Initiation aux preuves formelles : TD 1 bis

septembre 2024 — Pierre Rousselin

1 Calcul des prédicats

Exercice 1 : Prouvable ou non ?

Pour chacun des états de preuve suivant, dire s'ils sont prouvables ou non. Dans le cas où il sont prouvables donner une preuve en Coq, dans le cas où il ne sont pas prouvable, donner un contre-exemple, c'est-à-dire des propositions A, B et C qui rendent le contexte vrai mais pas le but.

1.
```
X : Type
P, Q : X -> Prop
H : exists x : X, P x /\ Q x

========================= (1 / 1)

exists z : X, P z
```

2.
```
X : Type
P, Q : X -> Prop
H : exists x : X, P x \/ Q x

========================= (1 / 1)

exists z : X, P z
```

3.
```
X : Type
P, Q : X -> Prop
H : forall x : X, P x /\ Q x

========================= (1 / 1)

forall z : X, P z
```

4.
```
X : Type
P, Q : X -> Prop
H : forall x : X, P x

========================= (1 / 1)

forall z : X, P z \/ Q z
```

5.
```
X : Type
P, Q : X -> Prop
H : forall x : X, P x \/ ~ Q x
H' : forall z : X, Q z

========================= (1 / 1)

forall y : X, P y
```

6.
```
X : Type
P, Q : X -> Prop
H : exists x : X, P x \/ ~ Q x
H' : exists z : X, Q z

========================= (1 / 1)

exists y : X, P y
```

7.
```
X : Type
P, Q : X -> Prop
H : forall x : X, P x \/ ~ Q x
H' : exists z : X, Q z

========================= (1 / 1)

exists y : X, P y
```

--- * ---

2 Instanciation et typage

Coq/Rocq est basé sur le calcul des constructions inductives qui est une théorie des types. Tous les objets (propriétés, nombres, etc) ont un type. Dans ce contexte, une preuve est en fait un habitant du type que l'on cherche à prouver.

Exercice 2 : Quelques preuves directes avec `exact`

1. On se place dans le contexte suivant :
```
P, Q : nat -> Prop
H : forall x : nat, P x -> Q x
H' : P 0.
```

```
========================= (1 / 1)

Q 0
```

a) De quel type est le terme `(H 0)` ?
b) De quel type est le terme `(H 0 H')` ?
c) Proposer une preuve du but avec un seul `exact`.

2. On se place dans le contexte suivant :

```
A, B, C : Prop
H1 : A
H2 : B
H3 : A -> B -> C

========================= (1 / 1)

C
```

a) De quel type est le terme `(H3 H1)` ?
b) De quel type est le terme `(H3 H1 H2)` ?
c) Proposer une preuve du but avec un seul `exact`.

3. On se place dans le contexte suivant :

```
P : nat -> Prop
H : forall x : nat, P x -> P (S x)
H' : P 0.

========================= (1 / 1)

P 1
```

a) Proposer une preuve du but avec un seul `exact`.
b) Proposer une preuve de `P 2` avec un seul `exact`.
c) Quid de `P 3`, `P 4`, etc ?

--- * ---