M2 Mathématiques fondamentales **Année 2020-2021**

Introduction à la Théorie ergodique

Durée: 3 heures

Les documents de cours sont interdits.

Première partie: Un critère de mélange.

Dans tout l'exercice, on supposera pour simplifier que les espaces mesurables considérés (et donc leur produits cartésiens) sont métriques compacts munis de leur tribu Borélienne associée et que les transformations sont (bijectives et) continues.

On rappelle que si $(\Omega, \mathcal{F})$ est un tel espace alors la convergence faible d'une suite de mesures finies $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vers γ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ correspond à la convergence, pour toute fonction continue $f : \Omega \to \mathbb{R}$, de $\left\{\int_\Omega f d\gamma_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\int_\Omega f d\gamma$.

1 Généralités.

1. (Cours) Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique ergodique et ν, une mesure de probabilité T-invariante vérifiant $\nu \ll \mu$, montrer que $\nu = \mu$.

   ———

   Donnons une preuve différente de celle donnée en cours:

   Comme $\nu \ll \mu$, on peut considérer $\frac{d\nu}{d\mu}$, la dérivée de Radon-Nykodim et calculer $\frac{d\nu}{d\mu} \circ T$:

   Pour toute fonction f mesurable positive:

$$\begin{aligned}\int_X f \frac{d\nu}{d\mu} \circ T d\mu &= \int_X f \circ T^{-1} \circ T \frac{d\nu}{d\mu} \circ T d\mu \\ &= \int_X f \circ T^{-1} \frac{d\nu}{d\mu} d\mu \\ &= \int_X f \circ T^{-1} d\nu \\ &= \int_X f d\nu \\ &= \int_X f \frac{d\nu}{d\mu} d\mu\end{aligned}$$

   car μ et ν sont T-invariantes.

   Ainsi, on en déduit que $\frac{d\nu}{d\mu} \circ T = \frac{d\nu}{d\mu}$ μ-p.p. et donc, par ergodicité de $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$, $\frac{d\nu}{d\mu}$ est constante sur un ensemble de mesure pleine. Comme par ailleurs

$$\int_X \frac{d\nu}{d\mu} d\mu = 1,$$

   on en déduit que $\frac{d\nu}{d\mu} = 1$ μ-p.p., c'est à dire $\mu = \nu$.

2. Ergodicité totale.

On dit qu'un système dynamique $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ est *totalement ergodique* si, pour tout $n \geq 1$, $(X, \mathcal{A}, \mu, T^n)$ est ergodique. Montrer qu'un système dynamique est totalement ergodique si et seulement si il ne possède pas de facteur fini autre que la tribu triviale.

———

Notons d'abord qu'il faut comprendre tribu triviale au sens "mod. 0", c'est à dire une tribu ne possédant que des ensembles de mesure 0 ou 1.

Supposons que $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ n'est pas totalement ergodique. Il existe donc $n \geq 1$ tel que $(X, \mathcal{A}, \mu, T^n)$ n'est pas ergodique et donc un ensemble T^n-invariant A tel que $0 < \mu(A) < 1$. Considérons alors le facteur de $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ engendré par A, à savoir $\sigma\left\{T^{-k}A,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, c'est un facteur non trivial car il contient A. Or, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $T^{-k+n}A = T^{-k}\left(T^{-n}A\right) = T^{-k}A$, ainsi $\sigma\left\{T^{-k}A,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ n'est autre que $\sigma\left\{T^{-k}A,\ k = 0, \cdots, n-1\right\}$. Mais une tribu engendrée par une collection finie d'ensembles est nécessairement finie ce qui donne le facteur fini non trivial recherché. Réciproquement, si $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ possède un facteur fini non-trivial $\mathcal{C}$, on considère alors la partition finie $\mathcal{P} := \{A_1, \ldots, A_k\}$ associée de sorte que tout élément de $\mathcal{C}$ est une réunion d'atomes de $\mathcal{P}$. Il est clair que par unicité de cette partition, celle-ci est T-invariante au sens où pour tout $1 \leq i \leq k$, $T^{-1}A_i$ est encore un des atomes de la partition. Comme $\mathcal{C}$ est non-triviale, il existe au moins un atome A_i tel que $0 < \mu(A_i) < 1$ et en considérant les ensembles $T^{-k}A_i$, $k \in \mathbb{N}$ qui sont donc encore des atomes de la partition, celle-ci étant finie, il existe nécessairement $n_1 > n_2 \geq 0$ tel que $T^{-n_1}A_i = T^{-n_2}A_i$ autrement dit $T^{-(n_1-n_2)}A_i = A_i$. Ainsi $(X, \mathcal{A}, \mu, T^{n_1-n_2})$ n'est pas ergodique et donc $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ n'est pas totalement ergodique.

3. Couplages.

Notons $J(T)$ l'ensemble des mesures de probabilités sur $(X \times X, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A})$ associées à des autocouplages de $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$, c'est à dire l'ensemble des mesures de probabilités m sur $(X \times X, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A})$, $T \times T$ invariantes et telles que $m(\cdot \times X) = m(X \times \cdot) = \mu$.

Montrer que $J(T)$ est compact pour la topologie de la convergence faible des mesures finies sur $(X \times X, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A})$.

———

Dans la suite, on considère des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels (on pourrait tout faire sur $\mathbb{R}$...). Si Y est un espace métrique compact, $\mathcal{C}(Y)$ désigne l'espace des fonctions continues sur l'espace métrique compact Y, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et muni de la topologie issue de la norme infinie.

L'ensemble $\mathcal{M}$ des mesures de Radon signées sur $(X \times X, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A})$ étant le dual topologique de $\mathcal{C}(X \times X)$, on sait que la boule unitée fortement fermée de $\mathcal{M}$ est compacte pour la topologie de la convergence faible des mesures, et métrisable puisque $\mathcal{C}(X \times X)$ est séparable. Ainsi sur cette boule, qui contient les mesures de probabilités (et donc aussi $J(T)$), la compacité y est équivalente à la compacité séquentielle.

Il suffit donc ici de montrer que $J(T)$ est fermé. Soit donc $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $J(T)$ convergeant vers m. Par continuité de T sur X et donc de $T \times T$ sur $X \times X$, pour tout $F \in \mathcal{C}(X \times X)$ on a $F \circ T \times T \in \mathcal{C}(X \times X)$ et donc:

$$\begin{aligned}
\int_{X \times X} F \circ T \times T dm &= \lim_{n \to \infty} \int_{X \times X} F \circ T \times T dm_n \\
&= \lim_{n \to \infty} \int_{X \times X} F dm_n \\
&= \int_{X \times X} F dm.
\end{aligned}$$

Ainsi m est $T \times T$-invariante. Ensuite en considérant $f \in \mathcal{C}(X)$, on a $f \otimes 1_X \in \mathcal{C}(X \times X)$ et donc, en notant $\widetilde{m} := m(\cdot \times X)$:

$$\begin{aligned}\int_X f d\widetilde{m} &= \int_{X\times X} f \otimes 1_X dm \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{X\times X} f\otimes 1_X dm_n \\ &= \int_X f d\mu\end{aligned}$$

Ainsi $m(\cdot \times X) = \mu$ et on a de même $m(X \times \cdot) = \mu$. Finalement $m \in J(T)$ et $J(T)$ est bien fermé et donc compact.

4. Notons maintenant $M(T)$ l'ensemble des opérateurs de Markov sur $L^2(\mu)$ commutant avec U_T. Montrer que les éléments de $M(T)$ sont des contractions (i.e. de norme d'opérateur inférieure ou égale à 1).

   ———

   Soit $\Phi \in M(T)$ et m la mesure correspondant au couplage induit par Φ. Pour tous f et g dans $L^2(\mu)$, on a

$$\begin{aligned}\langle \Phi(f), g\rangle_{L^2(\mu)} &= \int_X \Phi(f)\, g d\mu \\ &= \int_{X\times X} f\otimes g dm \\ &= \int_{X\times X} f\otimes 1_X 1_X \otimes g dm \\ &\leq \sqrt{\int_{X\times X} (f\otimes 1_X)^2 dm}\sqrt{\int_{X\times X} (1_X\otimes g)^2 dm} \\ &= \sqrt{\int_{X\times X} f^2\otimes 1_X dm}\sqrt{\int_{X\times X} 1_X\otimes g^2 dm} \\ &= \sqrt{\int_X f^2 d\mu}\sqrt{\int_X g^2 d\mu} \\ &= \|f\|_2 \|g\|_2\end{aligned}$$

   ce qui prouve que Φ est bien une contraction.

5. Soient $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et Φ des éléments de $M(T)$ et $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et m les mesures des autocouplages associés. Montrer que $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers m si et seulement si $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers Φ (i.e. pour tout $h \in L^2(\mu)$, la suite $\{\Phi_n(h)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $\Phi(h)$).

   ———

   Si $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers m alors, pour toutes fonctions f et g dans $\mathcal{C}(X)$, $f\otimes g \in \mathcal{C}(X\times X)$ et donc

$$\begin{aligned}\langle \Phi_n(f), g\rangle_{L^2(\mu)} &= \int_{X\times X} f\otimes g dm_n \\ &\to \int_{X\times X} f\otimes g dm \\ &= \langle \Phi(f), g\rangle_{L^2(\mu)}.\end{aligned}$$

   Il reste à étendre cette convergence pour tout h et k dans $L^2(\mu)$ en utilisant la densité de $\mathcal{C}(X)$ dans $L^2(\mu)$ et le résultat de la question précédente.

Pour h et k dans $L^2(\mu)$ et f et g dans $\mathcal{C}(X)$, grâce à l'inégalité triangulaire, $\left|\langle\Phi_n(h), k\rangle_{L^2(\mu)} - \langle\Phi(h), k\rangle_{L^2(\mu)}\right|$ est inférieur ou égal à:

$$\begin{aligned}
&\left|\langle\Phi_n(h), k\rangle_{L^2(\mu)} - \langle\Phi_n(f), k\rangle_{L^2(\mu)}\right| + \left|\langle\Phi_n(f), k\rangle_{L^2(\mu)} - \langle\Phi_n(f), g\rangle_{L^2(\mu)}\right| \\
&+ \left|\langle\Phi_n(f), g\rangle_{L^2(\mu)} - \langle\Phi(f), g\rangle_{L^2(\mu)}\right| + \left|\langle\Phi(f), g\rangle_{L^2(\mu)} - \langle\Phi(f), k\rangle_{L^2(\mu)}\right| \\
&+ \left|\langle\Phi(f), k\rangle_{L^2(\mu)} - \langle\Phi(h), k\rangle_{L^2(\mu)}\right| \\
&= \left|\langle\Phi_n(h-f), k\rangle_{L^2(\mu)}\right| + \left|\langle\Phi_n(f), k-g\rangle_{L^2(\mu)}\right| \\
&+ \left|\langle\Phi_n(f), g\rangle_{L^2(\mu)} - \langle\Phi(f), g\rangle_{L^2(\mu)}\right| + \left|\langle\Phi(f), g-k\rangle_{L^2(\mu)}\right| \\
&+ \left|\langle\Phi(f-h), k\rangle_{L^2(\mu)}\right| \\
&\leq 2\|h-f\|_2\|k\|_2 + 2\|f\|_2\|g-k\|_2 + \left|\langle\Phi_n(f), g\rangle_{L^2(\mu)} - \langle\Phi(f), g\rangle_{L^2(\mu)}\right| \\
&\leq 2\|h-f\|_2\|k\|_2 + 2\left(\|f-h\|_2 + \|h\|_2\right)\|g-k\|_2 + \left|\langle\Phi_n(f), g\rangle_{L^2(\mu)} - \langle\Phi(f), g\rangle_{L^2(\mu)}\right|
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\limsup_{n\infty}\left|\langle\Phi_n(h), k\rangle_{L^2(\mu)} - \langle\Phi(h), k\rangle_{L^2(\mu)}\right| \leq 2\|h-f\|_2\|k\|_2 + 2\left(\|f-h\|_2 + \|h\|_2\right)\|g-k\|_2$$

et donc par densité de $\mathcal{C}(X)$ dans $L^2(\mu)$, on obtient la convergence de $\langle\Phi_n(h), k\rangle_{L^2(\mu)}$ vers $\langle\Phi(h), k\rangle_{L^2(\mu)}$, c'est à dire, $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers Φ.

Réciproquement, si $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers Φ, alors, pour tous f et g dans $\mathcal{C}(X)$,

$$\begin{aligned}
\int_{X\times X} f\otimes g dm_n &= \langle\Phi_n(f), g\rangle_{L^2(\mu)} \\
&\to \langle\Phi(f), g\rangle_{L^2(\mu)} \\
&= \int_{X\times X} f\otimes g dm.
\end{aligned}$$

Le sous-espace vectoriel $\mathcal{H}$ de $\mathcal{C}(X\times X)$ engendré par les $f\otimes g$ est clairement une algèbre unitaire stable par conjugaison qui sépare les points, ainsi ce sous-espace est dense d'après le théorème de Stone-Weierstrass. On écrit alors, pour $F\in\mathcal{C}(X\times X)$ et $G\in\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}
\left|\int_{X\times X} Fdm_n - \int_{X\times X} Fdm\right| &\leq \left|\int_{X\times X} Fdm_n - \int_{X\times X} Gdm_n\right| + \left|\int_{X\times X} Gdm_n - \int_{X\times X} Gdm\right| \\
&+ \left|\int_{X\times X} Gdm - \int_{X\times X} Fdm\right| \\
&\leq 2\|F-G\|_\infty + \left|\int_{X\times X} Gdm_n - \int_{X\times X} Gdm\right|.
\end{aligned}$$

On en déduit là encore la convergence. Ainsi $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers m.

6. Montrer que $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers m si et seulement si, pour tous A et B dans $\mathcal{A}$:

$$m_n(A\times B) \to m(A\times B),$$

quand n tend vers l'infini.

———

Si, pour tous A et B dans $\mathcal{A}$:

$$m_n(A \times B) \to m(A \times B),$$

quand n tend vers l'infini, alors

$$\begin{aligned}\langle \Phi_n(1_A), 1_B \rangle_{L^2(\mu)} &= m_n(A \times B) \\ &\to m(A \times B) \\ &\langle \Phi(1_A), 1_B \rangle_{L^2(\mu)}.\end{aligned}$$

On a donc la convergence $\langle \Phi_n(h), k \rangle_{L^2(\mu)} \to \langle \Phi(h), k \rangle_{L^2(\mu)}$ pour tous h et k sur le sous-espace vectoriel dense de $L^2(\mu)$ des fonctions étagées. Comme plus haut, on en déduit que $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers Φ et donc que m_n converge faiblement vers m. Réciproquement, si m_n converge faiblement vers m, alors $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers Φ et donc, pour tous A et B dans $\mathcal{A}$,

$$\langle \Phi_n(1_A), 1_B \rangle_{L^2(\mu)} \to \langle \Phi(1_A), 1_B \rangle_{L^2(\mu)},$$

ce qui se réécrit comme au dessus en

$$m_n(A \times B) \to m(A \times B).$$

Une remarque sur cette partie:

Il fallait avoir conscience qu'en général, sur un espace métrique compact muni de sa tribu borélienne $(\Omega, \mathcal{F})$, la convergence faible d'une suite de mesures de probabilités $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vers γ n'entraîne PAS la convergence, pour tout $A \in \mathcal{F}$ de $\gamma_n(A)$ vers $\gamma(A)$!

Le but des questions 3, 4, 5 et 6 était d'obtenir malgré tout cette convergence mais pour des suites particulières de mesures de probabilités $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sur $(X \times X, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A})$, des mesures associées à des couplages, et pour des ensembles particuliers, les pavés mesurables. Le fait que les marginales des mesures m_n, $n \in \mathbb{N}$ restent toujours égales à μ est la raison essentielle pour laquelle ce résultat est vrai.

2 Les propriétés P_1 et P_2.

7. On dira que le système dynamique $(Y, \mathcal{B}, \rho, R)$ possède la propriété P_1 s'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout ensemble R-invariant A de ρ-mesure non nulle:

$$\rho(A) \geq c.$$

Montrer que si $(Y, \mathcal{B}, \rho, R)$ possède la propriété P_1 et que $\phi : Y \to \mathbb{C}$ est une fonction mesurable bornée R-invariante alors, sur un ensemble de mesure pleine, ϕ ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

———

Supposons que $(Y, \mathcal{B}, \rho, R)$ possède la propriété P_1 et que $\phi : Y \to \mathbb{C}$ soit une fonction mesurable bornée R-invariante. Raisonnons par l'absurde en supposant que ϕ ne prend pas qu'un nombre fini de valeurs sur un ensemble de mesure pleine. Alors il existe une collection infinie dénombrable de parties de $\mathbb{C}$ mesurables et disjointes $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\rho\left(\phi^{-1}A_k\right) > 0$. Mais alors

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \rho\left(\phi^{-1}A_k\right) = \rho\left(\cup_{k=1}^{+\infty}\phi^{-1}A_k\right) \leq 1.$$

Mais comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\phi^{-1}A_k$ est R-invariant et que $\rho\left(\phi^{-1}A_k\right) > 0$, alors $\rho\left(\phi^{-1}A_k\right) \geq c$ et on doit avoir

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \rho\left(\phi^{-1}A_k\right) = +\infty,$$

d'où une contradiction.

8. On dira que le système dynamique $(Y, \mathcal{B}, \rho, R)$ possède la propriété P_2 s'il existe une constante $\kappa > 0$ telle que pour tous A et B dans $\mathcal{B}$,

$$\limsup_{n\to\infty} \rho\left(A \cap R^{-n}B\right) \leq \kappa\rho(A)\rho(B).$$

Montrer que si $(Y, \mathcal{B}, \rho, R)$ possède la propriété P_2 alors $(Y, \mathcal{B}, \rho, R)$ et $(Y \times Y, \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}, \rho \otimes \rho, R \times R)$ possèdent la propriété P_1.

Si A est un ensemble R-invariant de ρ-mesure non nulle alors

$$\begin{aligned}\rho(A) &= \rho\left(A \cap R^{-n}A\right) \\ &= \limsup_{n\to\infty} \rho\left(A \cap R^{-n}A\right) \\ &\leq \kappa\rho(A)\rho(A)\end{aligned}$$

Alors, en divisant par $\rho(A)$:

$$\kappa\rho(A) \geq 1$$

et donc

$$\rho(A) \geq \frac{1}{\kappa} > 0.$$

Ainsi $(Y, \mathcal{B}, \rho, R)$ possède la propriété P_1.

Pour montrer que $(Y \times Y, \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}, \rho \otimes \rho, R \times R)$ possède la propriété P_1, on va montrer qu'il possède la propriété P_2 avec la constante κ^2, en commençant par la vérifier sur les pavés mesurables.

On écrit d'abord, pour des éléments A, B, C, D de $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \rho\otimes\rho\Big((A\times B)\cap(R\times R)^{-n}(C\times D)\Big) &= \limsup_{n\to\infty}\left(\rho\left(A\cap R^{-n}C\right)\rho\left(B\cap R^{-n}D\right)\right) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty}\rho\left(A\cap R^{-n}C\right)\limsup_{n\to\infty}\rho\left(B\cap R^{-n}D\right) \\ &\leq \kappa\rho(A)\rho(C)\kappa\rho(B)\rho(D) \\ &= \kappa^2\rho\otimes\rho(A\times B)\rho\otimes\rho(C\times D).\end{aligned}$$

On vérifie ensuite la propriété pour des unions disjointes finies de pavés mesurables. Soit $k, l \geq 1$ et soient $\widetilde{A}_1, \ldots, \widetilde{A}_k$, $\widetilde{B}_1, \ldots, \widetilde{B}_l$ des pavés mesurables 2 à 2 disjoints.

On a

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\rho\otimes\rho\left(\left(\widetilde{A}_1\cup\cdots\cup\widetilde{A}_k\right)\cap(R\times R)^{-n}\left(\widetilde{B}_1\cup\cdots\cup\widetilde{B}_l\right)\right) &= \limsup_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\rho\otimes\rho\left(\widetilde{A}_i\cap(R\times R)^{-n}\widetilde{B}_j\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\limsup_{n\to\infty}\rho\otimes\rho\left(\widetilde{A}_i\cap(R\times R)^{-n}\widetilde{B}_j\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\kappa^2\rho\otimes\rho\left(\widetilde{A}_i\right)\rho\otimes\rho\left(\widetilde{B}_j\right) \\ &= \kappa^2\rho\otimes\rho\left(\widetilde{A}_1\cup\cdots\cup\widetilde{A}_k\right)\rho\otimes\rho\left(\widetilde{B}_1\cup\cdots\cup\widetilde{B}_k\right).\end{aligned}$$

Ainsi, on a vérifié la propriété sur l'algèbre $\mathcal{M}$ des réunions finies de pavés mesurables. Cette algèbre engendre la tribu produit et on sait alors, d'après le théorème de Carathéodory que, pour tout $\widehat{A} \in \mathcal{B}\otimes\mathcal{B}$, $\rho\otimes\rho\left(\widehat{A}\right) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\rho\otimes\rho\left(\widetilde{A}_k\right),\ \widehat{A}\subset\cup_{k=1}^{\infty}\widetilde{A}_k,\ \widetilde{A}_k\in\mathcal{M}\right\}$.

Soit donc $\widehat{A} \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$, $\widehat{A} \subset \cup_{k=1}^{\infty} \widetilde{A}_k$, $\widetilde{A}_k \in \mathcal{M}$ et $\widetilde{B} \in \mathcal{M}$. On a

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \rho\otimes\rho\left(\widehat{A} \cap (R\times R)^{-n}\widetilde{B}\right) &\leq \limsup_{n\to\infty} \rho\otimes\rho\left(\left(\cup_{k=1}^{\infty}\widetilde{A}_k\right)\cap (R\times R)^{-n}\widetilde{B}\right) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \rho\otimes\rho\left(\widetilde{A}_k \cap (R\times R)^{-n}\widetilde{B}\right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \limsup_{n\to\infty} \rho\otimes\rho\left(\widetilde{A}_k \cap (R\times R)^{-n}\widetilde{B}\right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \kappa^2 \rho\otimes\rho\left(\widetilde{A}_k\right)\rho\otimes\rho\left(\widetilde{B}\right) \\
&\leq \kappa^2\left(\sum_{k=1}^{\infty} \rho\otimes\rho\left(\widetilde{A}_k\right)\right)\rho\otimes\rho\left(\widetilde{B}\right).
\end{aligned}$$

Et en prenant l'infimum sur les réunions $\cup_{k=1}^{\infty}\widetilde{A}_k$, $\widetilde{A}_k \in \mathcal{M}$, contenant $\widehat{A}$:

$$\limsup_{n\to\infty} \rho\otimes\rho\left(\widehat{A}\cap (R\times R)^{-n}\widetilde{B}\right) \leq \kappa^2 \rho\otimes\rho\left(\widehat{A}\right)\rho\otimes\rho\left(\widetilde{B}\right)$$

On procède de même pour remplacer $\widetilde{B} \in \mathcal{M}$ par $\widehat{B} \in \mathcal{B}\otimes\mathcal{B}$. Ainsi $(Y\times Y, \mathcal{B}\otimes\mathcal{B}, \rho\otimes\rho, R\times R)$ possède la propriété P_2, et donc aussi la propriété P_1.

3 Mélange faible et mélange.

On suppose que $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ est totalement ergodique et possède la propriété P_2.

9. Montrer que $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ est faiblement mélangeant.

Soit $f \in L_0^2(\mu)$ un vecteur propre de U_T pour une valeur propre α. On sait que $|\alpha| = 1$ et, par ergodicité, que $|f| = 1$ μ-p.p.

Posons $F := f \otimes \overline{f}$.

F est $T\times T$-invariante, en effet

$$\begin{aligned}
f\otimes\overline{f}\circ(T\times T)(x,y) &= f(Tx)\,\overline{f(Ty)} \\
&= \alpha f(x)\,\overline{\alpha f(y)} \\
&= |\alpha|^2 f(x)\,\overline{f(y)} \\
&= f\otimes\overline{f}(x,y)
\end{aligned}$$

Ainsi, comme $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ possède la propriété P_2, c'est aussi le cas de $(X\times X, \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}, \mu\otimes\mu, T\times T)$. Ainsi, d'après la question 7, on en déduit que la fonction essentiellement bornée F ne prend, sur un ensemble de mesure pleine, qu'un nombre fini de valeurs. On va en déduire que f ne prend aussi, sur un ensemble de mesure pleine, qu'un nombre fini de valeurs.

Il existe des nombres complexes non nuls (puisque $|F| = 1$ $\mu\otimes\mu$-p.p.) et distincts $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels qu'on ait

$$\sum_{k=1}^{n} 1_{\{F=\alpha_k\}} = 1 \ \mu\otimes\mu - \text{p.p.}$$

(Remarquons aussi que $\sum_{k=1}^{n} 1_{F=\alpha_k}(x,y) \leq 1$ pour tous $(x,y) \in X\times X$).

On peut alors écrire que pour $\mu \otimes \mu$-presque tous $(x, y) \in X \times X$:

$$1 - \sum_{k=1}^{n} 1_{\left\{f = \frac{\alpha_k}{f(y)}\right\}} (x) = 0.$$

Et donc, grâce au théorème de Fubini-Tonelli:

$$0 = \int_{X \times X} \left(1 - \sum_{k=1}^{n} 1_{\left\{f = \frac{\alpha_k}{f(y)}\right\}} (x)\right) \mu \otimes \mu \left(d\left(x, y\right)\right)$$

$$0 = \int_{X} \left(\int_{X} \left(1 - \sum_{k=1}^{n} 1_{\left\{f = \frac{\alpha_k}{f(y)}\right\}} (x)\right) \mu \left(dx\right)\right) \mu \left(dy\right).$$

Ainsi, il existe au moins un élément $y \in X$ tel que $\int_X \left(1 - \sum_{k=1}^{n} 1_{\left\{f = \frac{\alpha_k}{f(y)}\right\}} (x)\right) \mu \left(dx\right) = 0$ et donc la fonction positive

$$x \mapsto 1 - \sum_{k=1}^{n} 1_{\left\{f = \frac{\alpha_k}{f(y)}\right\}} (x)$$

est nulle μ-p.p., autement dit $\sum_{k=1}^{n} 1_{\left\{f = \frac{\alpha_k}{f(y)}\right\}} (x) = 1$ μ-p.p. et donc, sur un ensemble de mesure μ-pleine, f prend ses valeurs parmi $\frac{\alpha_k}{f(y)}$, $k = 1, \ldots, n$, qui sont en nombre fini. On déduit le même résultat pour $\overline{f}$.

Comme, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f \circ T^n = \alpha^n f$, on en déduit que $f \circ T^n$ est mesurable par rapport à f, ainsi le facteur engendré par f, $\sigma \left\{f \circ T^n, n \in \mathbb{Z}\right\}$, n'est autre que $\sigma \left\{f\right\}$, or comme f ne prend qu'un nombre fini de valeurs sur un ensemble de mesure pleine, le facteur est fini (aux ensembles négligeables près) et non trivial, ce qui est impossible. Ainsi U_T n'a pas de valeur propre sur $L_0^2 \left(\mu\right)$, $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ est donc faiblement mélangeant.

10. Pour tout $n \geq 1$, on note Δ_n la mesure associée au couplage porté par le graphe de T^n à savoir, pour tous A et B dans $\mathcal{A}$:

$$\Delta_n \left(A \times B\right) = \mu \left(A \cap T^{-n} B\right).$$

En étudiant les valeurs d'adhérence de la suite $\left\{\Delta_n\right\}_{n \geq 1}$, montrer que $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ est mélangeant.

Soit γ une valeur d'adhérence de la suite $\left\{\Delta_n\right\}_{n \geq 1}$. Du fait que $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ possède de la propriété P_2, il existe $\kappa > 0$ tel que, pour tous A et B dans $\mathcal{A}$:

$$\gamma \left(A \times B\right) \leq \kappa \mu \otimes \mu \left(A \times B\right)$$

Un peu comme à la question 8, on étend cette inégalité à tout ensemble $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$:

$$\gamma \left(E\right) \leq \kappa \mu \otimes \mu \left(E\right).$$

On en déduit alors que γ est absolument continue par rapport à $\mu \otimes \mu$. On a montré à la question précédente que $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ est faiblement mélangeant ce qui implique que $(X \times X, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mu \otimes \mu, T \times T)$ est ergodique. Ainsi, d'après la question de cours, γ, qui est $T \times T$ invariante car l'ensemble $J\left(T\right)$ des autocouplages est fermé, est égale à $\mu \otimes \mu$.

Ainsi, la suite $\left\{\Delta_n\right\}_{n \geq 1}$ ne possède qu'une valeur d'adhérence, $\mu \otimes \mu$. Par compacité de $M\left(T\right)$, $\left\{\Delta_n\right\}_{n \geq 1}$ converge donc vers $\mu \otimes \mu$, ce qui est équivalent au mélange de $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$.

Deuxième partie: Filtrage

Cet exercice est tiré de l'article de Furstenberg (1967) introduisant les couplages en Théorie ergodique (Disjointness in Ergodic Theory, Minimal Sets, and a Problem in Diophantine Approximation, Mathematical Systems Theory, Vol. 1, No 1)

Un peu de contexte:

Imaginons que l'on souhaite recevoir un signal sous la forme d'une suite $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de 0 et de 1 par exemple. Le signal s'avère être brouillé par un bruit $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, indépendant du signal. En conséquence, nous n'avons accès qu'au signal "bruité" $\{X_n+Y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Le filtrage consiste à tenter de retrouver $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ à partir de $\{X_n+Y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Le cadre mathématique sera le suivant:

On considère les systèmes dynamiques associés à deux processus stationnaires $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}},\mathcal{B}^{\otimes\mathbb{Z}},\mathbb{P}_1,S\right)$ et $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}},\mathcal{B}^{\otimes\mathbb{Z}},\mathbb{P}_2,S\right)$ et on forme l'espace produit

$$\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\times\mathbb{R}^{\mathbb{Z}},\mathcal{B}^{\otimes\mathbb{Z}}\otimes\mathcal{B}^{\otimes\mathbb{Z}},\mathbb{P}_1\otimes\mathbb{P}_2,S\times S\right).$$

En définissant $X_n:\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\times\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\to\mathbb{R}$ par

$$X_n\left(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}},\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\right)=x_n$$

et $Y_n:\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\times\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\to\mathbb{R}$ par

$$Y_n\left(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}},\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\right)=y_n,$$

on a bien les processus stationnaires $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ et $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, indépendants et de lois respectives $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$. On définit ensuite $Z_n:\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\times\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\to\mathbb{R}$ par

$$Z_n\left(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}},\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\right)=x_n+y_n$$

de sorte à ce que $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}=\{X_n+Y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Remarquons qu'on a $\sigma\{X_n,\ n\in\mathbb{Z}\}=\mathcal{B}^{\otimes\mathbb{Z}}\times\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ et $\sigma\{Y_n,\ n\in\mathbb{Z}\}=\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\times\mathcal{B}^{\otimes\mathbb{Z}}$ et $\sigma\{X_n,Y_n\ n\in\mathbb{Z}\}=\mathcal{B}^{\otimes\mathbb{Z}}\otimes\mathcal{B}^{\otimes\mathbb{Z}}$.

Bien sûr, on a $\sigma\{Z_n,\ n\in\mathbb{Z}\}\subset\sigma\{X_n,Y_n\ n\in\mathbb{Z}\}$. On dira que le filtrage est possible quand $\sigma\{Z_n,\ n\in\mathbb{Z}\}=\sigma\{X_n,Y_n\ n\in\mathbb{Z}\}$ (mod. 0).

1. Expliquez pourquoi le filtrage est possible si et seulement si $\sigma\{Z_n,\ n\in\mathbb{Z}\}=\sigma\{X_n\ n\in\mathbb{Z}\}$ (mod. 0).

   Note: Il y a une erreur dans l'énoncé !!! Mea culpa. Il faut remplacer $\sigma\{Z_n,\ n\in\mathbb{Z}\}=\sigma\{X_n\ n\in\mathbb{Z}\}$ par $\sigma\{X_n,\ n\in\mathbb{Z}\}\subset\sigma\{Z_n\ n\in\mathbb{Z}\}$. Les points sont offerts...

   ———

   Quand on connaît Z_n et X_n, par différence on connaît Y_n.

2. On suppose ici que X_0 et Y_0 sont dans $L_0^2(\mathbb{P}_1\otimes\mathbb{P}_2)$. Montrez que si les mesures spectrales de X_0 et Y_0 sont mutuellement singulières alors le filtrage possible.

   ———

   Supposons donc $\sigma_{X_0}\perp\sigma_{Y_0}$.

   Montrons d'abord que $C(X_0+Y_0)=C(X_0)\oplus^{\perp}C(Y_0)$. La somme $C(X_0)+C(Y_0)$ est bien orthogonale comme conséquence de $\sigma_{X_0}\perp\sigma_{Y_0}$ et ceci entraîne aussi que $\sigma_{X_0+Y_0}=\sigma_{X_0}+\sigma_{Y_0}$ (vu en cours).

   On a l'inclusion évidente $C(X_0+Y_0)\subset C(X_0)\oplus^{\perp}C(Y_0)$. Ensuite, puisque $\sigma_{X_0+Y_0}=\sigma_{X_0}+\sigma_{Y_0}$, il existe $h\in C(X_0+Y_0)$ tel que $\sigma_h=\sigma_{X_0}$, et comme $\sigma_h\perp\sigma_{Y_0}$, on a $h\in C(Y_0)^{\perp}\cap\left(C(X_0)\oplus^{\perp}C(Y_0)\right)$, c'est à dire $h\in C(X_0)$. Mais on a aussi vu en cours que comme $h\in C(X_0)$ et $\sigma_h=\sigma_{X_0}$, alors $C(h)=C(X_0)$. Ceci prouve que $C(X_0)\subset C(X_0+Y_0)$ et, de manière analogue, on a $C(Y_0)\subset C(X_0+Y_0)$ d'où $C(X_0)+C(Y_0)\subset C(X_0+Y_0)$.

   L'inclusion $C(X_0)\subset C(X_0+Y_0)=C(Z_0)$ suffit à prouver que $\sigma\{X_n,\ n\in\mathbb{Z}\}\subset\sigma\{Z_n\ n\in\mathbb{Z}\}$. Le filtrage est donc possible.

3. On suppose maintenant que X_0 et Y_0 sont intégrables. On va montrer le résultat suivant:
Si $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}^{\otimes \mathbb{Z}}, \mathbb{P}_1, S\right)$ et $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}^{\otimes \mathbb{Z}}, \mathbb{P}_2, S\right)$ sont disjoints alors le filtrage est possible.
Commençons par un petit exercice de probabilité:
Soient U_1, U_2, V_1 et V_2 quatre variables aléatoires intégrables définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose qu'elles sont indépendantes 2 à 2 et qu'elles vérifient
$$U_1 + V_1 = U_2 + V_2$$
et
$$\mathbb{E}\left[U_1\right] = \mathbb{E}\left[U_2\right]$$
Montrez que $U_1 = U_2$ et $V_1 = V_2$ $\mathbb{P}$-presque sûrement.

———

On écrit
$$U_1 - U_2 = V_2 - V_1$$
Ainsi
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(U_1 - U_2\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(U_1 - U_2\right)\left(V_2 - V_1\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[U_1 V_2 - U_1 V_1 - U_2 V_2 + U_2 V_1\right]\end{aligned}$$
or les $U_i V_j$, sont intégrables car produits de deux variables intégrables indépendantes.
Donc
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(U_1 - U_2\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[U_1 V_2\right] - \mathbb{E}\left[U_1 V_1\right] - \mathbb{E}\left[U_2 V_2\right] + \mathbb{E}\left[U_2 V_1\right] \\ &= \mathbb{E}\left[U_1\right]\mathbb{E}\left[V_2\right] - \mathbb{E}\left[U_1\right]\mathbb{E}\left[V_1\right] - \mathbb{E}\left[U_2\right]\mathbb{E}\left[V_2\right] + \mathbb{E}\left[U_2\right]\mathbb{E}\left[V_1\right] \\ &= 0\end{aligned}$$
Ainsi $U_1 = U_2$ et $V_1 = V_2$ $\mathbb{P}$-presque sûrement.

4. On forme le couplage relativement indépendant de $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}^{\otimes \mathbb{Z}} \otimes \mathcal{B}^{\otimes \mathbb{Z}}, \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2, S \times S\right)$ au dessus du facteur $\sigma\left\{Z_n,\, n \in \mathbb{Z}\right\}$ qu'on notera $\mathcal{Z}$, c'est à dire, on forme le l'espace
$$\left(\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\right) \times \left(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\right), \left(\mathcal{B}^{\otimes \mathbb{Z}} \otimes \mathcal{B}^{\otimes \mathbb{Z}}\right) \otimes \left(\mathcal{B}^{\otimes \mathbb{Z}} \otimes \mathcal{B}^{\otimes \mathbb{Z}}\right), m, (S \times S) \times (S \times S)\right)$$
où m est caractérisée par:
$$m\left(\left(A_1 \times B_1\right) \times \left(A_2 \times B_2\right)\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2}\left[\mathbb{E}\left[1_{A_1 \times B_1} \mid \mathcal{Z}\right]\mathbb{E}\left[1_{A_2 \times B_2} \mid \mathcal{Z}\right]\right]$$
pour tous A_1, B_1, A_2 et B_2 dans $\mathcal{B}^{\otimes \mathbb{Z}}$.
On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\widetilde{X}_n$, $\widetilde{Y}_n$, $\widetilde{X}'_n$ et $\widetilde{Y}'_n$, de $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\right) \times \left(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\right)$ dans $\mathbb{R}$ par:
$$\begin{aligned}\widetilde{X}_n\left(\left(\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}\right), \left(\{x'_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{y'_n\}_{n \in \mathbb{Z}}\right)\right) &= x_n \\ \widetilde{Y}_n\left(\left(\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}\right), \left(\{x'_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{y'_n\}_{n \in \mathbb{Z}}\right)\right) &= y_n \\ \widetilde{X}'_n\left(\left(\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}\right), \left(\{x'_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{y'_n\}_{n \in \mathbb{Z}}\right)\right) &= x'_n \\ \widetilde{Y}'_n\left(\left(\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}\right), \left(\{x'_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{y'_n\}_{n \in \mathbb{Z}}\right)\right) &= y'_n\end{aligned}$$
Soit $n \in \mathbb{Z}$, que vaut $\widetilde{X}_n + \widetilde{Y}_n$ sous la loi m ?
Conclure.

———

On va montrer que $\widetilde{X}_n + \widetilde{Y}_n = \widetilde{X}'_n + \widetilde{Y}'_n$.

Remarquons d'abord que $\left(\widetilde{X}_n + \widetilde{Y}_n\right)\left(\widetilde{X}'_n + \widetilde{Y}'_n\right) = (X_n + Y_n) \otimes (X_n + Y_n)$, en effet:

$$\left(\widetilde{X}_n + \widetilde{Y}_n\right)\left(\widetilde{X}'_n + \widetilde{Y}'_n\right)\left(\left(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\right), \left(\{x'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \{y'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\right)\right)$$

est bien égal à

$$(X_n + Y_n)\left(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\right)(X_n + Y_n)\left(\{x'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \{y'_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\right)$$

Ainsi, comme $X_n + Y_n$ est $\mathcal{Z}$-mesurable,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_m\left[\left(\widetilde{X}_n + \widetilde{Y}_n\right)\left(\widetilde{X}'_n + \widetilde{Y}'_n\right)\right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_1\otimes\mathbb{P}_2}\left[\mathbb{E}\left[X_n + Y_n \mid \mathcal{Z}\right]\mathbb{E}\left[X_n + Y_n \mid \mathcal{Z}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_1\otimes\mathbb{P}_2}\left[(X_n + Y_n)^2\right]
\end{aligned}$$

Calculons enfin $\mathbb{E}_m\left[\left(\left(\widetilde{X}_n + \widetilde{Y}_n\right) - \left(\widetilde{X}'_n + \widetilde{Y}'_n\right)\right)^2\right]$, on obtient:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_m\left[\left(\widetilde{X}_n + \widetilde{Y}_n\right)^2\right] - 2\mathbb{E}_m\left[\left(\widetilde{X}_n + \widetilde{Y}_n\right)\left(\widetilde{X}'_n + \widetilde{Y}'_n\right)\right] + \mathbb{E}_m\left[\left(\widetilde{X}'_n + \widetilde{Y}'_n\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_1\otimes\mathbb{P}_2}\left[(X_n + Y_n)^2\right] - 2\mathbb{E}_{\mathbb{P}_1\otimes\mathbb{P}_2}\left[(X_n + Y_n)^2\right] + \mathbb{E}_{\mathbb{P}_1\otimes\mathbb{P}_2}\left[(X_n + Y_n)^2\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi $\widetilde{X}_n + \widetilde{Y}_n = \widetilde{X}'_n + \widetilde{Y}'_n$.

On sait déjà que $\left\{\widetilde{X}_n\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ et $\left\{\widetilde{Y}_n\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sont indépendants, de même que $\left\{\widetilde{X}'_n\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ et $\left\{\widetilde{Y}'_n\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$. De plus, d'après l'hypothèse de disjonction entre $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}^{\otimes\mathbb{Z}}, \mathbb{P}_1, S\right)$ et $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}^{\otimes\mathbb{Z}}, \mathbb{P}_2, S\right)$, on a que $\left\{\widetilde{X}_n\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ et $\left\{\widetilde{Y}'_n\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sont indépendants, de même que $\left\{\widetilde{X}'_n\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ et $\left\{\widetilde{Y}_n\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$. On est donc bien dans le cadre de l'exercice de probabilité au dessus ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\widetilde{X}_n = \widetilde{X}'_n$ et $\widetilde{Y}_n = \widetilde{Y}'_n$.

Ceci veut dire:

$$\left\{\widetilde{X}_n, \widetilde{Y}_n\right\}_{n\in\mathbb{Z}} = \left\{\widetilde{X}'_n, \widetilde{Y}'_n\right\}_{n\in\mathbb{Z}},\ m\text{-presque sûrement.}$$

Autrement dit la mesure m n'est autre que la mesure diagonale

$$m\left((A_1 \times B_1) \times (A_2 \times B_2)\right) = \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2\left((A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)\right).$$

Mais la mesure diagonale est aussi celle obtenue comme le produit relativement indépendant au dessus de la tribu entière $\mathcal{B}^{\otimes\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{B}^{\otimes\mathbb{Z}}$!

On a donc bien $\mathcal{Z} = \mathcal{B}^{\otimes\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{B}^{\otimes\mathbb{Z}}$, ou encore $\sigma\{Z_n,\ n \in \mathbb{Z}\} = \sigma\{X_n, Y_n\ n \in \mathbb{Z}\}$.