Initiation aux preuves formelles : TD 4

novembre 2024 — Sergueï Lenglet et Pierre Rousselin

Dans tout cet énoncé, on considère l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, noté `R` en Coq et l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, noté `nat` en Coq. On va surtout travailler sur les suites numériques, c'est-à-dire les fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Vous trouverez, en annexe, une liste de lemme que vous pouvez utiliser. Remarque : ceux-ci ont été utilisés dans la correction, mais il peut y avoir d'autres choix possibles, n'hésitez pas à en réclamer d'avantage, même si le chargé de TD/TP ne les connais pas par cœur. Chaque résultat du TD peut être utilisé dans un exercice ultérieur, qu'il ait été prouvé ou non.

On commence par donner la définition de « suite croissante », « suite décroissante », « suite majorée » et « suite minorée ».

```
Definition croissante (Un : nat -> R) := forall n, Un n <= Un (S n).
Definition décroissante (Un : nat -> R) := forall n, Un (S n) <= Un n.
Definition majorée (Un : nat -> R) := exists M, forall n, Un n <= M.
Definition minorée (Un : nat -> R) := exists m, forall n, m <= Un n.
```

Exercice 1 : Les suites croissantes sont minorées

On va ici prouver le résultat, bien connu, suivant : toute suite croissante est minorée.

1. Commencer par en donner la démonstration mathématique, par récurrence.
2. En donner maintenant une preuve en Coq. Le lemme est écrit sous la forme suivante :

   ```
   Lemma croissante_minorée (Un : nat -> R) : croissante Un -> minorée Un.
   ```

   Pour information, la correction utilise les lemmes `Rle_refl` et `Rle_trans`.

--- * ---

Exercice 2 : La somme de deux suites majorées...

On prouve maintenant le résultat, bien intuitif, que la somme de deux suites majorées est majorée.

1. En donner une démonstration mathématique très détaillée.
2. Donner maintenant une preuve en Coq. La correction utilise le lemme `Rplus_le_compat`. Le lemme est écrit sous la forme suivante :

   ```
   Lemma minorée_plus_minorée (Un Vn : nat -> R) :
     minorée Un -> minorée Vn -> minorée (fun n => Un n + Vn n).
   ```

--- * ---

Exercice 3 : Deux sens de « suite croissante »

En fait, on peut prouver le lemme suivant, qui généralise notre premier lemme.

```
Lemma croissante_croissante (Un : nat -> R) : croissante Un ->
  forall n m, (n <= m)%nat -> (Un n <= Un m).
```

1. Écrire soigneusement la démonstration mathématique par récurrence *sur m*.
2. Écrire la preuve en Coq. La correction utilise les lemmes `Nat.le_0_r`, `Nat.le_succ_r`, `Rle_refl` et `Rle_trans`.

--- * ---

Liste de lemmes utilisés pour préparer ce TD

```
Nat.le_0_r : forall n : nat, (n <= 0)%nat <-> n = 0%nat
Nat.le_succ_r : forall n m : nat, (n <= S m)%nat <-> (n <= m)%nat \/ n = S m
Rle_refl : forall r : R, r <= r
Rle_trans : forall r1 r2 r3 : R, r1 <= r2 -> r2 <= r3 -> r1 <= r3
Rplus_le_compat : forall r1 r2 r3 r4 : R, r1 <= r2 -> r3 <= r4 -> r1 + r3 <= r2 + r4
```