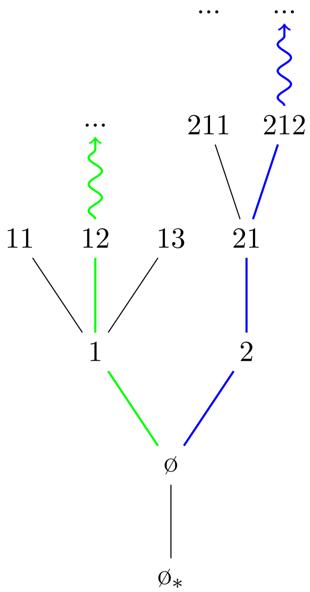


- Rayon ξ de l'arbre t : suite infinie de sommets

$$\xi = (\xi_0 = \varnothing, \xi_1, \xi_2, ...)$$

telle que pour tout i, ξ_{i+1} est un enfant de ξ_i ;
- Bord ∂t de t : ensemble de ses rayons ;
- $\xi \neq \eta \in \partial t \mapsto \xi \wedge \eta$: plus grand préfixe commun de ξ et η.

Bord d'un arbre



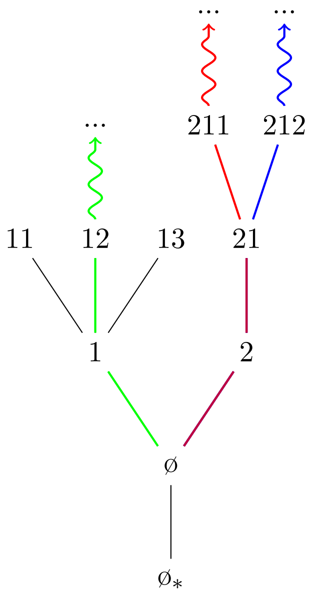
- Rayon ξ de l'arbre t : suite infinie de sommets

$$\xi = (\xi_0 = \varnothing, \xi_1, \xi_2, ...)$$

telle que pour tout i, ξ_{i+1} est un enfant de ξ_i ;

- Bord ∂t de t : ensemble de ses rayons ;
- $\xi \neq \eta \in \partial t \mapsto \xi \wedge \eta$: plus grand préfixe commun de ξ et η.

Bord d'un arbre

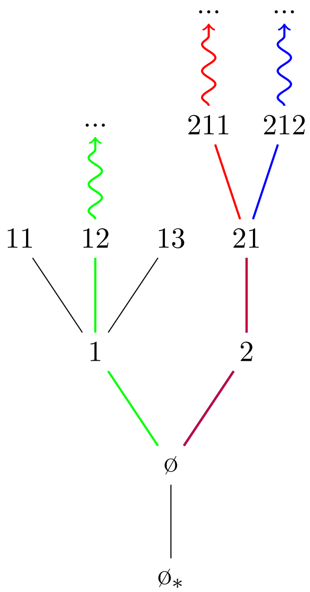


- Rayon ξ de l'arbre t : suite infinie de sommets

$$\xi = (\xi_0 = \varnothing, \xi_1, \xi_2, ...)$$

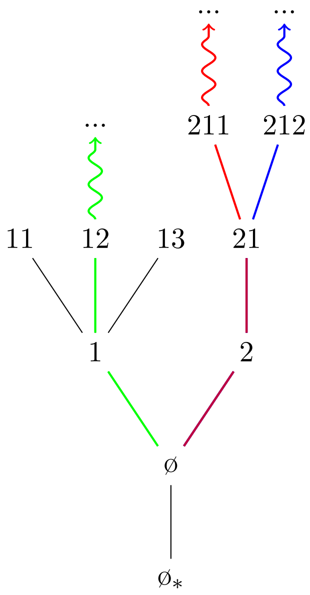
telle que pour tout i, ξ_{i+1} est un enfant de ξ_i ;
- Bord ∂t de t : ensemble de ses rayons ;
- $\xi \neq \eta \in \partial t \mapsto \xi \wedge \eta$: plus grand préfixe commun de ξ et η.

Topologie sur ∂t



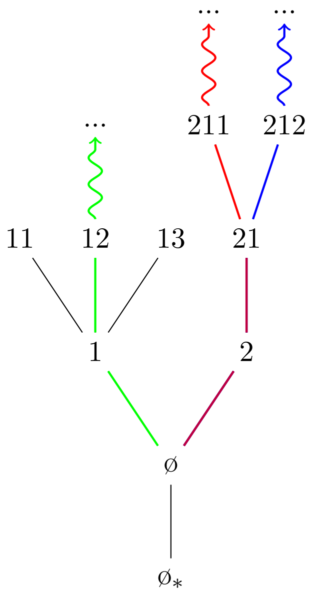
- $t \ni x \mapsto [x]_t \subset \partial t$, ensemble des rayons de t qui passent par x : *cylindre* issu de x dans t.
- Si deux cylindres ne sont pas disjoints, alors l'un est inclus dans l'autre.

Topologie sur ∂t



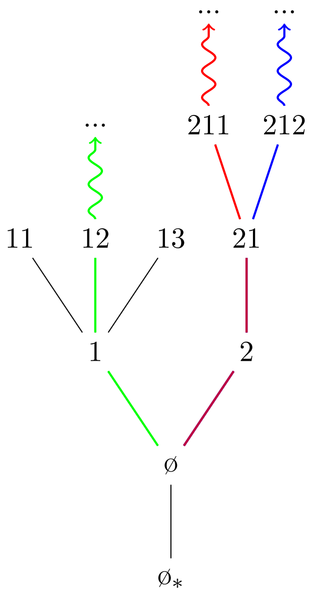
- $t \ni x \mapsto [x]_t \subset \partial t$, ensemble des rayons de t qui passent par x : *cylindre* issu de x dans t.
- Si deux cylindres ne sont pas disjoints, alors l'un est inclus dans l'autre.
- Topologie engendrée par les cylindres ;
- Métrisable par exemple par : $\mathrm{d}_{\mathcal{U}_\infty}(\xi, \eta) = \exp(-|\xi \wedge \eta|)$.
- $(\partial t, \mathrm{d}_{\mathcal{U}_\infty})$ est ultramétrique et compact.

Probabilités boréliennes sur le bord d'un arbre



- Tribu borélienne (aussi engendrée par les cylindres).
- À M, probabilité borélienne sur ∂t, on associe $\theta_M : t \to [0,1]$ définie par
$$\theta_M(x) = M[x]_t.$$
- $\theta_M(\varnothing) = 1$ et pour tout x dans t,
$$\theta_M(x) = \sum_{i=1}^{\nu_t(\varnothing)} \theta_M(xi)$$
- Une telle fonction est appelée un *flot* (unitaire) sur l'arbre t.

Probabilités boréliennes sur le bord d'un arbre



- Tribu borélienne (aussi engendrée par les cylindres).
- À M, probabilité borélienne sur ∂t, on associe $\theta_M : t \to [0,1]$ définie par

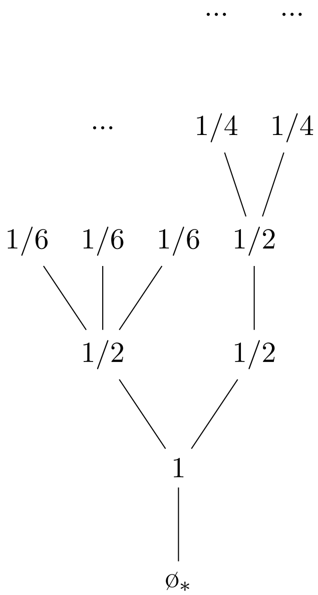
$$\theta_M(x) = M[x]_t.$$

- $\theta_M(\varnothing) = 1$ et pour tout x dans t,

$$\theta_M(x) = \sum_{i=1}^{\nu_t(\varnothing)} \theta_M(xi)$$

- Une telle fonction est appelée un *flot* (unitaire) sur l'arbre t.
- $M \mapsto \theta_M$ est une bijection.

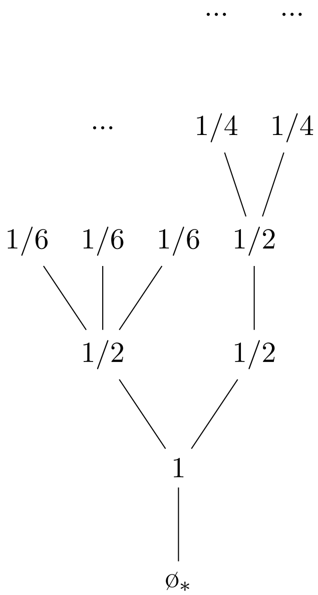
Un exemple : la mesure de visibilité



Définition récursive :

- $\mathsf{VIS}_t(\varnothing) = 1$
- pour tout sommet x et tout enfant y de x,
  $\mathsf{VIS}_t(y) = \mathsf{VIS}_t(x)/\nu_t(x)$.

Un exemple : la mesure de visibilité



Définition récursive :

- $\mathsf{VIS}_t(\varnothing) = 1$
- pour tout sommet x et tout enfant y de x,
  $\mathsf{VIS}_t(y) = \mathsf{VIS}_t(x)/\nu_t(x)$.

Point de vue probabiliste :
Loi d'un rayon Ξ (partant de $\varnothing$) obtenu par « marche aléatoire simple vers l'avant » depuis $\varnothing$.

Mesures et dimensions de Hausdorff : motivation

Si $\xi \in \partial t$ n'est pas un atome de θ ($\theta(\xi_n) \to 0$), on s'intéresse à :

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \begin{matrix} \sup \\ \inf \end{matrix} \right\} \frac{\theta(\xi_n)}{\varphi(\xi_n)} \text{ ou, (plus facile) } \lim_{n\to\infty} \left\{ \begin{matrix} \sup \\ \inf \end{matrix} \right\} \frac{\log\theta(\xi_n)}{\log\varphi(\xi_n)},$$

avec $\varphi : t \to \mathbb{R}_+$ définie, par exemple, par

- $\varphi(x) = e^{-\alpha|x|}$ pour $\alpha > 0$;
- $\varphi(x) = (\mathrm{diam}^d[x]_t)^\alpha$ pour $\alpha > 0$ et une « bonne » distance d sur ∂t ;
- une autre quantité d'intérêt du modèle...

Mesures et dimensions de Hausdorff : motivation

Si $\xi \in \partial t$ n'est pas un atome de θ ($\theta(\xi_n) \to 0$), on s'intéresse à :

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \begin{matrix} \sup \\ \inf \end{matrix} \right\} \frac{\theta(\xi_n)}{\varphi(\xi_n)} \text{ ou, (plus facile) } \lim_{n\to\infty} \left\{ \begin{matrix} \sup \\ \inf \end{matrix} \right\} \frac{\log \theta(\xi_n)}{\log \varphi(\xi_n)},$$

avec $\varphi : t \to \mathbb{R}_+$ définie, par exemple, par

- $\varphi(x) = e^{-\alpha|x|}$ pour $\alpha > 0$;
- $\varphi(x) = (\mathrm{diam}^d[x]_t)^\alpha$ pour $\alpha > 0$ et une « bonne » distance d sur ∂t ;
- une autre quantité d'intérêt du modèle...

Les mesures et dimensions de Hausdorff et de packing permettent de faire le lien entre ces notions *locales* et des notions plus *globales*.

φ-densité supérieure et φ-mesure de Hausdorff

φ-densité supérieure de θ en $\xi \in \partial t$:

$$\overline{\mathrm{d}}_\theta^\varphi(\xi) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\theta(\xi_n)}{\varphi(\xi_n)}.$$

Pour $n \geq 1$ et $E \subset \partial t$, $t \supset \mathcal{C} \in \mathsf{Cov}_n(E)$ ssi

- $\forall x \in \mathcal{C}$, $|x| \geq n$;
- $E \subset \bigcup_{x\in\mathcal{C}} [x]_t$.

φ-mesure de Hausdorff de E :

$$\mathscr{H}^\varphi(E) = \lim_{n\to\infty}^{\uparrow} \inf\Big\{ \sum_{x\in\mathcal{C}} \varphi(x) : \mathcal{C} \in \mathsf{Cov}_n(E) \Big\}.$$

φ-densité supérieure et φ-mesure de Hausdorff

φ-densité supérieure de θ en $\xi \in \partial t$:

$$\overline{\mathrm{d}}_\theta^\varphi(\xi) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\theta(\xi_n)}{\varphi(\xi_n)}.$$

Pour $n \geq 1$ et $E \subset \partial t$, $t \supset \mathcal{C} \in \mathsf{Cov}_n(E)$ ssi

- $\forall x \in \mathcal{C}$, $|x| \geq n$;
- $E \subset \bigcup_{x\in\mathcal{C}} [x]_t$.

φ-mesure de Hausdorff de E :

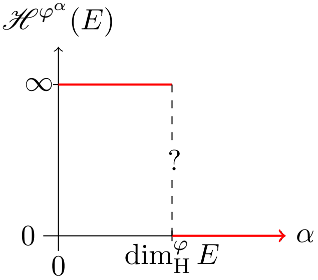
$$\mathscr{H}^\varphi(E) = \lim_{n\to\infty}^{\uparrow} \inf\Big\{\sum_{x\in\mathcal{C}} \varphi(x) : \mathcal{C} \in \mathsf{Cov}_n(E)\Big\}.$$

Théorème de la densité supérieure :

$$\inf_{\xi\in E} \overline{\mathrm{d}}_\theta^\varphi(\xi)\, \mathscr{H}^\varphi(E) \leq \theta(E) \leq \sup_{\xi\in E} \overline{\mathrm{d}}_\theta^\varphi(\xi)\, \mathscr{H}^\varphi(E).$$

φ-dimension de Hausdorff d'une partie de ∂t

Ici, on pense à $\varphi : x \mapsto e^{-|x|}$ ou $\varphi : x \mapsto \mathrm{diam}^d[x]_t$.

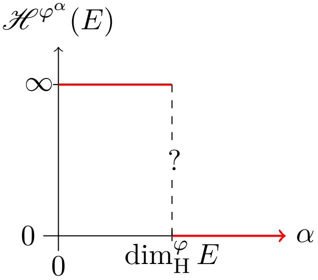


La *φ-dimension de Hausdorff* de E est

- la borne inférieure des $\alpha > 0$ tels que $\mathscr{H}^{\varphi^\alpha}(E) = 0$ et
- la borne supérieure des $\alpha > 0$ tels que $\mathscr{H}^{\varphi^\alpha}(E) = \infty$.

φ-dimension de Hausdorff d'une partie de ∂t

Ici, on pense à $\varphi : x \mapsto e^{-|x|}$ ou $\varphi : x \mapsto \mathrm{diam}^d [x]_t$.



La *φ-dimension de Hausdorff* de E est

- la borne inférieure des $\alpha > 0$ tels que $\mathscr{H}^{\varphi^\alpha}(E) = 0$ et
- la borne supérieure des $\alpha > 0$ tels que $\mathscr{H}^{\varphi^\alpha}(E) = \infty$.

Théorème (Hawkes 1981, Lyons 1990)

Si T est un arbre de Galton-Watson infini, et m est la moyenne de sa loi de reproduction, alors,

$$\dim_{\mathrm{H}}^{\varphi} \partial T = \log m \quad p.s.$$

φ-dimension(s) d'un flot

- φ-dimension locale inférieure en $\xi \in \partial t$:

$$\underline{\dim}^{\varphi}_{\mathrm{loc}}\theta(\xi) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log \theta(\xi_n)}{\log \varphi(\xi_n)};$$

- φ-dimension de Hausdorff (supérieure) de θ :

$$\overline{\dim}^{\varphi}_{\mathrm{H}}\theta = \min\{\dim^{\varphi}_{\mathrm{H}}(C) : C \text{ borélien tel que } \theta(C) = 1\}.$$

- Théorème de la dimension locale inférieure :

$$\theta - \operatorname{sup\,ess} \underline{\dim}^{\varphi}_{\mathrm{loc}}\theta = \overline{\dim}^{\varphi}_{\mathrm{H}}\theta.$$

Exacte-dimensionnalité

Definition

S'il existe $\alpha \in [0, \infty]$ tel que pour θ-presque tout ξ dans ∂t ,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \theta(\xi_n)}{\log \varphi(\xi_n)} = \alpha,$$

θ est dit φ-*exactement dimensionnel* et on écrit $\dim^\varphi \theta = \alpha$.

Si $\varphi(x) = e^{-|x|}$ et $\Xi \sim \theta$, cela revient à dire que la variable aléatoire

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} \log \theta(\Xi_n)$$

existe et est dégénérée.

Chute de dimension

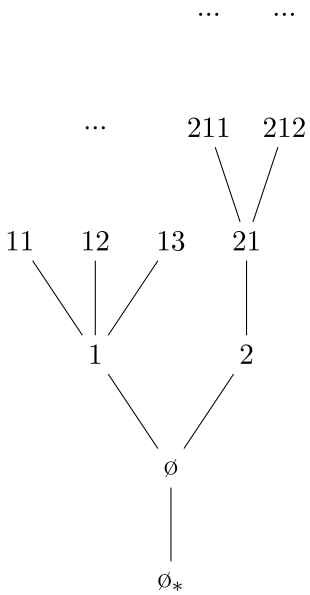
Définition

Si $\overline{\dim}_{\mathrm{H}}^{\varphi}\theta < \dim_{\mathrm{H}}^{\varphi}\partial t$, on dit que la phénomène de chute de dimension se produit pour θ.

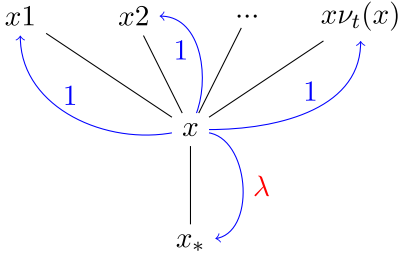
Phénomène de concentration : existence d'un borélien C_θ de ∂t tel que

- $\overline{\dim}_{\mathrm{H}}^{\varphi}\theta = \dim_{\mathrm{H}}^{\varphi} C_\theta < \dim_{\mathrm{H}}^{\varphi}\partial t$ et
- si $\Xi \sim \theta$, alors $\Xi \in C_\theta$, p.s.

Marche aléatoire λ-biaisée sur un arbre



Soit $\lambda > 0$.



Exemple :

$$P^t_{\varnothing}(X_1 = 1,\ X_2 = \varnothing,\ X_3 = 2)$$
$$= \frac{1}{\lambda + 2} \times \frac{\lambda}{\lambda + 3} \times \frac{1}{\lambda + 2}.$$

Conductance

Définition

Soit, pour y dans t, $\tau_y = \inf\{n \geq 0 : X_n = y\}$. La conductance de l'arbre t est

$$\beta(t) = P_{\varnothing}(\tau_{\varnothing_*} = \infty).$$

Conductance

Définition

Soit, pour y dans t, $\tau_y = \inf\{n \geq 0 : X_n = y\}$. La conductance de l'arbre t est

$$\beta(t) = P_\varnothing(\tau_{\varnothing_*} = \infty).$$

$\beta(t) > 0$ ssi la marche aléatoire est transiente.

$$\beta(t) = \frac{\sum_{j=1}^{\nu_t(\varnothing)} P(\varnothing, j)\beta(t[j])}{P(\varnothing, \varnothing_*) + \sum_{j=1}^{\nu_t(\varnothing)} P(\varnothing, j)\beta(t[j])}.$$

Conductance

Définition

Soit, pour y dans t, $\tau_y = \inf\{n \geq 0 : X_n = y\}$. La conductance de l'arbre t est

$$\beta(t) = P_{\varnothing}(\tau_{\varnothing_*} = \infty).$$

$\beta(t) > 0$ ssi la marche aléatoire est transiente.
Pour la marche λ-biaisée,

$$\beta(t) = \frac{\sum_{j=1}^{\nu_t(\varnothing)} 1 \times \beta(t[j])}{\lambda + \sum_{j=1}^{\nu_t(\varnothing)} 1 \times \beta(t[j])}.$$

Marche aléatoire λ-biaisée sur un arbre de Galton-Watson

Moyenne de la loi de reproduction : $m = \sum_{k\geq 1} kp_k$.

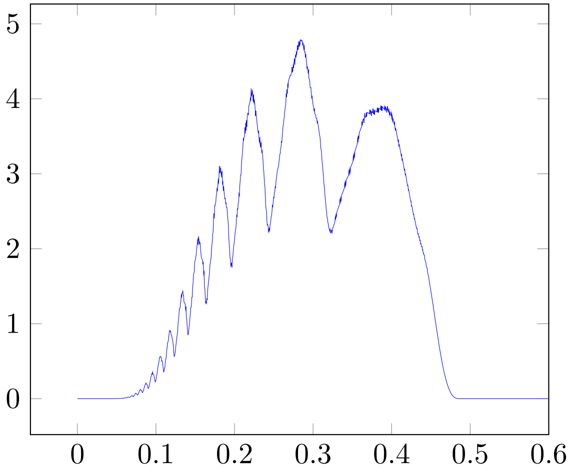
Théorème (Lyons, 1990)

La marche aléatoire λ-biaisée est presque sûrement transiente si $0 < \lambda < m$ et est presque sûrement récurrente sinon.

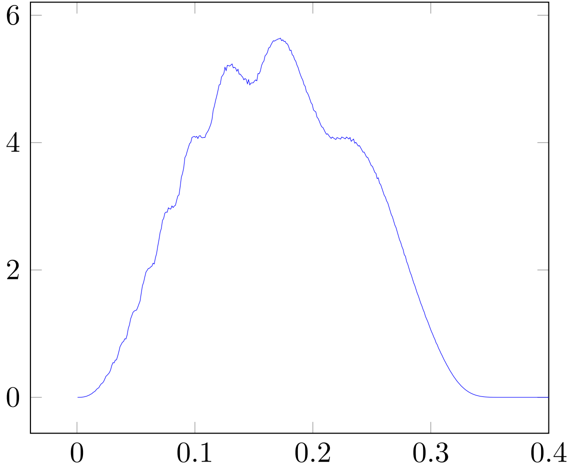
La conductance de T vérifie l'équation distributionnelle récursive :

$$\beta(T) = \frac{\sum_{j=1}^{\nu_T(\varnothing)} \beta(T[j])}{\lambda + \sum_{j=1}^{\nu_T(\varnothing)} \beta(T[j])}.$$

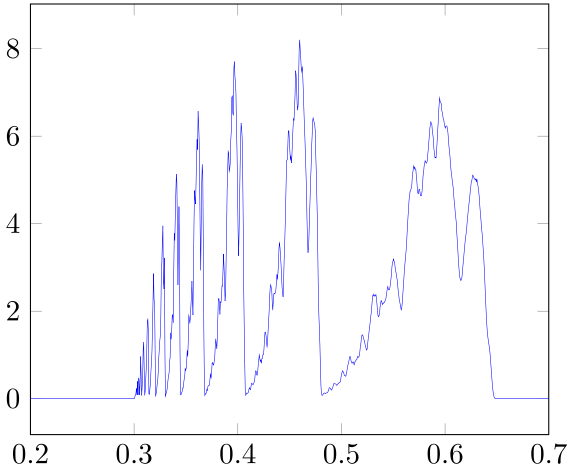
Densité apparente de β pour $\lambda = 1$ et $p_1 = p_2 = 1/2$



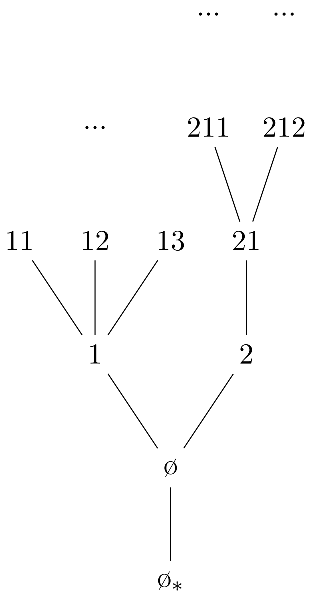
Densité apparente de β pour $\lambda = 1{,}2$ et $p_1 = p_2 = 1/2$



Densité apparente de β pour $\lambda = 0{,}7$ et $p_1 = p_2 = 1/2$



Temps de sortie



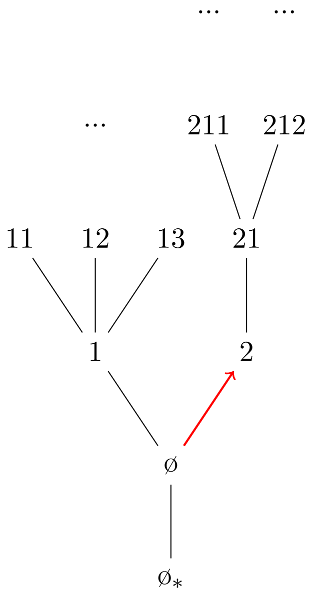
Soit $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \dots)$ une trajectoire transiente issue de la racine $\varnothing$ dans t.

- Ensemble des temps de sortie de $\mathbf{X}$:

$$\mathsf{et}\,(\mathbf{X}) := \{s \geq 0 : \forall k > s,\ X_k \neq (X_s)_*\},$$

- numérotés $\mathsf{et}_0\,(\mathbf{X}) < \mathsf{et}_1\,(\mathbf{X}) < \cdots$.
- Points de sortie :
  $\mathsf{ep}_0\,(\mathbf{X}) = X_{\mathsf{et}_0(\mathbf{X})} = \varnothing$,
  $\mathsf{ep}_1\,(\mathbf{X}) = X_{\mathsf{et}_1(\mathbf{X})}$, ...

Temps de sortie



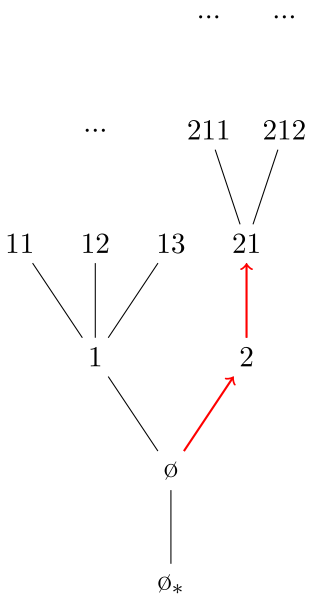
Soit $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \dots)$ une trajectoire transiente issue de la racine ø dans t.

- Ensemble des temps de sortie de $\mathbf{X}$:

$$\mathsf{et}\,(\mathbf{X}) := \{s \geq 0 : \forall k > s,\ X_k \neq (X_s)_*\},$$

- numérotés $\mathsf{et}_0\,(\mathbf{X}) < \mathsf{et}_1\,(\mathbf{X}) < \cdots$.
- Points de sortie :
  $\mathsf{ep}_0\,(\mathbf{X}) = X_{\mathsf{et}_0(\mathbf{X})} = ø$,
  $\mathsf{ep}_1\,(\mathbf{X}) = X_{\mathsf{et}_1(\mathbf{X})}$, ...

Temps de sortie



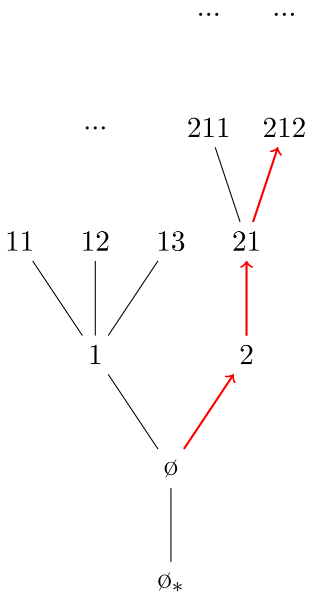
Soit $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \dots)$ une trajectoire transiente issue de la racine $\varnothing$ dans t.

- Ensemble des temps de sortie de $\mathbf{X}$:

$$\mathsf{et}\,(\mathbf{X}) := \{s \geq 0 : \forall k > s,\ X_k \neq (X_s)_*\},$$

- numérotés $\mathsf{et}_0\,(\mathbf{X}) < \mathsf{et}_1\,(\mathbf{X}) < \cdots$.
- Points de sortie :
  $\mathsf{ep}_0\,(\mathbf{X}) = X_{\mathsf{et}_0(\mathbf{X})} = \varnothing$,
  $\mathsf{ep}_1\,(\mathbf{X}) = X_{\mathsf{et}_1(\mathbf{X})}$, ...

Temps de sortie



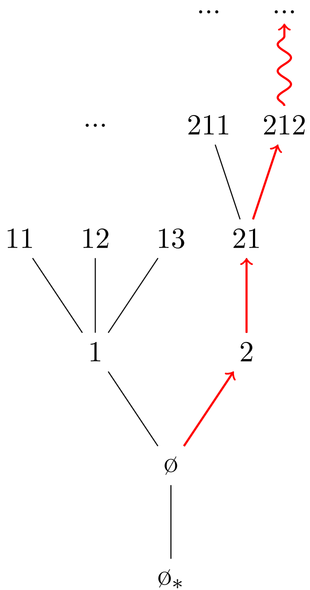
Soit $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \dots)$ une trajectoire transiente issue de la racine $\varnothing$ dans t.

- Ensemble des temps de sortie de $\mathbf{X}$:

$$\mathsf{et}\,(\mathbf{X}) := \{s \geq 0 : \forall k > s,\ X_k \neq (X_s)_*\},$$

- numérotés $\mathsf{et}_0\,(\mathbf{X}) < \mathsf{et}_1\,(\mathbf{X}) < \cdots$.
- Points de sortie :
  $\mathsf{ep}_0\,(\mathbf{X}) = X_{\mathsf{et}_0(\mathbf{X})} = \varnothing$,
  $\mathsf{ep}_1\,(\mathbf{X}) = X_{\mathsf{et}_1(\mathbf{X})}$, ...

Temps de sortie



Soit $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \dots)$ une trajectoire transiente issue de la racine $\varnothing$ dans t.

- Ensemble des temps de sortie de $\mathbf{X}$:

$$\mathsf{et}\,(\mathbf{X}) := \{s \geq 0 : \forall k > s,\ X_k \neq (X_s)_*\},$$

- numérotés $\mathsf{et}_0\,(\mathbf{X}) < \mathsf{et}_1\,(\mathbf{X}) < \cdots$.
- Points de sortie :
  $\mathsf{ep}_0\,(\mathbf{X}) = X_{\mathsf{et}_0(\mathbf{X})} = \varnothing$,
  $\mathsf{ep}_1\,(\mathbf{X}) = X_{\mathsf{et}_1(\mathbf{X})}$, ...

Rayon associé à la marche et mesure harmonique

On note

$$\Xi = \left(\mathsf{ep}_0\left(\mathbf{X}\right), \mathsf{ep}_1\left(\mathbf{X}\right), \ldots\right).$$

Rayon associé à la marche et mesure harmonique

On note

$$\Xi = \left(\mathsf{ep}_0\left(\mathbf{X}\right), \mathsf{ep}_1\left(\mathbf{X}\right), \ldots\right).$$

Ξ est un rayon aléatoire.
Sa loi notée $\mathsf{HARM}_t^{\lambda}$ est appelée la *mesure harmonique* sur ∂t.

Rayon associé à la marche et mesure harmonique

On note

$$\Xi = \left(\mathsf{ep}_0\left(\mathbf{X}\right), \mathsf{ep}_1\left(\mathbf{X}\right), \dots\right).$$

Ξ est un rayon aléatoire.
Sa loi notée HARM_t^λ est appelée la *mesure harmonique* sur ∂t.
Pour tout $x \in t$,

$$\begin{aligned}\mathsf{HARM}_t^\lambda(x) &= P_\varnothing^t(x \prec \Xi) \\ &= P_\varnothing^t\left(\exists s \geq 0,\ X_s = x \text{ et } \forall k > s,\ X_k \neq x_*\right).\end{aligned}$$

Rayon associé à la marche et mesure harmonique

On note
$$\Xi = (\mathsf{ep}_0(\mathbf{X}), \mathsf{ep}_1(\mathbf{X}), \dots).$$
Ξ est un rayon aléatoire.
Sa loi notée HARM_t^λ est appelée la *mesure harmonique* sur ∂t.
Pour tout $x \in t$,

$$\begin{aligned}\mathsf{HARM}_t^\lambda(x) &= P_\varnothing^t(x \prec \Xi) \\ &= P_\varnothing^t(\exists s \geq 0,\ X_s = x \text{ et } \forall k > s,\ X_k \neq x_*).\end{aligned}$$

$$\forall 1 \leq i \leq \nu_t(\varnothing), \quad \mathsf{HARM}_t^\lambda(i) = \frac{P^t(\varnothing, i)\beta(t[i])}{\sum_{j=1}^{\nu_t(\varnothing)} P^t(\varnothing, j)\beta(t[j])}.$$

Rayon associé à la marche et mesure harmonique

On note

$$\Xi = \left(\mathsf{ep}_0\left(\mathbf{X}\right), \mathsf{ep}_1\left(\mathbf{X}\right), \dots\right).$$

Ξ est un rayon aléatoire.
Sa loi notée HARM_t^λ est appelée la *mesure harmonique* sur ∂t.
Pour tout $x \in t$,

$$\begin{aligned}\mathsf{HARM}_t^\lambda(x) &= P_\varnothing^t(x \prec \Xi)\\ &= P_\varnothing^t\left(\exists s \geq 0,\, X_s = x \text{ et } \forall k > s,\, X_k \neq x_*\right).\end{aligned}$$

Pour la marche λ-biaisée,

$$\forall 1 \leq i \leq \nu_t(\varnothing), \quad \mathsf{HARM}_t(i) = \frac{1 \times \beta(t[i])}{\sum_{j=1}^{\nu_t(\varnothing)} 1 \times \beta(t[j])}.$$

Dimension de la mesure harmonique

Théorème (Lyons, Pemantle, Peres, 1995, $\lambda = 1$)

Si $\widetilde{\mathscr{C}}$ *est une copie indépendante de* $\sum_{j=1}^{\nu_T(\varnothing)} \beta(T[j])$*, alors*

$$\dim \mathsf{HARM}_t^1 = C_1^{-1}\mathbb{E}\left[(-\log)\left(1-\beta(T)\right)\frac{\beta(T)\widetilde{\mathscr{C}}}{\beta(T)+\widetilde{\mathscr{C}}}\right]$$

$$< \log(m) = \dim_{\mathrm{H}} \partial t \quad \textit{pour } \mathbf{GW}\textit{-presque tout } t.$$

Dimension de la mesure harmonique

Théorème (Lyons, Pemantle, Peres, 1995, $\lambda = 1$)

Si $\widetilde{\mathscr{C}}$ *est une copie indépendante de* $\sum_{j=1}^{\nu_T(\varnothing)} \beta(T[j])$, *alors*

$$\dim \mathsf{HARM}_t^1 = C_1^{-1} \mathbb{E}\left[(-\log)\,(1-\beta(T))\,\frac{\beta(T)\widetilde{\mathscr{C}}}{\beta(T)+\widetilde{\mathscr{C}}} \right] < \log(m) = \dim_{\mathrm{H}} \partial t \quad \textit{pour } \mathbf{GW}\textit{-presque tout } t.$$

Théorème (Lyons, Pemantle, Peres, 1996, $0 < \lambda < m$)

Il existe $d_\lambda \in (0, \log m)$, *telle que pour* $\mathbf{GW}$*-presque tout* t,
$\dim \mathsf{HARM}_t^\lambda = d_\lambda$.

Dimension de la mesure harmonique

Théorème (Lyons, Pemantle, Peres, 1995, $\lambda = 1$)

Si $\widetilde{\mathscr{C}}$ *est une copie indépendante de* $\sum_{j=1}^{\nu_T(\varnothing)} \beta(T[j])$, *alors*

$$\dim \mathsf{HARM}_t^1 = C_1^{-1}\mathbb{E}\left[(-\log)\left(1-\beta(T)\right)\frac{\beta(T)\widetilde{\mathscr{C}}}{\beta(T)+\widetilde{\mathscr{C}}}\right]$$

$$< \log(m) = \dim_{\mathrm{H}} \partial t \quad \textit{pour } \mathbf{GW}\textit{-presque tout } t.$$

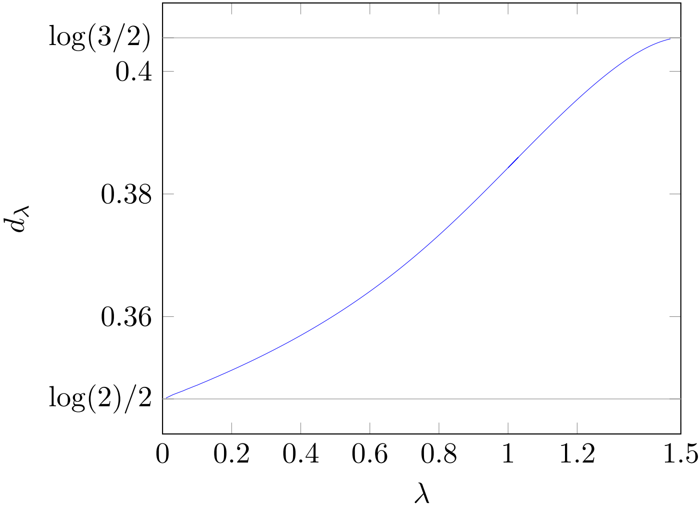
Théorème (Lyons, Pemantle, Peres, 1996, $0 < \lambda < m$)

Il existe $d_\lambda \in (0, \log m)$, *telle que pour* $\mathbf{GW}$*-presque tout* t,
$\dim \mathsf{HARM}_t^\lambda = d_\lambda$.

Théorème (Lin 2018+, R. 2018)

$$d_\lambda = \log(\lambda) + C_\lambda^{-1}\mathbb{E}\left[(-\log)\left(1-\beta(T)\right)\frac{\lambda\beta(T)\widetilde{\mathscr{C}}}{\lambda - 1 + \beta(T)+\widetilde{\mathscr{C}}}\right].$$

Calculs numériques de d_λ pour $p_1 = p_2 = 1/2$



Les arbres et leurs bords

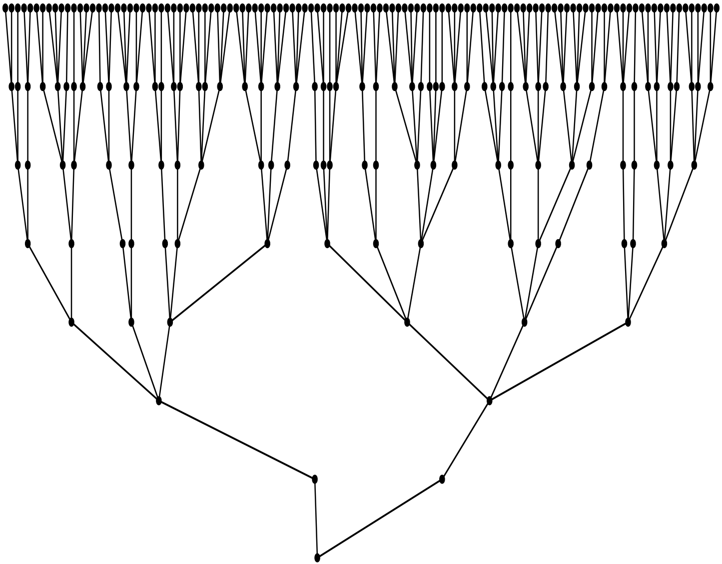
Marche aléatoire λ-biaisée

Théorie ergodique sur les arbres de Galton-Watson

Arbres à longueurs récursives

Arbres pondérés aléatoires : cas transient

Arbres pondérés aléatoires : cas sous-diffusif



Flot limite uniforme

$m = \sum_{k\geq 1} kp_k < \infty$.
Pour $n \geq 0$, $Z_n(T) = \#\{x \in T : |x| = n\}$.
Sous l'hypothèse $\sum_{k\geq 1} p_k k \log k < \infty$, (Kesten-Stigum)

$$\lim_{n\to\infty} Z_n(T)/m^n = W(T) \in \,]0,\infty[, \quad \text{p.s.}$$

Comme $Z_{n+1}(T) = \sum_{i=1}^{\nu_T(\emptyset)} Z_n(T[i])$,

$$W(T) = \frac{1}{m}\sum_{|i|=1} W(T[i]) = \cdots = \frac{1}{m^k}\sum_{|x|=k} W(T[x]).$$

Flot UNIF_T : pour tout x de génération k dans T,

$$\mathsf{UNIF}_T(x) = \frac{W(T[x])}{m^k W(T)}.$$

Arbres marqués

- Arbre marqué : (t, mk_t) avec $\mathsf{mk}_t : t \to (\mathsf{Marks}, \mathrm{d}_{\mathsf{Marks}})$;
- $\mathsf{Marks} = ?$
  - un sous-intervalle J de $]0, \infty[$;
  - l'ensemble des suites finies d'éléments de $]0, \infty[$;
  - $\{1\}$;
  - $\dots$
- arbre de Galton-Watson marqué : tirages i.i.d. de couples (N_x, M_x) à valeurs dans $\mathbb{N}^* \times \mathsf{Marks}$;
- les flots peuvent aussi dépendre des marques.

Règle de flot (Lyons, Peres, Pemantle, 1995)

- Soit $\phi : \mathscr{T}_{\mathrm{m}} \to [0, \infty]$.
- Exemples : $\phi = W$ (pour UNIF), $\phi = \beta$ (pour HARM^{λ}), $\phi = 1$ (pour VIS).
- $A = \{t \in \mathscr{T}_{\mathrm{m}} : \phi(t) \in \,]0, \infty[\}$;
- partie héritée : $A^{\mathrm{o}} = \{t \in \mathscr{T}_{\mathrm{m}} : \forall x \in t,\ t[x] \in A\}$;
- pour t dans A^{o}, flot Θ_t défini par

$$\Theta_t(i) = \frac{\phi(t[i])}{\sum_{j=1}^{\nu_t(\varnothing)} \phi(t[j])}, \quad \forall i \in t_1;$$

Règle de flot (Lyons, Peres, Pemantle, 1995)

- Soit $\phi : \mathscr{T}_{\mathrm{m}} \to [0, \infty]$.
- Exemples : $\phi = W$ (pour UNIF), $\phi = \beta$ (pour HARM^{λ}), $\phi = 1$ (pour VIS).
- $A = \{t \in \mathscr{T}_{\mathrm{m}} : \phi(t) \in]0, \infty[\}$;
- partie héritée : $A^{\mathrm{o}} = \{t \in \mathscr{T}_{\mathrm{m}} : \forall x \in t,\ t[x] \in A\}$;
- pour t dans A^{o}, flot Θ_t défini par

$$\Theta_t(i) = \frac{\phi(t[i])}{\sum_{j=1}^{\nu_t(\varnothing)} \phi(t[j])}, \quad \forall i \in t_1;$$

$$\Theta_t(x) = \prod_{\varnothing \prec y \preceq x} \frac{\phi(t[y])}{\sum_{z_* = y_*} \phi(t[z])}, \quad \forall x \in t.$$

Règle de flot (Lyons, Peres, Pemantle, 1995)

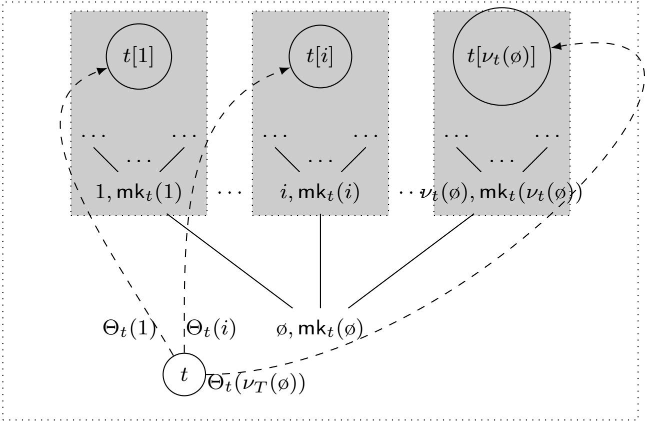
- Soit $\phi : \mathscr{T}_{\mathrm{m}} \to [0, \infty]$.
- Exemples : $\phi = W$ (pour UNIF), $\phi = \beta$ (pour HARM^{λ}), $\phi = 1$ (pour VIS).
- $A = \{t \in \mathscr{T}_{\mathrm{m}} : \phi(t) \in]0, \infty[\}$;
- partie héritée : $A^{\mathrm{o}} = \{t \in \mathscr{T}_{\mathrm{m}} : \forall x \in t,\ t[x] \in A\}$;
- pour t dans A^{o}, flot Θ_t défini par

$$\Theta_t(i) = \frac{\phi(t[i])}{\sum_{j=1}^{\nu_t(\varnothing)} \phi(t[j])}, \quad \forall i \in t_1;$$

$$\Theta_t(x) = \prod_{\varnothing \prec y \preceq x} \frac{\phi(t[y])}{\sum_{z_* = y_*} \phi(t[z])}, \quad \forall x \in t.$$

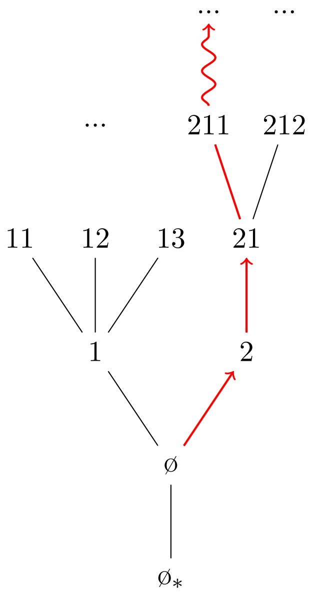
- Si $xy \in t$, alors $\Theta_t(xy) = \Theta_t(x)\Theta_{t[x]}(y)$.

Chaîne de Markov sur $\mathscr{T}_{\mathrm{m}}$



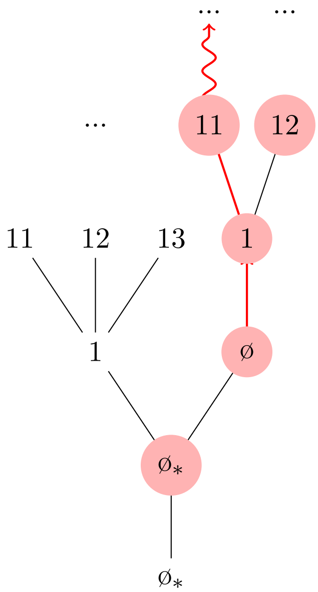
- μ probabilité borélienne sur $\mathscr{T}_{\mathrm{m}}$ tq $\mu(A^{\mathrm{o}}) = 1$;
- $T^{(0)} \sim \mu$;
- $\forall i \in t_1,\ \mathbb{P}(T^{(1)} = t[i] \,|\, T^{(0)} = t) = \Theta_t(i)$.
- Si $T^{(1)} \sim \mu$, on dit que μ est Θ-invariante.

Arbres parcourus par un rayon



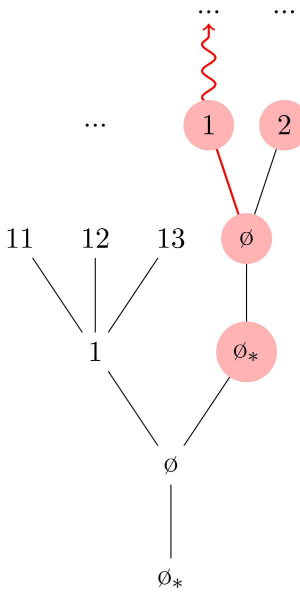
- $\mathscr{T}_{\mathrm{m,r}} = \{(t,\xi) : t \in \mathscr{T}_{\mathrm{m}},\ \xi \in \partial t\}$;
- Shift : $\mathrm{S}(t,\xi) = (t[\xi_1], \xi_1^{-1}\xi)$.

Arbres parcourus par un rayon



- $\mathscr{T}_{\mathrm{m,r}} = \{(t,\xi) : t \in \mathscr{T}_{\mathrm{m}},\ \xi \in \partial t\}$;
- Shift : $\mathrm{S}(t,\xi) = (t[\xi_1], \xi_1^{-1}\xi)$.

Arbres parcourus par un rayon



- $\mathscr{T}_{\mathrm{m,r}} = \{(t,\xi) : t \in \mathscr{T}_{\mathrm{m}},\ \xi \in \partial t\}$;
- Shift : $\mathrm{S}(t,\xi) = (t[\xi_1], \xi_1^{-1}\xi)$.

Théorème central

Théorème (Lyons, Pemantle, Peres 1995)

Si μ est Θ-invariante et absolument continue par rapport à $\mathbf{GW}$*, alors :*

- *μ est équivalente à* $\mathbf{GW}$ *;*
- *le système $(\mathscr{T}_{m,r}, \mathrm{S}, \mu)$ préserve la mesure et est ergodique ;*
- *pour* $\mathbf{GW}$*-presque tout t, pour Θ_t-presque tout $\xi \in \partial t$,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} \log \Theta_t(\xi_n) = \int \Big(\int - \log \Theta_t(\xi_1) \, \mathrm{d}\Theta_t(\xi) \Big) \, \mathrm{d}\mu(t)$$
$$= \dim \Theta_t.$$

Exemples de calculs de dimension

(On oublie temporairement les marques.)

- Pour VIS, $\mathbf{GW}$ est stationnaire. On a p.s.

$$\dim \mathsf{VIS}_T = \mathbb{E}[\log \nu_T(\varnothing)] \underbrace{<}_{\text{Jensen}} \log m.$$

- Pour UNIF, la mesure de densité W par rapport à $\mathbf{GW}$ est invariante. On trouve

$$\dim \mathsf{UNIF}_T = \log m \, (= \dim_{\mathrm{H}} \partial T), \quad \text{p.s.}$$

Théorème (Lyons, Pemantle, Peres, 1995)

Sous les hypothèses du théorème précédent, pour $\mathbf{GW}$*-presque tout* t, $\dim \Theta_t < \log m$, *sauf si* Θ_t *est presque sûrement égal à* UNIF_t.

Une construction de mesures invariantes

Hypothèses :

- $\phi : \mathscr{T}_{\mathrm{m}} \to J$, J sous-intervalle de $]0, \infty[$;
- $\mathsf{Marks} = J$;
- marques indépendantes des nombres d'enfants.
- On peut récupérer la valeur de $\phi(t)$ avec seulement
  - la somme $\sum_{j=1}^{\nu_t(\varnothing)} \phi(t[j])$ et
  - la marque $\mathsf{mk}_t(\varnothing)$:

$$\phi(t) = h\Big(\mathsf{mk}_t(\varnothing), \sum_{j=1}^{\nu_t(\varnothing)} \phi(t[j])\Big) = \mathsf{mk}_t(\varnothing) \odot \sum_{j=1}^{\nu_t(\varnothing)} \phi(t[j]).$$

Une construction de mesures invariantes

$$\phi(t) = h\Big(\mathsf{mk}_t(\varnothing), \sum_{j=1}^{\nu_t(\varnothing)} \phi(t[j])\Big) = \mathsf{mk}_t(\varnothing) \odot \sum_{j=1}^{\nu_t(\varnothing)} \phi(t[j]).$$

On suppose que $\odot$, loi de composition interne sur J, est *commutative*, *associative* et vérifie

$$\forall u, v \in J, \forall s \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{(u+s)\odot v}{u \odot (s+v))} = \frac{(u+s)v}{u(s+v)}.$$

Exemple de lois $\odot$:

- $J =]0, \infty[$ et $u \odot v = \alpha uv$ pour un $\alpha > 0$;
- $J =]\max(0, -c), \infty[$ et $u \odot v = uv/(u+v+c)$, pour un $c > 0$.

Une construction de mesures invariantes

On pose, pour $u > 0$,

$$\kappa(u) = \mathbb{E}\Big[u \odot \sum_{j=1}^{\widetilde{\nu}} \phi(\widetilde{T}[i])\Big].$$

Théorème (R. 2018)

Si, de plus, $\mathbb{E}\left[\kappa(\phi(T))\right] < \infty$, *alors la mesure (renormalisée) de densité* $\kappa(\phi(T))$ *par rapport à* $\mathbf{GW}$ *est* Θ*-invariante.*

Marche λ-biaisée : éléments de preuve

$$\beta(T) = \frac{\sum_{j=1}^{\nu_T(\varnothing)} \beta(T[j])}{\lambda + \sum_{j=1}^{\nu_T(\varnothing)} \beta(T[j])} = \frac{{\color{red}1} \times \sum_{j=1}^{\nu_T(\varnothing)} \beta(T[j])}{\lambda - 1 + {\color{red}1} + \sum_{j=1}^{\nu_T(\varnothing)} \beta(T[j])},$$

$$\mathsf{HARM}_T(i) = \frac{\beta(T[i])}{\sum_{j=1}^{\nu_T(\varnothing)} \beta(T[j])}.$$

Marche λ-biaisée : éléments de preuve

$$\beta(T) = \frac{\sum_{j=1}^{\nu_T(\varnothing)} \beta(T[j])}{\lambda + \sum_{j=1}^{\nu_T(\varnothing)} \beta(T[j])} = \frac{1 \times \sum_{j=1}^{\nu_T(\varnothing)} \beta(T[j])}{\lambda - 1 + 1 + \sum_{j=1}^{\nu_T(\varnothing)} \beta(T[j])},$$

$$\mathsf{HARM}_T(i) = \frac{\beta(T[i])}{\sum_{j=1}^{\nu_T(\varnothing)} \beta(T[j])}.$$

- $\phi(T) = \beta(T)$;
- marques constantes égales à 1.

On cherche la bonne opération $\odot$:

Marche λ-biaisée : éléments de preuve

$$\beta(T) = \frac{\sum_{j=1}^{\nu_T(\varnothing)} \beta(T[j])}{\lambda + \sum_{j=1}^{\nu_T(\varnothing)} \beta(T[j])} = \frac{1 \times \sum_{j=1}^{\nu_T(\varnothing)} \beta(T[j])}{\lambda - 1 + 1 + \sum_{j=1}^{\nu_T(\varnothing)} \beta(T[j])},$$

$$\mathsf{HARM}_T(i) = \frac{\beta(T[i])}{\sum_{j=1}^{\nu_T(\varnothing)} \beta(T[j])}.$$

- $\phi(T) = \beta(T)$;
- marques constantes égales à 1.

On cherche la bonne opération $\odot$:

$$u \odot v = \frac{uv}{\lambda - 1 + u + v}.$$

Les arbres et leurs bords

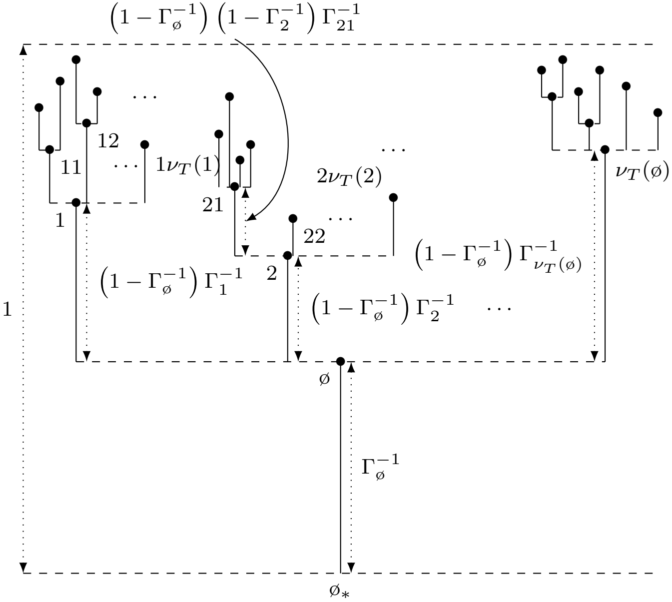
Marche aléatoire λ-biaisée

Théorie ergodique sur les arbres de Galton-Watson

Arbres à longueurs récursives

Arbres pondérés aléatoires : cas transient

Arbres pondérés aléatoires : cas sous-diffusif



$\left(1-\Gamma_{\varnothing}^{-1}\right)\left(1-\Gamma_{2}^{-1}\right)\Gamma_{21}^{-1}$
$\cdots$
12
11
$\cdots$
$1\nu_T(1)$
$\cdots$
$2\nu_T(2)$
$\nu_T(\varnothing)$
21
1
$\cdots$
22
$\left(1-\Gamma_{\varnothing}^{-1}\right)\Gamma_{\nu_T(\varnothing)}^{-1}$
$\left(1-\Gamma_{\varnothing}^{-1}\right)\Gamma_{1}^{-1}$
2
1
$\left(1-\Gamma_{\varnothing}^{-1}\right)\Gamma_{2}^{-1}$
$\cdots$
$\varnothing$
$\Gamma_{\varnothing}^{-1}$
$\varnothing_*$

Description du modèle

- Arbre de Galton-Watson de loi de reprodution $\mathbf{p}$ ($p_0 = 0$ et $p_1 < 1$) ;
- famille i.i.d. de marques $(\Gamma_x)_{x \in T}$ à valeurs dans $]1, \infty[$;
- marche aléatoire aux plus proches voisins avec probabilités de transition *inversement proportionnelles aux longueurs d'arêtes*. Après simplification :

$$\mathrm{P}^t(x,y) = \begin{cases} \Gamma_{xi} / \left(\Gamma_x - 1 + \sum_{j=1}^{\nu_t(x)} \Gamma_{xj} \right) & \text{si } y = xi, \\ (\Gamma_x - 1) / \left(\Gamma_x - 1 + \sum_{j=1}^{\nu_t(x)} \Gamma_{xj} \right) & \text{si } y = x_*. \end{cases}$$

- Généralise un modèle utilisé et étudié par Nicolas Curien et Jean-François Le Gall (Γ^{-1} uniforme sur $]0, 1[$ et $p_2 = 1$), puis Shen Lin ($p_k = \frac{\alpha \Gamma(k-\alpha)}{k! \Gamma(2-\alpha)}$, $k \geq 2$, $\alpha \in]1, 2[$).

Mesure harmonique

- La marche est *transiente* donc la mesure harmonique est définie.
- Pour $1 \leq i \leq \nu_T(\varnothing)$,

$$\mathsf{HARM}_T^{\Gamma}(i) = \frac{\Gamma_i \beta(T[i])}{\sum_{j=1}^{\nu_T(\varnothing)} \Gamma_j \beta(T[j])}.$$

- On pose $\phi(T) = \Gamma_\varnothing \beta(T)$ et on a

$$\phi(T) = \frac{\Gamma_\varnothing \sum_{j=1}^{\nu_T(\varnothing)} \phi(T[j])}{\Gamma_\varnothing - 1 + \sum_{j=1}^{\nu_T(\varnothing)} \phi(T[j])} = \Gamma_\varnothing \odot \sum_{j=1}^{\nu_T(\varnothing)} \phi(T[j]),$$

- avec $u \odot v = uv/(u+v-1)$.

Distance associée aux longueurs

- Γ-hauteur de x dans T :

$$|x|^{\Gamma} = \sum_{y \preceq x} \Big(\prod_{z \prec y} (1 - \Gamma_z^{-1}) \Big) \Gamma_y^{-1}.$$

- On a la relation

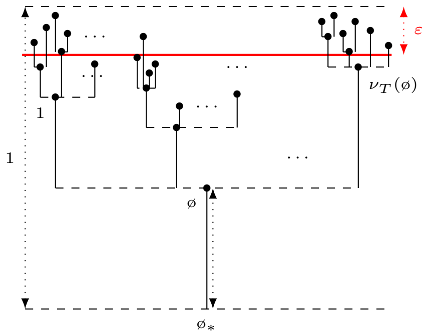
$$1 - |x|^{\Gamma} = \prod_{y \preceq x} (1 - \Gamma_y^{-1}).$$

- Pour deux rayons distincts ξ et η :

$$\mathrm{d}^{\Gamma}(\xi, \eta) = 1 - |\xi \wedge \eta|^{\Gamma}.$$

Paramètre de Malthus

- Unique $\alpha > 0$ tel que
$$\mathbb{E}[(1 - \Gamma_{\varnothing}^{-1})^{\alpha}] = 1/m.$$
- Taille de la population (Jagers-Nerman 1984) : pour $\varepsilon > 0$,
$$A_{\varepsilon} = \{x \in T : 1 - |x|^{\Gamma} \leq \varepsilon \leq 1 - |x_*|^{\Gamma}\}$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{\alpha} \# A_{\varepsilon} =: W^{\Gamma}(T) \in]0, \infty[\quad \text{p.s.}$$



Paramètre de Malthus

- Unique $\alpha > 0$ tel que

$$\mathbb{E}[(1-\Gamma_{\varnothing}^{-1})^{\alpha}] = 1/m.$$

- Taille de la population (Jagers-Nerman 1984) : pour $\varepsilon > 0$,

$$A_{\varepsilon} = \{x \in T : 1 - |x|^{\Gamma} \leq \varepsilon \leq 1 - |x_*|^{\Gamma}\}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{\alpha} \# A_{\varepsilon} =: W^{\Gamma}(T) \in]0, \infty[\quad \text{p.s.}$$

- Mesure limite uniforme par rapport à la distance d^{Γ} :

$$\mathsf{UNIF}^{\Gamma}(i) = \frac{W^{\Gamma}(T[i])}{\sum_{j=1}^{\nu_T(\varnothing)} W^{\Gamma}(T[j])}.$$

- La dimension de ∂T et de UNIF^{Γ} pour la distance d^{Γ} est presque sûrement égale au paramètre de Malthus.

Dimension pour la distance associée aux longueurs

- Chute de dimension pour toutes les règles de flots différentes de UNIF^{Γ} qui admettent une mesure invariante absolument continue par rapport à la loi de l'arbre.

Dimension pour la distance associée aux longueurs

- Chute de dimension pour toutes les règles de flots différentes de UNIF^Γ qui admettent une mesure invariante absolument continue par rapport à la loi de l'arbre.

Théorème (R. 2018)

Si $\kappa(\phi(T))$ est intégrable, la dimension de la mesure HARM_T^Γ par rapport à d^Γ est presque sûrement égale à

$$\dim^{d^\Gamma} \mathsf{HARM}^\Gamma(T) = \frac{\mathbb{E}\left[\log\left(1-\Gamma_\varnothing^{-1}\phi(T)\right)\kappa\left(\phi(T)\right)\right]}{\mathbb{E}\left[\log\left(1-\Gamma_\varnothing^{-1}\right)\kappa\left(\phi(T)\right)\right]} - 1,$$

Elle est strictement inférieure à α sauf si Γ et la loi de reproduction sont toutes les deux dégénérées.

Les arbres et leurs bords

Marche aléatoire λ-biaisée

Théorie ergodique sur les arbres de Galton-Watson

Arbres à longueurs récursives

Arbres pondérés aléatoires : cas transient

Arbres pondérés aléatoires : cas sous-diffusif

Suites finies de réels positifs

Espace

$$\mathsf{Tuples} = \bigsqcup_{k \geq 1}]0, \infty[^k.$$

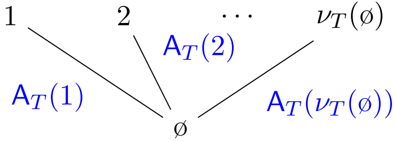
$\mathbf{q}$ une mesure borélienne de probabilité sur Tuples.
Exemple :

1. $N, A(1), A(2)$ v.a. indépendantes à valeurs dans $]0, \infty[$.
2. $\mathbb{P}(N = 1) = \mathbb{P}(N = 2) = 1/2$;
3. $\mathbf{q}$: loi du vecteur égal à $(A(1), A(2))$ si $N = 2$, $(A(1))$ si $N = 1$.

Arbres de Galton-Watson pondérés

Famille i.i.d. $(\mathbf{A}^x)$ de loi commune $\mathbf{q}$.

$$\mathbf{A}^{\varnothing} = (\mathsf{A}_T(1), \mathsf{A}_T(2), \ldots, \mathsf{A}_T(\nu_T(\varnothing))).$$

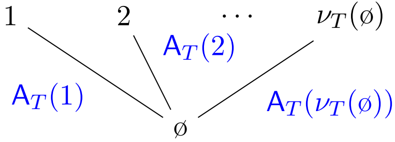


- Recommencer pour les enfants de $\varnothing$, avec $(\mathbf{A}^{\mathbf{i}})_{1 \leq i \leq \nu_T(\varnothing)}$ puis ses petits-enfants, etc.
- T arbre aléatoire, avec $\mathsf{A}_T : T \setminus \{\varnothing\} \to]0, \infty[$ fonction de poids, est un arbre pondéré aléatoire.

Arbres de Galton-Watson pondérés

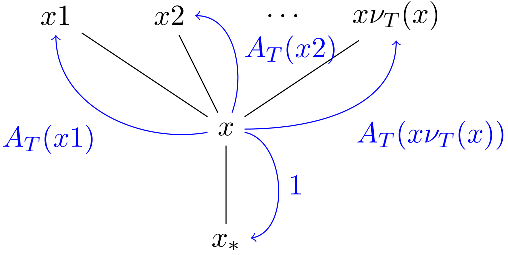
Famille i.i.d. $(\mathbf{A}^x)$ de loi commune $\mathbf{q}$.

$$\mathbf{A}^{\varnothing} = (\mathsf{A}_T(1), \mathsf{A}_T(2), \ldots, \mathsf{A}_T(\nu_T(\varnothing))).$$



- Recommencer pour les enfants de $\varnothing$, avec $(\mathbf{A}^{\mathbf{i}})_{1 \le i \le \nu_T(\varnothing)}$ puis ses petits-enfants, etc.
- T arbre aléatoire, avec $\mathsf{A}_T : T \setminus \{\varnothing\} \to]0, \infty[$ fonction de poids, est un arbre pondéré aléatoire.

Marche aléatoire sur un arbre pondéré



Noyau de transition P^T :

$$P^T(x, x_*) = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{\nu_T(x)} \mathsf{A}_T(xj)};$$

$$P^T(x, xi) = \frac{\mathsf{A}_T(xi)}{1 + \sum_{j=1}^{\nu_T(x)} \mathsf{A}_T(xj)} \quad i = 1, \ldots, \nu_T(x).$$

Transience

Soit, pour $s \geq 0$,

$$\psi(s) = \log \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{\nu_T(\varnothing)} \mathsf{A}_T(i)^s\Big] \in \left]-\infty, \infty\right].$$

Théorème (Lyons-Pemantle 1992, Faraud 2011)

Si $\min_{s\in[0,1]} \psi(s) > 0$, *alors la marche aléatoire sur l'arbre pondéré* T *est p.s. transiente.*

Transience

Soit, pour $s \geq 0$,

$$\psi(s) = \log \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{\nu_T(\varnothing)} \mathsf{A}_T(i)^s\Big] \in \,]-\infty, \infty].$$

Théorème (Lyons-Pemantle 1992, Faraud 2011)

Si $\min_{s\in[0,1]} \psi(s) > 0$, *alors la marche aléatoire sur l'arbre pondéré* T *est p.s. transiente.*

Questions :

- Existence d'une mesure HARM-invariante ?
- Chute de dimension pour HARM_T ?

Chute de dimension

Théorème (R. 2018+)

Dans le cas transient, existence d'une mesure HARM*-invariante absolument continue par rapport à la loi de l'arbre et si* $\mathbf{q}$ *n'est pas une mesure de Dirac, il existe une constante* $\alpha \in]0, \log(m)[$ *telle que, presque sûrement,*

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log(\mathsf{HARM}_T[\Xi_n]) = \dim_{\mathrm{H}} \mathsf{HARM}_T = \alpha.$$

- Stratégie de preuve évoquée dans un article de Lyons, Pemantle et Peres (1996) dans le cas de la marche λ-biaisée ($\mathsf{A}_T = \lambda^{-1}$).
- Outils : théorie du renouvellement et théorie ergodique.
- Expression (peu explicite) pour la mesure invariante (et donc α.

La martingale de Mandelbrot

Rappel : pour $s \geq 0$,

$$\psi(s) = \log \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{\nu_T(\varnothing)} \mathsf{A}_T(i)^s\Big].$$

Cas dit *normalisé*

$$\psi(1) = \log \mathbb{E} \sum_{i=1}^{\nu_T(\varnothing)} \mathsf{A}_T(i) = 0. \qquad (H_{\text{normalisé}})$$

Martingale de Mandelbrot (1974) : pour $n \geq 1$,

$$M_n(T) = \sum_{|x|=n} \prod_{\varnothing \prec y \preceq x} \mathsf{A}_T(y).$$

Existence d'une v.a. $M_\infty(T)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} M_n(T) = M_\infty(T) \quad \text{p.s.}$$

Théorème de Biggins

Question : quand est-ce que $M_\infty(T)$ est non-dégénérée ?

Théorème de Biggins

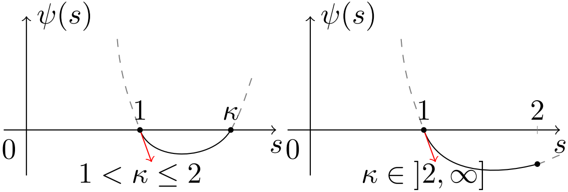
Question : quand est-ce que $M_\infty(T)$ est non-dégénérée ?
Réponse (Kahane-Peyrière 1976, Biggins 1977, Lyons 1997) :
Sous les hypothèses

$$\psi'(1) \coloneqq \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\nu_T(\varnothing)} \mathsf{A}_T(i) \log \mathsf{A}_T(i)\right] \in [-\infty, 0[; \qquad (H_{\text{dérivée}})$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{\nu_T(\varnothing)} \mathsf{A}_T(i)\right) \log^+ \left(\sum_{i=1}^{\nu_T(\varnothing)} \mathsf{A}_T(i)\right)\right] < \infty, \qquad (H_{X \log^+ X})$$

on a convergence dans L^1 et $M_\infty(T) > 0$ p.s.
Si $\psi'(1)$ est fini, ces conditions sont aussi nécessaires.

Cas sous-diffusif



On pose $\kappa = \inf\{s > 1 : \psi(s) = 0\} \in]1, \infty]$. Hypothèses :

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{\nu_T(\varnothing)} \mathsf{A}_T(i)\Big)^{\kappa}\Big] + \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{\nu_T(\varnothing)} \mathsf{A}_T(i)^{\kappa} \log^+ \mathsf{A}_T(i)\Big] < \infty, \quad \text{si } 1 < \kappa \le 2,$$

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{\nu_T(\varnothing)} \mathsf{A}_T(i)\Big)^{2}\Big] < \infty, \quad \text{si } \kappa \in]2, \infty]. \tag{H_κ}$$

Conductance entre ø et le niveau n

Marche aléatoire sur T $\leftrightarrow$ réseau électrique sur T.
Conductance de l'arête $\{x_*, x\}$: $\prod_{\o \prec y \preceq x} \mathsf{A}_T(x)$.
Conductance entre ø et le niveau n :

$$\mathscr{C}_n(T) = \frac{P_{\o}^T(\tau^{(n)} < \tau_{\o}^+)}{P^T(\o, \o_*)}.$$

Par récurrence de la marche, $\mathscr{C}_n(T) \to 0$, p.s.

Conductance entre ø et le niveau n

Marche aléatoire sur T $\leftrightarrow$ réseau électrique sur T.
Conductance de l'arête $\{x_*, x\}$: $\prod_{\varnothing \prec y \preceq x} \mathsf{A}_T(x)$.
Conductance entre ø et le niveau n :

$$\mathscr{C}_n(T) = \frac{P^T_\varnothing(\tau^{(n)} < \tau^+_\varnothing)}{P^T(\varnothing, \varnothing_*)}.$$

Par récurrence de la marche, $\mathscr{C}_n(T) \to 0$, p.s.

- À quelle vitesse ?
- Quelle loi limite si on renormalise $\mathscr{C}_n(T)$ par cette vitesse ?

Réponse partielle :

Théorème (Rousselin 2018+)

Sous les hypothèse ($H_{\text{normalisé}}$), ($H_{\text{dérivée}}$) *et* (H_κ),

$$\text{si } 1 < \kappa < 2,$$
$$0 < \liminf_{n\to\infty} n^{1/(\kappa-1)}\mathbb{E}[\mathscr{C}_n(T)] \leq \limsup_{n\to\infty} n^{1/(\kappa-1)}\mathbb{E}[\mathscr{C}_n(T)] < \infty;$$
$$\text{si } \kappa = 2,$$
$$0 < \liminf_{n\to\infty} n\log n\mathbb{E}[\mathscr{C}_n(T)] \leq \limsup_{n\to\infty} n\log n\mathbb{E}[\mathscr{C}_n(T)] < \infty;$$
$$\lim_{n\to\infty} n\mathbb{E}[\mathscr{C}_n(T)] = \|M_\infty(T)\|_2 \quad \text{si } \kappa > 2.$$

Dans tous les cas, presque sûrement et dans L^p *pour* $p \in [1,\kappa[$, *si* $1 < \kappa \leq 2$ *et dans* L^2 *si* $\kappa > 2$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{C}_n(T)/\mathbb{E}[\mathscr{C}_n(T)] = M_\infty(T).$$

Questions : (liste non exhaustive...)

- Sur ce dernier modèle :
  - $\liminf = \limsup$?
  - théorème central limite (ou au moins taille des fluctations) ?
  - lien avec les travaux de Aïdékon-de Raphélis ?

Questions : (liste non exhaustive...)

- Sur ce dernier modèle :
  - $\liminf = \limsup$?
  - théorème central limite (ou au moins taille des fluctations) ?
  - lien avec les travaux de Aïdékon-de Raphélis ?
- Sur les arbres pondérés transients :
  - liens avec la vitesse ?
  - possible d'obtenir (au moins dans certains cas particuliers) une formule « plus explicite » pour la dimension ?

Questions : (liste non exhaustive...)

- Sur ce dernier modèle :
  - $\liminf = \limsup$?
  - théorème central limite (ou au moins taille des fluctations) ?
  - lien avec les travaux de Aïdékon-de Raphélis ?
- Sur les arbres pondérés transients :
  - liens avec la vitesse ?
  - possible d'obtenir (au moins dans certains cas particuliers) une formule « plus explicite » pour la dimension ?
- Sur les marches λ-biaisées :
  - monotonie, régularité de la dimension en fonction de λ ?
  - est-ce que $\dim_{\mathrm{H}} \mathsf{VIS}_T$ est une borne inférieure ?
  - vitesse de convergence de $\frac{-1}{n} \log(\mathsf{HARM}_T(\Xi_n))$?
  - calcul « moins magique » de la dimension ?
  - entropie asymptotique = vitesse $\times$ dimension ? monotonie de cette entropie ?
  - Plus d'informations sur β ?

Merci pour votre attention !