M2 Mathématiques fondamentales **Année 2019-2020**

Introduction à la Théorie ergodique

Durée: 3 heures

Les documents sont interdits.

Rigidité des systèmes dynamiques

On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des suites d'entiers strictement croissantes.

On dit qu'un système $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ est *rigide* si il existe $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}$ telle que pour tout A dans $\mathcal{A}$:

$$\mu\left(A \cap T^{-n_k} A\right) \to_{k\to\infty} \mu(A),$$

quand k tend vers $+\infty$. On dira qu'un système est $\{n_k\}$-rigide si la suite $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ assure la rigidité du système.

1 Généralités

1. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique et $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}$.
   Soit $A \in \mathcal{A}$. Montrer que $\mu\left(A \cap T^{-n_k} A\right) \to_{k\to\infty} \mu(A)$ si et seulement si $\mu\left(A \triangle T^{-n_k} A\right) \to_{k\to\infty} 0$.

   ———

   En effet, on écrit:

$$\begin{aligned}
\mu\left(A \triangle T^{-n_k} A\right) &= \mu\left(A \cup T^{-n_k} A\right) - \mu\left(A \cap T^{-n_k} A\right) \\
&= \mu(A) + \mu\left(T^{-n_k} A\right) - \mu\left(A \cap T^{-n_k} A\right) - \mu\left(A \cap T^{-n_k} A\right) \\
&= \mu(A) + \mu(A) - \mu\left(A \cap T^{-n_k} A\right) - \mu\left(A \cap T^{-n_k} A\right) \\
&= 2\left(\mu(A) - \mu\left(A \cap T^{-n_k} A\right)\right)
\end{aligned}$$

2. Montrer que $\mathcal{A}_{\{n_k\}} := \{A \in \mathcal{A},\ \mu\left(A \cap T^{-n_k} A\right) \to_{k\to\infty} \mu(A)\}$ est une sous-tribu T-invariante de $\mathcal{A}$ (i.e. un facteur).

   ———

   $\mu(X) = \mu(X \cap X) = \mu\left(X \cap T^{-n_k} X\right)$ donc $X \in \mathcal{A}_{\{n_k\}}$.
   Stabilité par passage au complémentaire:
   On a $A \triangle T^{-n_k} A = A^c \triangle \left(T^{-n_k} A\right)^c = A^c \triangle T^{-n_k} A^c$, donc si $A \in \mathcal{A}_{\{n_k\}}$ alors $A^c \in \mathcal{A}_{\{n_k\}}$.
   Stabilité par intersection dénombrable:
   On commence par l'intersection de deux éléments A et B de $\mathcal{A}_{\{n_k\}}$:
   On utilise le fait que $1_{C\triangle D} = |1_C - 1_D|$ et l'inégalité triangulaire:

$$\begin{aligned}
1_{(A\cap B)\triangle T^{-n_k}(A\cap B)} &= \left|1_{A\cap B} - 1_{T^{-n_k}(A\cap B)}\right| \\
&= \left|1_A 1_B - 1_{T^{-n_k}A} 1_{T^{-n_k}B}\right| \\
&= \left|1_A 1_B - 1_{T^{-n_k}A} 1_B + 1_{T^{-n_k}A} 1_B - 1_{T^{-n_k}A} 1_{T^{-n_k}B}\right| \\
&\le 1_B \left|1_A - 1_{T^{-n_k}A}\right| + 1_{T^{-n_k}A} \left|1_B - 1_{T^{-n_k}B}\right| \\
&\le \left|1_A - 1_{T^{-n_k}A}\right| + \left|1_B - 1_{T^{-n_k}B}\right|
\end{aligned}$$

Ainsi en intégrant:

$$\mu(A\cap B)\bigtriangleup T^{-n_k}(A\cap B)\leq\mu\left(A\bigtriangleup T^{-n_k}A\right)+\mu\left(B\bigtriangleup T^{-n_k}B\right)$$

Donc si A et B sont dans $\mathcal{A}_{\{n_k\}}$ alors $A\cap B$ aussi.

Une récurrence immédiate donne la stabilité par intersection finie.

Soit maintenant $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}_{\{n_k\}}$, Posons $B_n:=\cap_{k=0}^{n}A_k$ et montrons que $A:=\cap_{n\in\mathbb{N}}A_n$ est aussi dans $\mathcal{A}_{\{n_k\}}$.

On écrit:

$$\begin{aligned}1_{A\triangle T^{-n_k}A}&=|1_A-1_{T^{-n_k}A}|\\&=\left|1_A-1_{B_n}+1_{B_n}-1_{T^{-n_k}B_n}+1_{T^{-n_k}B_n}-1_{T^{-n_k}A}\right|\\&\leq|1_A-1_{B_n}|+\left|1_{B_n}-1_{T^{-n_k}B_n}\right|+\left|1_{T^{-n_k}B_n}-1_{T^{-n_k}A}\right|\\&=|1_A-1_{B_n}|+\left|1_{B_n}-1_{T^{-n_k}B_n}\right|+|1_A-1_{B_n}|\circ T^{n_k}\end{aligned}$$

D'où, en intégrant et en utilisant l'invariance de μ par T^{n_k}:

$$\mu\left(A\bigtriangleup T^{-n_k}A\right)\leq2\mu(A\bigtriangleup B_n)+\mu\left(B_n\bigtriangleup T^{-n_k}B_n\right)$$

Et donc, comme $B_n\in\mathcal{A}_{\{n_k\}}$ par stabilité de $\mathcal{A}_{\{n_k\}}$ par intersection finie, on a:

$$\limsup_{k\to\infty}\mu\left(A\bigtriangleup T^{-n_k}A\right)\leq2\mu(A\bigtriangleup B_n)$$

Enfin, comme B_n décroît vers A et que μ est une mesure de probabilité, on a $\mu(A\bigtriangleup B_n)=\mu(A\cup B_n)-\mu(A\cap B_n)=\mu(B_n)-\mu(A)\to0$ quand n tend vers l'infini. On en déduit donc que $\mu(A\bigtriangleup T^{-n_k}A)\to0$ quand k tend vers l'infini.

Pour finir, montrons que la tribu $\mathcal{A}_{\{n_k\}}$ est invariante par T. En effet pour tout $A\in\mathcal{A}_{\{n_k\}}$, comme T commute avec ses puissances:

$$\begin{aligned}\mu\left(T^{-1}A\cap T^{-n_k}\left(T^{-1}A\right)\right)&=\mu\left(T^{-1}A\cap T^{-1}\left(T^{-n_k}A\right)\right)\\&=\mu\left(T^{-1}\left(A\cap T^{-n_k}A\right)\right)\\&=\mu\left(A\cap T^{-n_k}A\right)\\&\to_{k\to\infty}\mu(A)=\mu\left(T^{-1}A\right)\end{aligned}$$

et donc $T^{-1}A\in\mathcal{A}_{\{n_k\}}$, on procéderait de même avec T^{-1}, ainsi $T^{-1}\mathcal{A}_{\{n_k\}}=\mathcal{A}_{\{n_k\}}$, c'est donc un facteur.

3. Soit $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert, U un opérateur unitaire et $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}\in\mathcal{D}$.
   Soit $h\in H$, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:
   (a) $U^{n_k}h$ converge fortement vers h
   (b) $U^{n_k}h$ converge faiblement vers h
   (c) $\langle h,U^{n_k}h\rangle\to_{k\to\infty}\langle h,h\rangle$.

On a les implications évidentes $a\Rightarrow b\Rightarrow c$. Supposons alors que $\langle h,U^{n_k}h\rangle\to_{k\to\infty}\langle h,h\rangle$.

On calcule:

$$\begin{aligned}\|U^{n_k}h-h\|^2&=\langle U^{n_k}h-h,U^{n_k}h-h\rangle\\&=\langle U^{n_k}h,U^{n_k}h\rangle-\langle U^{n_k}h,h\rangle-\langle h,U^{n_k}h\rangle+\langle h,h\rangle\\&=2\langle h,h\rangle-\overline{\langle h,U^{n_k}h\rangle}-\langle h,U^{n_k}h\rangle\\&\to_{k\to\infty}0\end{aligned}$$

Et donc $c\Rightarrow a$.

4. On définit $H_{(U,\{n_k\})} := \{h \in H, \langle h, U^{n_k} h\rangle \to_{k\to\infty} \langle h, h\rangle\}$. Montrer que $H_{(U,\{n_k\})}$ est un sous-espace vectoriel fermé de H, invariant par U.

———

$H_{(U,\{n_k\})}$ est non-vide car il contient 0_H. C'est manifestement un sous-espace vectoriel de H d'après la question précédente. Montrons qu'il est fermé.

Soit $h_n \in H_{(U,\{n_k\})}$ convergeant fortement vers $h \in H$. Alors

$$\begin{aligned}\|U^{n_k} h - h\| &= \|U^{n_k} h - U^{n_k} h_n + U^{n_k} h_n - h_n + h_n - h\| \\ &\leq \|U^{n_k} h - U^{n_k} h_n\| + \|U^{n_k} h_n - h_n\| + \|h_n - h\| \\ &= 2\|h_n - h\| + \|U^{n_k} h_n - h_n\|\end{aligned}$$

Donc $\limsup_{k\to\infty} \|U^{n_k} h - h\| \leq 2\|h_n - h\|$ car $\|U^{n_k} h_n - h_n\| \to_{k\to\infty} 0$ encore d'après la question précédente. On fait ensuite tendre n vers l'infini pour en déduire que $U^{n_k} h$ tend fortement vers h. Ainsi $h \in H_{(U,\{n_k\})}$.

Il reste à vérifier l'invariance de $H_{(U,\{n_k\})}$ par U. Cela découle du fait que, pour tout $k \geq 0$, U et U^{n_k} commutent et donc, pour tout $h \in H$:

$$\begin{aligned}\langle Uh, U^{n_k}(Uh)\rangle &= \langle Uh, U(U^{n_k} h)\rangle \\ &= \langle h, U^{n_k} h\rangle \\ &\to_{k\to\infty} \langle h, h\rangle = \langle Uh, Uh\rangle\end{aligned}$$

Enfin, on procède de même avec U^{-1}.

5. On note $L^2\left(\mathcal{A}_{\{n_k\}}\right)$ le sous-espace de $L^2(\mu)$ des (classes d'équivalence de) fonctions $f \in L^2(\mu)$ qui sont $\mathcal{A}_{\{n_k\}}$-mesurables.

   Montrer que $L^2\left(\mathcal{A}_{\{n_k\}}\right) = L^2(\mu)_{(U_T,\{n_k\})}$.

———

Pour tout $A \in \mathcal{A}_{\{n_k\}}$, on a

$$\langle 1_A, U_{T^{n_k}} 1_A\rangle = \mu\left(A \cap T^{-n_k} A\right) \to_{k\to\infty} \mu(A) = \langle 1_A, 1_A\rangle$$

et comme tout élément de $L^2\left(\mathcal{A}_{\{n_k\}}\right)$ est limite de combinaisons linéaires d'indicatrices de la forme 1_A pour $A \in \mathcal{A}_{n_k}$, alors $L^2\left(\mathcal{A}_{\{n_k\}}\right) \subset L^2(\mu)_{(U_T,\{n_k\})}$, car ce dernier est fermé.

Réciproquement, soit $f \in L^2(\mu)_{(U_T,\{n_k\})}$, on doit montrer que f (ou plutôt, un représentant de f pour l'égalité μ-p.p.) est mesurable par rapport à $\mathcal{A}_{\{n_k\}}$. Il est suffisant de montrer que pour toute boule ouverte de $\mathbb{C}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_{\{n_k\}}$ ce qui signifie exactement que $1_B \circ f \in L^2(\mu)_{(U_T,\{n_k\})}$.

On va d'abord voir que pour toute fonction G, continue à support compact de $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $G \circ f \in L^2(\mu)_{(U_T,\{n_k\})}$ en montrant que $U_{T^{n_k}} G \circ f$ converge faiblement vers $G \circ f$ quand k tend vers l'infini.

Comme la boule fortement fermée de $L^2(\mu)$, centrée en 0 et de rayon $\|G\|_\infty$ est faiblement compacte et qu'elle contient tous les termes de la suite, il suffira de montrer que toute sous-suite de $\{U_{T^{n_k}} G \circ f\}_{k\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite convergeant faiblement vers $G \circ f$.

Soit donc une sous-suite $\{U_{T^{n_k'}} G \circ f\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{U_{T^{n_k}} G \circ f\}_{k\in\mathbb{N}}$. Comme $\{U_{T^{n_k'}} f\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^2(\mu)$ vers f, il existe une sous-suite $\{U_{T^{n_k''}} f\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers f μ-p.p., mais alors, par continuité de G, pour μ-presque tout $x \in X$, $U_{T^{n_k''}} G \circ f(x) = G \circ f(T^{n_k''} x)$ converge vers $G \circ f(x)$, où encore $|U_{T^{n_k''}} G \circ f(x) - G \circ f(x)|^2 \to_{k\to\infty} 0$.

Or $|U_{T^{n_k''}} G \circ f - G \circ f|^2 \leq 4\|G\|_\infty^2$ et on peut appliquer le Théorème de convergence dominée pour conclure que $\{U_{T^{n_k''}} G \circ f\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge fortement et donc faiblement vers $G \circ f$. Ainsi $G \circ f \in L^2(\mu)_{(U_T,\{n_k\})}$.

Enfin, il est facile de vérifier que si B est une boule ouverte de $\mathbb{C}$, alors 1_B est la limite simple croissante de fonctions $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ continues positives à support dans B.

On a ainsi que $1_B \circ f$ est la limite croissante de $\{G_n \circ f\}_{n\in\mathbb{N}}$. Par convergence dominée de nouveau, on en déduit que $\{G_n \circ f\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $1_B \circ f$ dans $L^2(\mu)$. Du fait que $L^2(\mu)_{(U_T,\{n_k\})}$ est fermé et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G_n \circ f \in L^2(\mu)_{(U_T,\{n_k\})}$, on en déduit que $1_B \circ f \in L^2(\mu)_{(U_T,\{n_k\})}$.

2 Mesure de Dirichlet

6. Soit σ une mesure finie sur $(]-\pi,\pi], \mathcal{B}(]-\pi,\pi]))$. On dit que σ est une mesure de Dirichlet s'il existe une suite $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}$ telle que
$$\widehat{\sigma}(n_k) \to_{k\to\infty} \widehat{\sigma}(0).$$
Comme précédemment, on dira que σ est $\{n_k\}$-Dirichlet si la convergence a lieu.

Montrer que si σ est $\{n_k\}$-Dirichlet et que $\rho \ll \sigma$, alors ρ est aussi $\{n_k\}$-Dirichlet.

———

On remarque d'abord le fait général suivant: si H est un espace de Hilbert et U un opérateur unitaire agissant sur H. Alors $h \in H$ vérifie
$$\langle h, U^{n_k} h\rangle \to_{k\to\infty} \langle h, h\rangle$$
si et seulement si sa mesure spectrale est $\{n_k\}$-Dirichlet car $\langle h, U^{n_k} h\rangle = \widehat{\sigma_h}(n_k)$ et $\langle h, h\rangle = \widehat{\sigma_h}(0)$.

Ainsi, $H_{(U,\{n_k\})} = \{h \in H, \sigma_h \text{ est } \{n_k\}\text{-Dirichlet}\}$.

On considère maintenant une mesure σ $\{n_k\}$-Dirichlet, $H := L^2(\sigma)$ et $U = V$, l'opérateur unitaire $h \mapsto e^{i\cdot}h$ vu en cours. Par construction, la mesure spectrale de la fonction constante égale à 1 est σ, en effet:
$$\begin{aligned}\langle 1, V^n 1\rangle &= \int_{]-\pi,\pi]} e^{-int}\sigma(dt)\\ &= \widehat{\sigma}(n)\end{aligned}$$
De plus chaque itéré $V^n 1 = e^{in\cdot}$, $n \in \mathbb{Z}$, a la même mesure spectrale σ et appartient donc à $L^2(\sigma)_{(V,\{n_k\})}$ car σ est $\{n_k\}$-Dirichlet. Or les vecteurs $\{e^{in\cdot}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ forment une partie totale de $L^2(\sigma)$. Ainsi, comme $L^2(\sigma)_{(V,\{n_k\})}$ est fermé, on a:
$$L^2(\sigma)_{(V,\{n_k\})} = L^2(\sigma).$$
Soit maintenant $\rho \ll \sigma$, d'après un résultat du cours, il existe $h \in L^2(\sigma)$ admettant ρ pour mesure spectrale et donc ρ est $\{n_k\}$-Dirichlet.

7. Montrer qu'une mesure finie sur $(]-\pi,\pi], \mathcal{B}(]-\pi,\pi]))$, de Dirichlet, est singulière par rapport à une mesure de Rajchmann sur $(]-\pi,\pi], \mathcal{B}(]-\pi,\pi]))$.

———

Soit $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}$, σ une mesure $\{n_k\}$-Dirichlet et ρ une mesure de Rajchmann sur $(]-\pi,\pi], \mathcal{B}(]-\pi,\pi]))$. Supposons $\sigma \not\perp \rho$. Alors il existe une mesure γ non nulle telle que $\gamma \ll \sigma$ et $\gamma \ll \rho$. Ainsi on a, d'après la question précédente
$$\widehat{\gamma}(n_k) \to_{k\to\infty} \widehat{\gamma}(0)$$
et aussi d'après le théorème de Riemann-Lebesgue généralisé
$$\widehat{\gamma}(n) \to_{n\to\infty} 0.$$
On en déduit que $\widehat{\gamma}(0) = 0$ ce qui signifie que γ est la mesure nulle d'où une contradiction. σ et ρ sont donc bien singulières.

8. Montrer qu'un système $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ est $\{n_k\}$-rigide si et seulement si n'importe quel représentant σ_M du type spectral maximal est une mesure $\{n_k\}$-Dirichlet.

———

Soit σ_M un représentant du type spectral maximal de $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ qu'on suppose $\{n_k\}$-rigide.

D'après ce qu'on a montré plus haut $L^2(\mu) = L^2(\mu)_{(U_T, \{n_k\})} = \left\{ f \in L^2(\mu), \sigma_f \text{ est } \{n_k\}\text{-Dirichlet} \right\}$. Or on sait que pour n'importe quel représentant σ_M du type spectral maximal, on peut trouver un vecteur $h \in L^2(\mu)$ admettant σ_M pour mesure sepctrale. Donc σ_M est $\{n_k\}$-Dirichlet.

Réciproquement supposons que σ_M est n_k-Dirichlet. Comme pour tout $f \in L^2(\mu)$, $\sigma_f \ll \sigma_M$, d'après la question précédente, on a bien que σ_f est n_k-Dirichlet. En prenant n'importe quel $A \in \mathcal{A}$, σ_{1_A} est donc n_k-Dirichlet ce qui signifie exactement que $\mu(A \cap T^{-n_k} A) \to_{k\infty} \mu(A)$. Ainsi $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ est n_k-rigide.

3 Théorie ergodique des systèmes dynamiques rigides

9. La rigidité entraîne-t-elle l'ergodicité ?

———

Non ! Il suffit de prendre $X = \{0, 1\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, X, \{0\}, \{1\}\}$, $\mu := \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$ et $T = Id$...

10. Montrer qu'une rotation d'angle $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Q}$ est rigide.

———

On considère ici $(X, \mathcal{A}, \mu, T) = (]-\pi, \pi], \mathcal{B}, \lambda, R_\alpha)$ où $R_\alpha(x) = x + \alpha \mod .2\pi$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et λ est la mesure de Lebesgue normalisée sur $]-\pi, \pi]$.

On sait que les nombres $n\alpha \mod .2\pi$, $n \in \mathbb{N}$ forment une partie dense de $]-\pi, \pi]$. Ainsi, on construit facilement une suite $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}$ telle que $n_k\alpha \to_{k\infty} 0 \mod .2\pi$. Vérifions que le système est alors $\{n_k\}$-rigide. D'après les questions précédentes, il suffit de montrer $L^2(\lambda)_{(U_{R_\alpha}, \{n_k\})} = L^2(\lambda)$.

On a $U_{R_\alpha^{n_k}} e^{in\cdot} = e^{inn_k\alpha} e^{in\cdot}$ d'où

$$\begin{aligned} \left\langle e^{in\cdot}, U_{R_\alpha^{n_k}} e^{in\cdot} \right\rangle &= \left\langle e^{in\cdot}, e^{inn_k\alpha} e^{in\cdot} \right\rangle \\ &= e^{inn_k\alpha} \left\langle e^{in\cdot}, e^{in\cdot} \right\rangle \\ &\to_{k\infty} \left\langle e^{in\cdot}, e^{in\cdot} \right\rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $e^{in\cdot} \in L^2(\lambda)_{(U_{R_\alpha}, \{n_k\})}$, or les $e^{in\cdot}$ forment une base orthonormale de $L^2(\lambda)$, ainsi $L^2(\lambda)_{(U_{R_\alpha}, \{n_k\})} = L^2(\lambda)$, le système est bien $\{n_k\}$-rigide.

11. Montrer que le fait d'être $\{n_k\}$-rigide est hérité par tous les facteurs.

———

C'est évident quand on considère la caractérisation des facteurs comme sous-tribus invariantes.

Sinon, si $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$ est un facteur de $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ à travers une application φ et que ce dernier est $\{n_k\}$-rigide, alors, pour tout $B \in \mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} \nu\left(B \cap S^{-n_k} B\right) &= \mu\left(\varphi^{-1}\left(B \cap S^{-n_k} B\right)\right) \\ &= \mu\left(\varphi^{-1} B \cap \varphi^{-1}\left(S^{-n_k} B\right)\right) \\ &= \mu\left(\varphi^{-1} B \cap T^{-n_k}\left(\varphi^{-1} B\right)\right) \\ &\to_{k\to\infty} \mu\left(\varphi^{-1} B\right) = \nu(B) \end{aligned}$$

et donc $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$ est bien $\{n_k\}$-rigide.

12. Montrer qu'un couplage entre deux systèmes rigides pour la même suite est encore rigide pour cette même suite.

———

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$ deux systèmes $\{n_k\}$-rigides et $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, m, T \times S)$ un couplage entre les deux.

Remarquons que, pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a

$$\begin{aligned} m\left(A \times Y \cap (T \times S)^{-n_k} A \times Y\right) &= m\left(A \times Y \cap T^{-n_k} A \times S^{-n_k} Y\right) \\ &= m\left(A \times Y \cap T^{-n_k} A \times Y\right) \\ &= m\left(\left(A \cap T^{-n_k} A\right) \times Y\right) \\ &= \mu\left(A \cap T^{-n_k} A\right) \\ &\to_{k \to \infty} \mu(A) = m(A \times Y) \end{aligned}$$

Ainsi, en notant, comme dans la question 1,

$$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_{\{n_k\}} := \left\{P \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, m\left(P \cap (T \times S)^{-n_k} P\right) \to_{k \to \infty} m(P)\right\},$$

on voit que $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_{\{n_k\}}$ contient la tribu horizontale $\mathcal{A} \times Y$, et on montre de la même façon qu'elle contient la tribu verticale $X \times \mathcal{B}$, or la tribu engendrée par $\mathcal{A} \times Y$ et $X \times \mathcal{B}$ n'est autre que $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, ainsi $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})_{\{n_k\}} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ et donc le couplage est $\{n_k\}$-rigide.

13. Un système $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ est dit modérément mélangeant si son seul facteur rigide est le facteur trivial $\{X, \emptyset\}$ (mod. 0). Montrer que le mélange modéré entraîne le mélange faible.

———

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique. Supposons que son type spectral maximal σ_M réduit possède un atome en un point θ que l'on écrit $e^{i\alpha}$, avec $\alpha \in]-\pi, \pi]$. Alors on a $\delta_\theta \ll \sigma_M$.

Deux cas se présentent:

-si $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Q}$, alors on a déjà vu dans la preuve de la rigidité d'une rotation irrationnelle que δ_θ était une mesure de Dirichlet.

-si $\alpha \in 2\pi\mathbb{Q}$, alors, en écrivant $\alpha = \frac{2p\pi}{q}$, avec p dans $\mathbb{Z}$ et q dans $\mathbb{N}$ (et $q \geq 2$), on voit alors que, d'une part, la suite $\left\{q^{n+1}\right\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}$ et que, d'autre part:

$$\widehat{\delta_\theta}\left(q^{n+1}\right) = e^{-iq^{n+1}\alpha} = e^{-iq^n 2p\pi} = 1 = \widehat{\delta_\theta}(0),$$

et donc, là encore, δ_θ est une mesure de Dirichlet (toutes les rotations sont rigides, rationnelles ou irrationnelles...).

Ainsi, dans les deux cas, le vecteur propre associé à cette valeur propre est mesurable par rapport au facteur rigide correspondant, et ce dernier est non-trivial puisque ce vecteur propre est non-constant (car dans $L_0^2(\mu)$). Ceci empêche le mélange modéré.

Ainsi, le type spectral maximal réduit d'un système modérément mélangeant est continu, ce qui entraîne le mélange faible.

14. Montrer que les systèmes rigides sont disjoints des systèmes modérément mélangeants.

———

Soit donc $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système modérément mélangeant et $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$ un système $\{n_k\}$-rigide et $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, m, T \times S)$ un couplage entre les deux. On a vu qu'on pouvait toujours associer de manière uniquement déterminée un opérateur de Markov Φ de $L^2(\nu)$ dans $L^2(\mu)$ tel que pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$:

$$m(A \times B) = \int_X 1_A \Phi(1_B)\, d\mu.$$

On a vu aussi que si $f \in L^2(\nu)$, alors la mesure spectrale de $\Phi(f)$ vérifie $\sigma_{\Phi(f)} \ll \sigma_f$. Mais alors, d'après ce qu'on a vu, comme pour tout $B \in \mathcal{B}$, σ_{1_B} est une mesure $\{n_k\}$-Dirichlet, $\sigma_{\Phi(1_B)}$ aussi. Ceci implique que $\Phi(1_B)$ est mesurable par rapport au facteur rigide $\mathcal{A}_{\{n_k\}}$ de $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ qui n'est autre que le facteur trivial mod. 0. Ainsi $\Phi(1_B)$ est constant μ-p.p. et donc égal à $\int_X \Phi(1_B)\, d\mu = \int_Y 1_B d\nu = \nu(B)$ μ-p.p..

Ainsi

$$\begin{aligned} m(A \times B) &= \int_X 1_A \Phi(1_B)\, d\mu \\ &= \int_X 1_A \nu(B)\, d\mu \\ &= \mu(A)\, \nu(B) \end{aligned}$$

m est donc la mesure produit et ce quel que soit le couplage, les systèmes sont donc disjoints.

15. En déduire que les systèmes mélangeants sont disjoints des systèmes rigides.

———

On peut utiliser le résultat sur la singularité des mesures de Dirichlet et des mesures de Rajchmann comme au dessus. On peut aussi montrer qu'un système mélangeant est modérément mélangeant:

Soit donc $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système mélangeant. Supposons qu'il existe $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}$ et $A \in \mathcal{A}$ tel que

$$\mu\left(A \cap T^{-n_k} A\right) \to_{k \to \infty} \mu(A).$$

Alors comme par ailleurs

$$\mu\left(A \cap T^{-n} A\right) \to_{n \to \infty} \mu(A)^2$$

On en déduit $\mu(A) = 0$ ou 1. Ainsi le seul facteur rigide est le facteur trivial.

4 Construction d'une mesure de Dirichlet continue

On se donne des variables indépendantes $\{X_k\}_{k \geq 1}$ définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où X_k suit la loi de de Bernoulli $b\left(\frac{k}{k+1}, \frac{1}{k+1}\right)$ (i.e. $\mathbb{P}[X_k = 1] = \frac{1}{k+1}$, $\mathbb{P}[X_k = 0] = \frac{k}{k+1}$). On forme ensuite $Z := \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} X_k$.

16. Montrer que Z est $\mathbb{P}$-presque sûrement finie.

———

On a $0 \leq \frac{1}{2^k} X_k \leq \frac{1}{2^k}$ $\mathbb{P}$-presque sûrement. Z est donc finie, $\mathbb{P}$-presque sûrement.

17. Montrer que la loi de Z est continue.

———

Formons l'espace $\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}, (\mathcal{B}\{0,1\})^{\mathbb{N}^*}, \otimes_{k \geq 1} b\left(\frac{k}{k+1}, \frac{1}{k+1}\right)\right)$ et l'application $\varphi : \{0,1\}^{\mathbb{N}^*} \to [0,1]$, avec

$$\varphi\left(\{\epsilon_k\}_{k \geq 1}\right) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} \epsilon_k.$$

En considérant l'ensemble $N = \cup_{n \geq 1} \cap_{k \geq n} \{\epsilon_k = 1\}$ qui est de mesure nulle pour $\otimes_{k \geq 1} b\left(\frac{k}{k+1}, \frac{1}{k+1}\right)$, on a bien une bijection entre $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*} \setminus N$ et $[0,1]$ puisque $\{\epsilon_k\}_{k \geq 1}$ n'est autre que le développement dyadique de $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} \epsilon_k$. Or $\otimes_{k \geq 1} b\left(\frac{k}{k+1}, \frac{1}{k+1}\right)$ est une mesure non atomique, en effet:

$\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}[X_k = 1] = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k+1} = +\infty$ donc, d'après le lemme de Borel-Cantelli pour des événements indépendants, $\mathbb{P}\left[\limsup_{k \geq 1} \{X_k = 1\}\right] = 1$ ce qui signifie que pour presque tout $\omega \in \Omega$, la suite

$\{X_k(\omega)\}_{k\geq 1}$ possède une infinité de 1. Or la probabilité d'une telle suite sous $\otimes_{k\geq 1} b\left(\frac{k}{k+1}, \frac{1}{k+1}\right)$ est nulle puisque la probabilité d'avoir un 1 à la place $k \geq 1$ est égale à $\frac{1}{k+1} \to_{k\to\infty} 0$.
On peut raisonner encore plus simplement comme l'a fait l'un d'entre vous en remarquant que, si $\{a_k\}_{k\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n, \ldots] &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n] \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}[X_k = a_k] \\
&\leq \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}[X_k = 0] \\
&= \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+1} \to_{n\infty} 0.
\end{aligned}$$

Enfin, la loi de Z est aussi non atomique puisque c'est la mesure image de $\otimes_{k\geq 1} b\left(\frac{k}{k+1}, \frac{1}{k+1}\right)$ par la bijection évoquée plus haut.

18. On veut former une mesure de probabilité sur $(]-\pi,\pi], \mathcal{B}(]-\pi,\pi]))$, pour ce faire on définit ν comme étant la loi de πZ et $\check{\nu}$ la loi de $-\pi Z$, et enfin on forme $\sigma = \nu * \check{\nu}$.
Calculer $\mathbb{E}\left[e^{itZ}\right]$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, puis $\widehat{\sigma}(n)$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

———

Soit $K \geq 1$, $\mathbb{E}\left[e^{it\sum_{k=0}^{K} \frac{1}{2^k} X_k}\right] = \prod_{k=1}^{K} \mathbb{E}\left[e^{i\frac{t}{2^k} X_k}\right] = \prod_{k=1}^{K}\left(1 - \frac{1}{k+1}\left(1 - e^{i\frac{t}{2^k}}\right)\right)$.
Comme $\sum_{k=0}^{K} \frac{1}{2^k} X_k$ converge $\mathbb{P}$-p.s. vers Z, alors la convergence a aussi lieu en loi et donc les fonctions caractéristiques convergent, c'est à dire, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left[e^{it\sum_{k=0}^{K} \frac{1}{2^k} X_k}\right]$ converge vers $\mathbb{E}\left[e^{itZ}\right]$. Donc le produit $\prod_{k=1}^{K} \mathbb{E}\left[e^{i\frac{t}{2^k} X_k}\right]$ converge vers $\mathbb{E}\left[e^{itZ}\right]$.
D'où

$$\mathbb{E}\left[e^{itZ}\right] = \prod_{k\geq 1}\left(1 - \frac{1}{k+1}\left(1 - e^{i\frac{t}{2^k}}\right)\right)$$

(En fait, le produit converge absolument puisque $\left|-\frac{1}{k+1}\left(1 - e^{i\frac{t}{2^k}}\right)\right| = \frac{2}{k+1}\left|\sin\left(\frac{t}{2^{k+1}}\right)\right| \leq \frac{2|t|}{(k+1)2^{k+1}}$).
On a maintenant

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma}(n) &= \widehat{\nu * \check{\nu}}(n) \\
&= \widehat{\nu}(n)\,\widehat{\nu}(-n) \\
&= \widehat{\nu}(n)\,\overline{\widehat{\nu}(n)} \\
&= |\widehat{\nu}(n)|^2 \\
&= \left|\mathbb{E}\left[e^{in\pi Z}\right]\right|^2 \\
&= \prod_{k\geq 1}\left|1 - \frac{1}{k+1}\left(1 - e^{i\frac{n\pi}{2^k}}\right)\right|^2 \\
&= \prod_{k\geq 1}\left(1 - 2\frac{k}{(k+1)^2}\left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2^k}\right)\right)\right) \\
&= \prod_{k\geq 1}\left(1 - 4\frac{k}{(k+1)^2}\left(\sin^2\left(\frac{2n\pi}{2^k}\right)\right)\right),
\end{aligned}$$

la convergence du produit infini ayant lieu pour les mêmes raisons que précédemment.

19. Montrer que la suite $\{2^n\}_{n\geq 0}$ fait de σ une mesure de Dirichlet.

———

On a

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}(2^n) &= \prod_{k\geq 1}\left(1-4\frac{k}{(k+1)^2}\left(\sin^2\left(\frac{2^{n+1}\pi}{2^k}\right)\right)\right)\\ &= \prod_{k\geq n+1}\left(1-4\frac{k}{(k+1)^2}\left(\sin^2\left(\frac{2^{n+1}\pi}{2^k}\right)\right)\right).\end{aligned}$$

On veut montrer que $\widehat{\sigma}(2^n) \to_{n\to\infty} \widehat{\sigma}(0) = 1$, cela revient donc à montrer que

$$\sum_{k\geq n+1} \ln\left(1-4\frac{k}{(k+1)^2}\left(\sin^2\left(\frac{2^{n+1}\pi}{2^k}\right)\right)\right) \to_{n\to\infty} 0.$$

Or, pour $x \geq 0$ assez petit, $0 \leq -\ln(1-x) \leq 2x$.
On cherche alors à montrer que

$$\sum_{k\geq n+1} \frac{k}{(k+1)^2}\left(\sin^2\left(\frac{2^{n+1}\pi}{2^k}\right)\right) \to_{n\to\infty} 0.$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq n+1} \frac{k}{(k+1)^2}\left(\sin^2\left(\frac{2^{n+1}\pi}{2^k}\right)\right) &\leq \sum_{k\geq n+1} \frac{k}{(k+1)^2}\left(\frac{2^{2n+2}\pi^2}{2^{2k}}\right)\\ &\leq \sum_{k\geq n+1} \frac{1}{n}\left(\frac{2^{2n+2}\pi^2}{2^{2k}}\right)\\ &\leq \frac{2^{2n+2}\pi^2}{n}\sum_{k\geq n+1}\frac{1}{2^{2k}}\\ &\leq \frac{2^{2n+2}\pi^2}{n}\frac{1}{2^{2n}} = \frac{4\pi^2}{n} \to_{n\to\infty} 0.\end{aligned}$$

20. Pour finir, construire un système dynamique faiblement mélangeant et rigide.

———

La mesure σ construite précédemment est symétrique, on peut donc s'en servir pour construire le processus stationnaire Gaussien associé vu en cours, $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{Z}}, m, S\right)$ où, en prenant $f := \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto x_0$, le processus $\{f\circ T^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est Gaussien et $\sigma_f = \sigma$.
Comme σ est continue (car c'est le produit de convolution de deux mesures continues), on sait déjà que le système est faiblement mélangeant. Il reste à montrer qu'il est rigide. D'après les résultats de la première section, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f\circ T^n$ est mesurable par rapport à $\left(\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{Z}}\right)_{\{2^n\}}$, mais la plus petite tribu qui contient les $f\circ T^n$, $n \in \mathbb{Z}$, n'est autre que $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{Z}}$, par définition. Ainsi $\left(\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{Z}}\right)_{\{2^n\}} = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes\mathbb{Z}}$ ce qui signifie que le système est $\{2^n\}$-rigide.
On peut aussi montrer que le type spectral maximal du sytème est une mesure $\{2^n\}$-Dirichlet, en

effet, le type spectral maximal du système est (la classe d'équivalence de) $\delta_0 + \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!}\sigma^{*k}$, d'où

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{\delta_0 + \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!}\sigma^{*k}}\right)(2^n) &= 1 + \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!}\widehat{\sigma}^k\,(2^n) \\
&= e^{\widehat{\sigma}(2^n)} \\
&\to_{n\to\infty} e = 1 + \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!} \\
&= \delta_0\,(]-\pi,\pi]) + \sum_{k\geq 1} \frac{\sigma^{*k}\,(]-\pi,\pi])}{k!} \\
&= \left(\widehat{\delta_0 + \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!}\sigma^{*k}}\right)(0)\,.
\end{aligned}$$