Initiation aux preuves formelles : TD 3

septembre 2024 — Pierre Rousselin

Dans tout cet énoncé, on considère l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels (mais en fait, les théoèrmes qu'on prouve sont souvent vrais dans des contextes plus généraux). On veut travailler les points suivants :

— raisonnements vers l'avant et vers l'arrière

— réécriture avec une égalité

— application d'une implication

— rédaction d'une démonstration sur papier très (trop) détaillée

Exercice 1 : Compatibilité avec l'égalité

Pour le moment, on suppose simplement que $\mathbb{R}$ est un ensemble muni d'une addition, c'est-à-dire d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$. Donner la preuve en Coq des énoncés suivants.

```
Lemma Rplus_eq_compat_l (r r1 r2 : R) : r1 = r2 -> r + r1 = r + r2.
Proof. Admitted.
Lemma Rplus_eq_compat_r (r r1 r2 : R) : r1 = r2 -> r1 + r = r2 + r.
Proof. Admitted.
Lemma Rplus_eq_compat (r1 r2 r1' r2' : R) :
  r1 = r2 -> r1' = r2' -> r1 + r1' = r2 + r2'.
Proof. Admitted.
```

Quelles propriétés de l'addition sont nécessaires ? Pouvez-vous proposer des énoncés plus généraux ?

Remarque : les énoncés `Rplus_eq_compat_l` et `Rplus_eq_compat_r` font partie de la bibliothèque standard. Bizarrement `Rplus_eq_compat` a été oubliée mais la tactique `f_equal` permet de transformer un but `f r1 r1' = f r2 r2'` en deux sous-buts `r1 = r2` et `r1' = r2'`.

--- * ---

Exercice 2 : Unicité de l'opposé

On suppose maintenant qu'on a une constante 0 dans $\mathbb{R}$ et que l'addition vérifie les règles suivantes :

```
Rplus_comm: forall (r1 r2 : R), r1 + r2 = r2 + r1
Rplus_0_l: forall (r : R), 0 + r = r
Rplus_assoc: forall (r1 r2 r3 : R), (r1 + r2) + r3 = r1 + (r2 + r3)
```

On va montrer ci-dessous que l'opposé d'un réel, s'il existe, est unique.

1. Compléter la démonstration ci-dessous en justifiant chaque étape avec l'un des lemmes précédents, convenablement instanciés. Faire apparaître les réécritures en entourant les termes concernés, reliés par une flèche et en annotant la flèche par une règle. Faire apparaître les applications d'implications ou les raisonnements par équivalence en annotant directement les flèches $\Uparrow$, $\Downarrow$ ou $\Updownarrow$.

Théorème 1. *Soient x, y et z trois réels tels que*

$$x + y = 0 \quad \textit{et} \tag{H_1}$$
$$x + z = 0. \tag{H_2}$$

Alors, $y = z$.

Démonstration. Par hypothèse, on a $x + y = 0$. Or,

$$\begin{gathered} x + y = 0 \\ \Downarrow \\ (x + y) + z = 0 + z \\ \Updownarrow \\ (x + y) + z = z \\ \Updownarrow \\ (y + x) + z = z \\ \Updownarrow \\ y + (x + z) = z \\ \Updownarrow \\ y + 0 = z \\ \Updownarrow \\ y = z. \end{gathered}$$

□

2. La preuve précédente était vers l'avant. Compléter la démonstration suivante, vers l'arrière :

Démonstration. On doit montrer que $y = z$. Or,

$$\begin{gathered} y = z \\ \Updownarrow \\ \dots \end{gathered}$$

□

3. Transformer chacune des démonstrations ci-dessus en preuves en Coq du lemme suivant :

```
Lemma opposé_unique (x y z : R) (H1 : x + y = 0) (H2 : x + z = 0) :
  y = z.
```

4. Proposer une nouvelle démonstration mathématique plus concise et moins formelle que les démonstrations précédentes (question subjective !).

--- * ---

Exercice 3 : Simplifier dans les égalités avec sommes

On suppose maintenant que tous les réels ont un opposé. Formellement, on a une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto -x$ telle que

```
Lemma Rplus_opp_l (r : R) : - r + r = 0.
```

1. On considère le théorème suivant.

Théorème 2 (`Rplus_eq_reg_l`)**.** *Soient r, r_1 et r_2 trois réels. Si $r + r1 = r + r2$, alors $r1 = r2$.*

Donner une démonstration vers l'avant de ce théorème, dans le style de l'exercice précédent.

2. En donner maintenant une démonstration vers l'arrière.

3. Donner des preuves en Coq équivalentes pour le théorème

```
Lemma Rplus_eq_reg_l: forall r r1 r2 : R, r1 + r = r2 + r -> r1 = r2
```

4. Donner une démonstration mathématique moins formelle de ce théorème.

--- * ---