Quelques résultats sur les Suspensions de Poisson
Habilitation à diriger des recherches

Emmanuel Roy, Université Paris 13

Soutenue le 25 mars 2021 devant le jury composé de :

M. Julien BARRAL (Président du Jury)

M. François BEGUIN

Mme Bryna KRA

M. Dalibor VOLNY (rapporteur)

M. Benjamin Weiss (rapporteur)

Je tiens à remercier très chaleureusement les membres de mon jury : Julien Barral, François Béguin, Bryna Kra, Dalibor Volny, et Benjamin Weiss. Je suis très honoré et un peu intimidé de les retrouver autour de ce mémoire, attentifs à mes travaux.
Mon affection la plus profonde va à mes compagnons de recherche Thierry de la Rue et Elise Janvresse.
Je salue aussi très amicalement François Parreau avec qui je devrais faire plus de maths, tellement ses maths sont belles !
Ce mémoire est dédié à mon frère et à mon père.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1. Présentation générale

La “Théorie des Probabilités” se résume à l'étude du mouvement Brownien et du Processus de Poisson. Bien sûr, cette affirmation péremptoire est une provocation, mais elle contient quand même une part de vérité : ces deux objets et leurs dérivés sont les points de repère de toute la théorie et bien peu de travaux probabilistes leur sont complètement étrangers. En Théorie ergodique, ces deux objets constituent, selon l'expression de Mariusz Lemańczyk, les *systèmes d'origine probabiliste*, pour bien marquer de nouveau leur nature mais aussi pour rappeler que le reste de la Théorie ergodique s'apparente plus à la Théorie de la mesure abstraite, et que les Probabilités ne sont pas seulement un cas particulier de cette Théorie de la mesure mais aussi un univers particulier dont le mouvement Brownien et le Processus de Poisson sont les représentants les plus extraordinaires, non seulement en tant qu'objets mathématiques mais aussi comme source infinie de modèles dans les applications, loin de toute considération abstraite.

En Théorie ergodique, ces objets sont soumis à l'action de transformations naturelles et prennent alors le nom de *systèmes (dynamiques) Gaussiens* et *suspensions de Poisson*. Si les premiers ont été particulièrement étudiés depuis une cinquantaine d'année, les secondes ont été largement ignorées. Les systèmes Gaussiens, à l'époque de l'émergence de la Théorie ergodique abstraite dans les années 50-60, ont alimenté la théorie en fournissant des exemples ou contre-exemples particuliers aux divers comportements qui apparaissaient alors et dont la diversité permettaient d'initier la classification des systèmes dynamiques. Ils ont par la suite, et ce grâce au Théorème de Foiaş-Strătilă [**9**], engendré une théorie originale, développée dans les années 1990-2000, et dont l'article [**21**] en est le point culminant.

Les suspensions de Poisson quant à elles, n'apparaissent que très peu dans la littérature mathématique, seuls les physiciens, qui y voient un modèle de systèmes de particules sans interactions, y accordent alors un intérêt, assez éloigné cependant des préoccupations des ergodiciens. On en trouve quand même la trace dans l'ouvrage, alors de référence [**2**], où il fait l'objet d'un traitement assez sommaire. Marchat, dans une thèse ([**22**]) qui n'a malheureusement pas donné lieu à des publications, fait le travail salutaire d'établir les premiers critères ergodiques (ergodicité, mélange faible, mélange fort) dont certains faisaient apparemment partie du folklore autour de ces objets à l'époque. Ensuite, c'est au tour de probabilistes de s'attaquer à l'étude des processus infiniment divisibles stationnaires où les suspensions de Poisson n'y jouent malheureusement qu'un tout petit rôle sauf, fort heureusement, dans l'article fondateur de Maruyama ([**23**]). L'approche de ces auteurs, faisant malheureusement l'impasse sur les outils de la Théorie ergodique, n'apporte que très peu de contenu nouveau. Mentionnons, dans un registre différent, l'important article

[**25**] traitant du théorème d'isomorphisme pour les schémas de Bernoulli, considéré ici pour des actions de groupes plus généraux où les Suspensions de Poisson sont un modèle naturel de schémas de Bernoulli "continus".

Le sujet a finalement pu retrouver une nouvelle actualité à partir du milieu des années 2000 avec, de manière indépendante, l'article [**8**] de Derriennic, Frącek, Lemańczyk et Parreau et la thèse [**32**], donnant notamment deux définitions différentes de la même notion : les couplages Poissonniens. Le champs était alors ouvert pour une approche ergodique "moderne" des suspensions de Poisson.

Dans ce mémoire, nous nous proposons d'illustrer ceci à travers une sélection de cinq de nos articles ([**11**], [**34**], [**33**], [**27**], [**12**]). Ainsi, nous n'évoquerons que très marginalement le reste de nos travaux effectués après la thèse, à savoir :

— [**20**], qui traite de résultats de disjonctions généraux liés à la propriété de divisibilité au sens dynamique.
— [**35**], où l'on étudie les processus α-stables en explicitant la structure d'extension de Maharam de leur mesure de Lévy.
— [**13**], qui est un article entièrement consacré à un système de rang 1 en mesure infinie (la transformation de Chacon infinie) et en particulier à ses "couplages", en un sens particulier à la mesure infinie.
— [**15**] qui est une élaboration à partir de l'article précédent, indispensable pour fournir des exemples et alimenter la machinerie mise en place dans [**12**].
— [**14**] qui présente une extension de [**13**] aux mesures aléatoires ainsi qu'un résultat de rigidité autour des *splittings* de processus de Poisson.

1.2. Plan

Dans un premier chapitre, nous introduisons le cadre, les objets et les notions présents dans ce travail. Contrairement à leur présentation dans les articles, nous avons fait le choix de ne pas faire intervenir de dynamique à cette étape pour mettre en avant le caractère purement probabiliste de la structure d'espace de Poisson.

Dans un deuxième chapitre, nous introduisons les suspensions de Poisson, c'est à dire, les systèmes dynamiques naturellement associés aux espaces de Poisson. Nous rappelons ensuite les propriétés ergodiques élémentaires déjà connues ou établies dans la thèse en donnant toutefois une nouvelle preuve, non publiée, très courte, de l'ergodicité et du mélange faible.

Le troisième chapitre aborde la notion d'entropie de Poisson qui avait été introduite en fin de thèse, sans y être alors développée. Cette partie concerne essentiellement les articles [**11**] et [**34**].

Dans un quatrième chapitre, nous introduisons ce qui a représenté le fil rouge de nos travaux, à savoir, le contrôle de l'"écart de complexité" entre une suspension de Poisson et sa base, avec comme objectif, l'obtention de suspensions réduisant cet écart au minimum. Ceci implique l'obtention préalable de résultats structurels sur le spectre, les facteurs, les couplages, qui forment le coeur de notre travail. Les articles concernés ici sont [**33**] (qui reprend partiellement quelques résultats de la thèse) et [**27**].

Enfin, dans un dernier chapitre, nous présentons ce qui constitue un premier aboutissement de notre travail, réalisé dans l'article [**12**], à savoir un analogue du théorème de Foiaş et Strătilă pour les suspensions de Poisson permettant en particulier l'obtention de suspensions sur base ergodique dont nous pouvons contrôler tous les autocouplages.

En appendice, nous discutons brièvement de nos travaux en cours.

1.3. Règle concernant la paternité des résultats

Dans ce mémoire, nous mentionnons un certain nombre de résultats, concernant surtout les fondements théoriques liés à nos objets, ayant une paternité difficile, voire impossible à retracer ; nous fournissons néanmoins une référence où ces résultats apparaissent. Nous avons dû montrer aussi quelques résultats dont nous ne pouvons pas assurer qu'ils n'ont pas déjà été établis par ailleurs, dans ce cas, nous indiquons la mention (**).

Les autres résultats sont originaux et extraits de nos travaux publiés, tout en étant éventuellement présentés sous une forme différente.

Chapitre 2

Espaces de Poisson

2.1. Espaces de Lebesgue

En Théorie ergodique, les espaces de référence sont les espaces dits *de Lebesgue*. C'est une classe d'espaces suffisamment large pour contenir les espaces "raisonnables" et suffisamment étroite pour assurer une grande souplesse d'utilisation dans la pratique. Rappelons-en une définition dans le cadre qui nous intéresse :

Définition 1. Un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$, où μ est une mesure diffuse, est appelé *espace de Lebesgue* si il est isomorphe mod. 0 à un intervalle de $\mathbb{R}$ munie de la mesure de Lebesgue et de la tribu borélienne complétée.

Ainsi, il y a essentiellement deux espaces de Lebesgue munis d'une mesure diffuse en fonction du caractère fini ou non de cette mesure μ. Un espace de Lebesgue est donc toujours σ-fini et sa tribu est toujours complète pour la mesure considérée. Rappelons qu'un espace Polonais muni d'une mesure et de sa tribu Borélienne complétée pour cette mesure est un espace de Lebesgue.

En général, en Théorie ergodique, et en particulier dans tout ce qui va suivre, il est extrêmement fréquent de considérer les sous-tribus $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ qui restent σ-finies pour μ. Implicitement, nous considérerons toujours que $\mathcal{B}$ est complète pour μ. Bien sûr, si l'inclusion $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ est stricte, $(X, \mathcal{B}, \mu)$ n'est plus un espace de Lebesgue et nous perdons alors toutes les bonnes propriétés qui nous intéressent. Pour palier cet inconvénient, on construit l'espace quotient comme suit :

- On considère une famille $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ de μ-mesure finie et engendrant $\mathcal{B}$ mod. 0, c'est à dire :
  Pour tout $A \in \mathcal{B}$, il existe $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{B}} := \sigma\left(A_n,\, n \in \mathbb{N}\right)$ tel que $\mu\left(A \bigtriangleup \widetilde{A}\right) = 0$.
  L'existence d'une telle famille $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est justement garantie par le fait que l'espace de départ est de Lebesgue.
- On définit ensuite la relation d'équivalence $\sim$ sur X en posant $x \sim y$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1_{A_n}(x) = 1_{A_n}(y)$.
- On forme l'espace quotient $\left(X_{/\widetilde{\mathcal{B}}}, \mathcal{A}_{/\widetilde{\mathcal{B}}}, \mu_{/\widetilde{\mathcal{B}}}\right)$ où $\mathcal{A}_{/\widetilde{\mathcal{B}}}$ est engendrée par la projection p sur les classes d'équivalence :
  $$\mathcal{A}_{/\widetilde{\mathcal{B}}} := \left\{Y \subset X_{/\widetilde{\mathcal{B}}},\, p^{-1}(Y) \in \widetilde{\mathcal{B}}\right\}$$
- Une fois la tribu complétée, on vérifie enfin que la construction est indépendante du choix initial de la famille $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ au sens où l'espace construit avec une autre famille se trouverait isomorphe mod. 0 à la construction ci-dessus.
- On renomme enfin l'espace quotient $(X_{/\mathcal{B}}, \mathcal{A}_{/\mathcal{B}}, \mu_{/\mathcal{B}})$.

Le résultat suivant est l'un des plus utiles et d'usage constant en Théorie ergodique :

Théorème 2. [**30, 5**]*Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace de Lebesgue et* $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ *une sous-tribu telle que* μ *reste* σ*-finie relativement à* $\mathcal{B}$*. l'espace quotient* $(X_{/\mathcal{B}}, \mathcal{A}_{/\mathcal{B}}, \mu_{/\mathcal{B}})$ *est encore un espace de Lebesgue.*

Remarque 3. Cette construction est consistante avec la situation suivante :

Supposons qu'on ait deux espaces de Lebesgue $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ et une application mesurable φ telle que $\varphi_* \mu = \nu$. Alors, en considérant $\mathcal{B} = \varphi^{-1}\mathcal{C}$, on obtient que $(X_{/\mathcal{B}}, \mathcal{A}_{/\mathcal{B}}, \mu_{/\mathcal{B}})$ est isomorphe mod. 0 à $(Y, \mathcal{C}, \nu)$.

2.2. Processus ponctuels, espaces de Poisson

2.2.1. Processus ponctuels. Oublions un moment les espaces de Lebesgue pour introduire les principaux objets probabilistes que nous étudions.

Considérons un espace mesurable abstrait $(X, \mathcal{A})$, on notera $(X^*, \mathcal{A}^*)$ l'espace canonique des processus ponctuels où

— X^* est la collection des mesures sur $(X, \mathcal{A})$ de la forme $\nu := \sum_{i \in I} \delta_{x_i}$, I étant un ensemble au plus dénombrable.

— $\mathcal{A}^*$ est la tribu engendrée par les applications du type $\mathcal{N}_A := \nu \mapsto \nu(A)$ de X^* dans $\overline{\mathbb{N}}$, pour A parcourant $\mathcal{A}$.

On définit aussi $X_s^* \subset X^*$ comme le sous-ensemble des mesures ν telles que pour tout $x \in X$, $\nu(\{x\}) = 0 \text{ ou } 1$.

Définition 4. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On appelle *processus ponctuel* sur $(X, \mathcal{A})$ une variable aléatoire N de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dans $(X^*, \mathcal{A}^*)$. On dira que N est *simple* si $\mathbb{P}(N \in X_s^*) = 1$.

Sauf cas particulier, tous les processus ponctuels que nous considérerons seront simples.

2.2.2. Infinie divisibilité. Cette notion, fondamentale en théorie des probabilités, joue un grand rôle dans notre travail.

L'espace mesurable $(X^*, \mathcal{A}^*)$ est naturellement équipé d'une loi de semi-groupe (l'addition des mesures $(\nu, \nu') \mapsto \nu + \nu'$) qui en fait un semi-groupe mesurable. La convolution des lois de probabilité sur $(X^*, \mathcal{A}^*)$ est donc bien définie, il en est donc de même pour l'infinie divisibilité :

Définition 5. On dit qu'une mesure de probabilité p sur $(X^*, \mathcal{A}^*)$ (et par extension $(X^*, \mathcal{A}^*, p)$) est *infiniment divisible* (ID) si pour tout entier $k \geq 2$, il existe une mesure de probabilité p_k sur $(X^*, \mathcal{A}^*)$ telle que $p = p_k^{*k}$.

L'infinie divisibilité se généralise immédiatement aux produits cartésiens $\left((X^*)^k, (\mathcal{A}^*)^{\otimes k}\right)$, nous nous en servirons de manière fondamentale dans la suite.

2.2.3. Espaces de Poisson. Venons-en aux objets principaux de notre travail, les espaces de Poisson, en montrant en particulier que ce sont de bons espaces de probabilité, à savoir, des espaces de Lebesgue.

Commençons par le Théorème/Définition principal :

Théorème 6. *(*[**3**]*, Chapitre 2) Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace de Lebesgue. Il existe une unique mesure de probabilité* μ^* *sur* $(X^*, \mathcal{A}^*)$ *possédant les propriétés suivantes :*

Pour tout entier $n \geq 1$ *et toute famille* $\{A_k\}_{1 \leq k \leq n}$ *d'ensembles deux à deux disjoints et de* μ*-mesure finie,*

— *les variables aléatoires* $\{\mathcal{N}_{A_k}\}_{1\leq k\leq n}$ *sont indépendantes*

— *pour tout* $1 \leq k \leq n$, $\mathcal{N}_{A_k}$ *suit une loi de Poisson de paramètre* $\mu(A_k)$.

L'espace de probabilité $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ *est appelé* espace de Poisson *et* $(X, \mathcal{A}, \mu)$, *sa* base.

Soit N, *un processus ponctuel sur* $(X, \mathcal{A})$ *défini sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, *si la loi de* N *est* μ^*, *alors* N *sera appelé* Processus (ponctuel) de Poisson d'intensité μ. N *est un processus ponctuel simple si et seulement si* μ *est diffuse.*

La référence [**3**] ne traite pas à proprement parler des espaces de Lebesgue, mais la discussion qui suit permet de voir que ce n'est pas un problème.

Donnons une réalisation "concrète" classique, en partant d'une suite de variables aléatoires exponentielles i.i.d.. Plus précisément, on a l'espace de probabilité associé à cette suite de variables i.i.d. $\left(\left(\mathbb{R}_*^+\right)^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}_*^+\right)^{\otimes\mathbb{N}}, \rho^{\otimes\mathbb{N}}\right)$ où ρ est la loi exponentielle de paramètre 1. On définit ensuite une application mesurable φ de $\left(\mathbb{R}_*^+\right)^{\mathbb{Z}}$ dans $\left(\mathbb{R}_*^+\right)^*$ par :

$$\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{m=1}^{+\infty} \delta_{\sum_{k=1}^{m} t_k}.$$

Notons $\left(\mathbb{R}_*^+\right)^*_{rad} \subset \left(\mathbb{R}_*^+\right)^*$, le sous-ensemble des mesures de Radon, c'est une partie mesurable :

$$\left(\mathbb{R}_*^+\right)^*_{rad} = \cap_{n\geq 1}\left\{\nu \in \left(\mathbb{R}_*^+\right)^*, \nu\,[n, n+1] < \infty\right\}.$$

φ est alors bien une bijection de $\varphi^{-1}\left(\mathbb{R}_*^+\right)^*_{rad}$ dans $\left(\mathbb{R}_*^+\right)^*_{rad}$.

C'est ensuite un exercice classique de montrer que $\varphi_*\left(\rho^{\otimes\mathbb{N}}\right) = \lambda^*$ où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_*^+$ et que $\lambda^*\left\{\left(\mathbb{R}_*^+\right)^* \setminus \left(\mathbb{R}_*^+\right)^*_{rad}\right\} = 0$.

Ainsi nous avons mis $\left(\left(\mathbb{R}_*^+\right)^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}_*^+\right)^{\otimes\mathbb{N}}, \rho^{\otimes\mathbb{N}}\right)$ en bijection bi-mesurable mod. 0 avec $\left(\left(\mathbb{R}_*^+\right)^*, \left(\mathcal{B}\left(\mathbb{R}_*^+\right)\right)^*, \lambda^*\right)$.

Il est bien connu que $\left(\left(\mathbb{R}_*^+\right)^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}_*^+\right)^{\otimes\mathbb{N}}_{\rho^{\otimes\mathbb{N}}}, \rho^{\otimes\mathbb{N}}\right)$ est un espace de Lebesgue et donc, par suite, $\left(\left(\mathbb{R}_*^+\right)^*, \left(\mathcal{B}\left(\mathbb{R}_*^+\right)\right)^*_{\lambda^*}, \lambda^*\right)$ aussi.

2.2.4. Les applications Poissonniennes. Dès que nous avons une application Φ entre deux espaces mesurables σ-finis $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ qui préserve la mesure, nous avons alors une application Φ_* entre $(X_1^*, \mathcal{A}_1^*, \mu_1^*)$ et $(X_2^*, \mathcal{A}_2^*, \mu_2^*)$ qui préserve également la mesure, définie naturellement, pour $\nu := \sum_{i\in I}\delta_{x_i} \in X_1^*$, par

$$\Phi_*\left(\sum_{i\in I}\delta_{x_i}\right) := \sum_{i\in I}\delta_{\Phi(x_i)}.$$

En partant du résultat que tout espace de Lebesgue avec une mesure infinie et diffuse est mesurablement isomorphe mod. 0 à $\left(\mathbb{R}_*^+, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}_*^+\right)_\lambda, \lambda\right)$ et que $\left(\left(\mathbb{R}_*^+\right)^*, \left(\mathcal{B}\left(\mathbb{R}_*^+\right)\right)^*_{\lambda^*}, \lambda^*\right)$ est un espace de Lebesgue, on peut alors obtenir l'énoncé important suivant :

PROPOSITION 7. *(**) Si* $(X, \mathcal{A}_\mu, \mu)$ *est un espace de Lebesgue alors l'espace de Poisson* $\left(X^*, \mathcal{A}^*_{\mu^*}, \mu^*\right)$ *est également un espace de Lebesgue.*

Dans la suite, tous les espaces que nous considérerons seront (éventuellement après complétion de la tribu) des espaces de Lebesgue.

2.2.5. Disjonction des supports et indépendance. Les propriétés d'indépendance d'un espace de Poisson se traduisent de la façon suivante (on se référera de nouveau à [**3**] (Chapitre 2) pour les propriétés de base de ces objets énoncées ici dans notre cadre et avec notre vocabulaire) :

PROPOSITION 8. *Soit $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ Un espace de Poisson au dessus de la base $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Soient X_1 et X_2 disjoints et tels que $X = X_1 \cup X_2$ avec $\mu(X_i) > 0$, $i = 1, 2$. En notant $\mathcal{A}_i := \mathcal{A}_{|X_i}$ et $\mu_i := \mu_{|X_i}$, $i = 1, 2$, on a l'isomorphisme suivant*

$$(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*) \simeq (X_1^* \times X_2^*, \mathcal{A}_1^* \otimes \mathcal{A}_2^*, \mu_1^* \otimes \mu_2^*)$$

implémenté par l'application $\nu \mapsto \left(\nu_{|X_1}, \nu_{|X_2}\right)$.

THÉORÈME 9. *Soient $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ et $(X^*, \mathcal{A}^*, \gamma^*)$ deux espaces de Poisson et S l'application somme $(\nu_1, \nu_2) \mapsto \nu_1 + \nu_2$. On a*

$$\begin{array}{c} (X^* \times X^*, \mathcal{A}^* \otimes \mathcal{A}^*, \mu^* \otimes \gamma^*) \\ S \downarrow \\ \left(X^*, \mathcal{A}^*, (\mu + \gamma)^*\right) \end{array}$$

En particulier, on a $\mu^* = \left(\frac{1}{k}\mu\right)_*^{*k}$, c'est à dire : $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ est infiniment divisible.

2.2.6. Sous tribus Poissonniennes. Un espace de Poisson $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ possède une famille naturelle de sous-tribus qui ont elles-mêmes une structure d'espace de Poisson.

DÉFINITION 10. Une sous-tribu Poissonnienne est une sous-tribu de $\mathcal{A}^*$ de la forme $\mathcal{C}^* := \{N(C), C \in \mathcal{C}\}$ où $\mathcal{C}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$.

Il faut remarquer que l'espace de Poisson "ne distingue pas" entre deux atomes de $\mathcal{C}$ de μ-mesure zéro, ainsi deux sous-tribus différentes de $\mathcal{A}$ peuvent donner naissance à la même sous-tribu Poissonnienne.

Nous pouvons donner une description plus claire d'une sous-tribu Poissonnienne $\mathcal{C}^*$ qui possède au moins un ensemble de μ -mesure finie non nulle en considérant l'ensemble maximal $K \in \mathcal{C}$ où la mesure $\mu_{|K}$ restreinte aux éléments de $\mathcal{C}$ contenus dans K est σ-finie. On a alors $\mathcal{C}^* := \{N(C), C \in \mathcal{C}, C \subset K\}$.

Si $\mathcal{C}$ ne possède que des ensembles de μ-mesure 0 ou $+\infty$, alors $\mathcal{C}^*$ n'est autre que la tribu triviale au sens où elle ne possède que des ensembles de μ^*-mesure 0 ou 1.

Le cas le plus fréquent que nous rencontrerons sera celui où μ est encore σ-finie sur $\mathcal{C}$, nous dirons alors que $\mathcal{C}$ est *σ-finie*.

On a bien une injection (après complétion) des sous-tribus σ-finies de $\mathcal{A}$ dans les sous-tribus Poissonniennes de $\mathcal{A}^*$, de plus, les sous-tribus Poissonniennes "sont" encore des espaces de Poisson au sens suivant :

PROPOSITION 11. *(**) Soit $\mathcal{C}$ une sous-tribu σ-finie de $\mathcal{A}$. On a*

$$\left((X_{/\mathcal{C}})^*, (\mathcal{A}_{/\mathcal{C}})^*, (\mu_{/\mathcal{C}})^*\right) \simeq \left(X^*_{/\mathcal{C}^*}, \mathcal{A}^*_{/\mathcal{C}^*}, \mu^*_{/\mathcal{C}^*}\right)$$

Les tribus Poissonniennes se comportent relativement bien vis à vis des opérations élémentaires :

PROPOSITION 12. [**11**] *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de Lebesgue, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux sous-tribus σ-finies de $\mathcal{A}$. On a $(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2)^* = \mathcal{B}_1^* \cap \mathcal{B}_2^*$. Si $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ est σ-finie et non-atomique pour μ, alors $(\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2)^* = \mathcal{B}_1^* \vee \mathcal{B}_2^*$.*

Démonstration. Du fait d'une négligence dans les versions préliminaires de notre article [**11**], l'énoncé (il manquait l'hypothèse de σ-finitude de $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$) ainsi que la preuve du premier point étaient erronés. Nous en donnerons une preuve correcte à la fin de ce paragraphe puisque celle-ci nécessite l'introduction d'outils supplémentaires. Fort heureusement, ces erreurs n'ont pas de répercussion dans le reste de l'article, ni dans nos autres travaux.

Le second point était énoncé et démontré correctement dans l'article, mais nous en donnerons une preuve alternative plus "conceptuelle" pour illustrer la notion de couplage Poissonnien introduite plus loin. □

On a aussi les résultats de continuité suivants :

Proposition 13. [**33**] *Soit* $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de sous-tribu de* $\mathcal{A}$.
— *Si* $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante, alors* $\vee_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{A}_n^* = (\vee_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{A}_n)^*$
— *si* $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante, alors* $\cap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{A}_n^* = (\cap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{A}_n)^*$

2.2.7. Processus de Poisson marqué. Considérons toujours l'espace de Lebesgue $(X,\mathcal{A},\mu)$ où $\mathcal{B}$ est une sou-tribu σ-finie de $\mathcal{A}$. Dans cette situation, on a, pour un certain espace mesuré $(K,\mathcal{K})$, la représentation suivante :

$$(X,\mathcal{A},\mu) \simeq (X_{\diagup\mathcal{B}} \times K, \mathcal{A}_{\diagup\mathcal{B}} \otimes \mathcal{K}, \rho)$$

où ρ se projette sur $\mu_{\diagup\mathcal{B}}$. Si μ est une mesure infinie et ρ non atomique, on peut alors remplacer $(X_{\diagup\mathcal{B}}, \mathcal{A}_{\diagup\mathcal{B}})$ par $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, ainsi :

$$(X,\mathcal{A},\mu) \simeq (\mathbb{R} \times K, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{K}, \rho)$$

où cette fois ρ se projette sur la mesure de Lebesgue λ. Ceci nous permet d'obtenir ensuite une représentation des mesures ponctuelles sur $\mathbb{R}\times K$ sous forme de processus ponctuels dits *marqués*. Plus précisément, on identifie $\left((\mathbb{R}\times K)^*, (\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{K})^*\right)$ à $\left(\mathbb{R}^* \times K^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^* \otimes \mathcal{K}^{\otimes\mathbb{Z}}\right)$ comme suit :

$$\nu \in (\mathbb{R}\times K)^* \mapsto \left(\gamma, \{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}\right),$$

où
— γ est la projection de ν sur $\mathbb{R}$, $\gamma = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \delta_{t_i(\gamma)}$ avec

$$\cdots < t_{-n}(\gamma) < \cdots < t_{-1}(\gamma) < t_0(\gamma) \le 0 < t_1(\gamma) < \cdots < t_n(\gamma) < \cdots$$

— la suite des *marques* $\{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ est définie de manière univoque par $\nu = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \delta_{(t_i(\gamma), y_i)}$.

Ainsi, en partant de l'espace de Poisson $(X^*,\mathcal{A}^*,\mu^*)$ et $\mathcal{B}$ une sous-tribu σ-finie de $\mathcal{A}$, l'identification $(X,\mathcal{A},\mu) \simeq (\mathbb{R}\times K, \mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{K}, \rho)$ permet l'identification $(X^*,\mathcal{A}^*,\mu^*) \simeq \left((\mathbb{R}\times K)^*, (\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{K})^*, \rho^*\right)$ puis une nouvelle identification avec $\left(\mathbb{R}^*\times K^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^*\otimes\mathcal{K}^{\otimes\mathbb{Z}}, \widetilde{\rho}\right)$ où $\widetilde{\rho}$ est l'image de ρ^* par l'application ci-dessus. Bien sûr $\widetilde{\rho}$ se projette sur λ^* (ce qui revient à "enlever" les marques).

Ce qui est remarquable ici, c'est la forme des lois conditionnelles $p(\gamma)$, $\gamma\in\mathbb{R}^*$:

$$p(\gamma) = \bigotimes_{i\in\mathbb{Z}} m_{t_i(\gamma)}$$

où les m_t, $t\in\mathbb{R}$, sont les lois conditionnelles de ρ relativement à λ.

Le cas classique correspond à la situation où les mesures $m(x) = m$ ne dépendent pas de x, i.e. $\rho = \lambda \otimes m$ et dans ce cas, les marques forment une suite i.i.d. de loi commune m, indépendante de l'espace de Poisson sous-jacent.

2.3. L'espace $L^2(\mu^*)$

L'étude de l'espace $L^2(\mu^*)$ démarre avec l'identité, fort simple à établir, bien que fondamentale :

$$\mathbb{E}_{\mu^*}\left[(N(A) - \mu(A))(N(B) - \mu(B))\right] = \mu(A \cap B)$$

pour tout A et B dans $\mathcal{A}_f$.

Celle-ci se réécrit en

$$\left\langle \int_X 1_A d(N-\mu), \int_X 1_B d(N-\mu) \right\rangle_{L^2(\mu^*)} = \langle 1_A, 1_B \rangle_{L^2(\mu)}$$

Ainsi la correspondance $1_A \mapsto \int_{X^*} 1_A d(N-\mu)$ établit une isométrie qui s'étend naturellement à $L^2(\mu)$ d'un côté et à $\overline{\mathrm{Vect}\left\langle \int_{X^*} 1_A d(N-\mu), \, A \in \mathcal{A}_f \right\rangle} \subset L^2(\mu^*)$ de l'autre. Ainsi voit-on $L^2(\mu)$ "dans" $L^2(\mu^*)$.

Les identités ci-dessus se généralisent de la manière suivante :

$$\left\langle \frac{1}{n!} \int_{X^n \setminus \Delta_n} 1_A \otimes \cdots \otimes 1_A d(N-\mu)^{\otimes n}, \frac{1}{n!} \int_{X^n \setminus \Delta_n} 1_B \otimes \cdots \otimes 1_B d(N-\mu)^{\otimes n} \right\rangle_{L^2(\mu^*)}$$
$$= \frac{1}{n!} \langle 1_A \otimes \cdots \otimes 1_A, 1_B \otimes \cdots \otimes 1_B \rangle_{L^2(\mu)^{\odot n}}$$

où Δ_n désigne la "diagonale" des n-uplets de points où au moins deux coordonnées sont égales.

On peut alors en déduire le résultat fondamental suivant :

Théorème 14. [**40**] *$L^2(\mu^*)$ a la structure de l'espace de Fock $F\left(L^2(\mu)\right)$ c'est à dire :*

$$L^2(\mu^*) \simeq F\left(L^2(\mu)\right) := \mathbb{C} \oplus L^2(\mu) \oplus L^2(\mu)^{\odot 2} \oplus \cdots \oplus L^2(\mu)^{\odot n} \oplus \cdots$$

où chaque facteur $L^2(\mu)^{\odot n}$ est équipé du produit scalaire renormalisé $n! \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mu)^{\odot n}}$. A travers cet isomorphisme, $L^2(\mu)^{\odot n}$ vu dans $L^2(\mu^*)$ et noté alors H^n, est appelé chaos d'ordre *n.*

2.3.1. Opérateurs exponentiels et vecteurs exponentiels.

Soit toujours $(X, \mathcal{A}, \mu)$ notre espace de Lebesgue. Des vecteurs se distinguent sur l'espace de Fock $F\left(L^2(\mu)\right)$, les vecteurs dits *exponentiels* (ou *cohérents* dans certains textes) :

$$\mathcal{E}_f := 1 + f + \frac{1}{2} f \otimes f + \cdots + \frac{1}{n!} f^{\otimes n} + \ldots$$

pour $f \in L^2(\mu)$.

Ces vecteurs forment une partie totale dans $F\left(L^2(\mu)\right)$ et on a la formule exponentielle extrêmement utile en pratique

$$\langle \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_g \rangle_{F(L^2(\mu))} = \exp \langle f, g \rangle_{L^2(\mu)}.$$

Vus dans $L^2(\mu^*) \simeq F\left(L^2(\mu)\right)$, on peut en donner une forme explicite pour f une fonction simple (combinaison linéaire d'indicatrices d'ensembles de μ-mesure finie) :

$$\mathcal{E}_f(\nu) := \exp\left(-\int_X f d\mu\right) \prod_{x\in\nu} (1+f(x)). \tag{2.3.1}$$

Soient $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ deux espaces de Lebesgue. Dès que Φ est un opérateur entre $L^2(\mu_1)$ et $L^2(\mu_2)$ de norme au plus 1, on obtient un opérateur de norme au plus 1 entre $F\left(L^2(\mu_1)\right)$ et $F\left(L^2(\mu_2)\right)$ en posant, sur $L^2(\mu_1)^{\odot n}$:

$$\widetilde{\Phi}(f\otimes\cdots\otimes f) = \Phi f\otimes\cdots\otimes\Phi f.$$

On appelle $\widetilde{\Phi}$ l'*exponentielle* de Φ et on a en particulier

$$\widetilde{\Phi}\mathcal{E}_f = \mathcal{E}_{\Phi f}.$$

Exemple 15. Soit $\pi_{\mathcal{C}}$ l'espérance conditionnelle relativement à une sous-tribu σ-finie $\mathcal{C}\subset\mathcal{A}$ de la base. On vérifie alors que $\widetilde{\pi_{\mathcal{C}}} = \pi_{\mathcal{C}^*}$ où $\pi_{\mathcal{C}^*}$ est l'espérance conditionnelle relativement à la sous-tribu Poissonnienne $\mathcal{C}^*$ pour l'espace de Poisson.

En effet, en prenant des vecteurs exponentiels, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathcal{E}_f\mathcal{E}_g] &= \exp\langle f,g\rangle_{L^2(\mu)}\\ &= \exp\langle f,\pi_{\mathcal{C}}g\rangle_{L^2(\mu)}\\ &= \mathbb{E}[\mathcal{E}_f\mathcal{E}_{\pi_{\mathcal{C}}g}]\\ &= \mathbb{E}[\mathcal{E}_f\widetilde{\pi_{\mathcal{C}}}\mathcal{E}_g]\end{aligned}$$

et on vérifie aisément que $\widetilde{\pi_{\mathcal{C}}}\mathcal{E}_g = \mathcal{E}_{\pi_{\mathcal{C}}g}$ est $\mathcal{C}^*$-mesurable en approximant $\pi_{\mathcal{C}}g$ par des fonctions simples $\mathcal{C}$-mesurables et en revenant à la formule 2.3.1 où la mesurabilité par rapport à $\mathcal{C}^*$ est alors évidente. Le caractère total des vecteurs exponentiels dans $L^2(\mu^*)$ permet alors de conclure que $\widetilde{\pi_{\mathcal{C}}} = \pi_{\mathcal{C}^*}$.

2.3.2. Couplages Poissonniens. Les couplages représentent un outil remarquable des probabilités, ils trouvent leur place dans bien des preuves de résultats fondamentaux. En Théorie ergodique, leur rôle est non moins important, puisque ils sont non seulement toujours cet outil probabiliste majeur mais ils ont aussi une place structurelle fondamentale dans la classification des systèmes dynamiques.

Une famille remarquable de couplages est associée aux espaces de Poisson. Nous les présentons avant de faire intervenir toute invariance par une transformation dans le but de mettre en lumière leur caractère entièrement probabiliste.

Rappelons qu'un couplage entre deux espaces de probabilité $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$ est l'espace produit $(\Omega_1\times\Omega_2, \mathcal{F}_1\otimes\mathcal{F}_2)$ muni d'une mesure de probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ dont les marginales sont respectivement $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$. En général, les couplages sont souvent présentés avec des variables aléatoires de lois données, le couplage représentant une manière de les "faire vivre" au sein d'un même espace de probabilité avec une loi jointe particulière.

Quand on se donne deux espaces de Poisson $(X_1^*, \mathcal{A}_1^*, \mu_1^*)$ et $(X_2^*, \mathcal{A}_2^*, \mu_2^*)$, parmi tous les couplages possibles, certains sont remarquables par le fait qu'ils conservent le caractère infiniment divisible des objets d'origine, nous les avons appelés *Couplages Poissonniens* (voir plus bas la définition alternative des même couplages obtenus parallèlement dans [**8**]). Nous pouvons les décrire entièrement :

Considérons l'espace produit $(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ muni d'une mesure m dont les projections m_1 et m_2 sur X_1 et X_2 respectivement vérifient

$$m_1 \leq \mu_1 \text{ et } m_2 \leq \mu_2.$$

$(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, m)$ est appelé *sous-couplage* entre $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$.

Formons alors l'espace de Poisson $\left((X_1 \times X_2)^*, (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)^*, m^*\right)$. Nous avons une application $\varphi : (X_1 \times X_2)^* \to X_1^* \times X_2^*$ donnée par

$$\varphi(\nu) \mapsto (\nu_1, \nu_2).$$

où ν_1 et ν_2 sont les marginales de ν sur X_1 et X_2 respectivement. Ainsi on forme l'espace de probabilité

$$(X_1^* \times X_2^*, \mathcal{A}_1^* \otimes \mathcal{A}_2^*, \varphi_* m^*)$$

qui n'est autre qu'un couplage entre $(X_1^*, \mathcal{A}_1^*, m_1^*)$ et $(X_2^*, \mathcal{A}_2^*, m_2^*)$ obtenu à partir de l'espace de Poisson $\left((X_1 \times X_2)^*, (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)^*, m^*\right)$ en projetant chaque réalisation sur chaque "côté" X_1 et X_2.

L'opération n'est pas terminée puisque, à moins que $m_1 = \mu_1$ et $m_2 = \mu_2$, nous n'avons pas obtenu un couplage entre $(X_1^*, \mathcal{A}_1^*, \mu_1^*)$ et $(X_2^*, \mathcal{A}_2^*, \mu_2^*)$. Nous devons donc maintenant "corriger" les intensités sur chaque facteur. Pour ce faire, considérons les espaces de Poisson $\left(X_1^*, \mathcal{A}_1^*, (\mu_1 - m_1)^*\right)$ et $\left(X_2^*, \mathcal{A}_2^*, (\mu_2 - m_2)^*\right)$ et formons l'espace produit

$$\left(X_1^* \times (X_1^* \times X_2^*) \times X_2^*, \mathcal{A}_1^* \otimes (\mathcal{A}_1^* \otimes \mathcal{A}_2^*) \otimes \mathcal{A}_2^*, (\mu_1 - m_1)^* \otimes \varphi_* m \otimes (\mu_2 - m_2)^*\right)$$

et introduisons enfin l'application $\Psi : X_1^* \times (X_1^* \times X_2^*) \times X_2^* \to X_1^* \times X_2^*$ définie par

$$\Psi(\sigma_1, (\nu_1, \nu_2), \sigma_2) = (\sigma_1 + \nu_1, \sigma_2 + \nu_2).$$

On obtient alors, en notant $\widetilde{m} := \Psi_* (\mu_1 - m_1)^* \otimes \varphi_* m \otimes (\mu_2 - m_2)^*$, un couplage entre $(X_1^*, \mathcal{A}_1^*, \mu_1^*)$ et $(X_2^*, \mathcal{A}_2^*, \mu_2^*)$

$$(X_1^* \times X_2^*, \mathcal{A}_1^* \otimes \mathcal{A}_2^*, \widetilde{m}).$$

La dernière opération ayant consisté à "rajouter", de manière indépendante de chaque côté, des espaces de Poisson de sorte à retrouver les intensités d'origine.

On se rend facilement compte que le couplage obtenu reste infiniment divisible et, en appliquant les résultats généraux sur les mesures aléatoires infiniment divisibles (voir par exemple [**3**]), on voit que tous les couplages infiniment divisibles sont obtenus de cette façon.

Ainsi, il y a une correspondance bi-univoque entre les couplages Poissonniens entre $(X_1^*, \mathcal{A}_1^*, m_1^*)$ et $(X_2^*, \mathcal{A}_2^*, m_2^*)$ et les sous-couplages entre $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$.

2.3.3. Couplages Poissonniens et opérateurs de Markov. A un couplage de loi ρ entre $(X_1^*, \mathcal{A}_1^*, \mu_1^*)$ et $(X_2^*, \mathcal{A}_2^*, \mu_2^*)$ correspond un opérateur Markovien Θ entre $L^2(\mu_1^*)$ et $L^2(\mu_2^*)$ lié par

$$\rho(A \times B) = \int_B \Theta 1_A d\mu_2^*.$$

De même pour un sous-couplage de mesure m entre $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ correspond un opérateur sous-Markovien θ (i.e. $0 \leq \theta f \leq 1$ et $0 \leq \theta^* f \leq 1$ dès que

$0 \leq f \leq 1$) entre $L^2(\mu_1)$ et $L^2(\mu_2)$ lié par

$$m(C \times D) = \int_D \theta 1_C d\mu_2.$$

Sans surprise, si le couplage de loi ρ des espaces de Poisson est Poissonnien, basé sur le sous-couplage de mesure m, alors Θ n'est autre que l'opérateur exponentiel $\widetilde{\theta}$. C'est d'ailleurs ainsi que les auteurs de [**8**] ont défini les couplages Poissonnien, à savoir les couplages dont l'opérateur de Markov associé est l'opérateur exponentiel $\widetilde{\theta}$ pour un certain opérateur sous-Markovien θ. Ils ont ensuite pu décortiquer la structure probabiliste exactement comme dans la section précédente.

Ainsi, nous avons deux approches des mêmes objets, une approche L^2 et une approche probabiliste via l'infinie divisibilité. Ces deux points de vue seront tous deux abondamment mis à profit par la suite.

Notons que l'infinie divisibilité offre un avantage majeur sur les opérateurs de Markov, celui de pouvoir étendre immédiatement la définition à des couplages de plus de deux facteurs.

2.3.4. Exemples importants de couplages Poissonniens.

— Le couplage indépendant des espaces de Poisson est obtenu en prenant pour m la mesure nulle sur $(X_1 \times X_2)$.

— Si Γ est une application entre deux espaces mesurables σ-finis $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ qui préserve la mesure, alors le couplage entre $(X_1^*, \mathcal{A}_1^*, \mu_1^*)$ et $(X_2^*, \mathcal{A}_2^*, \mu_2^*)$ porté par le graphe de l'application Poissonnienne Γ^* est formé à partir du couplage des bases $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ porté par Γ.

— Si $\mathcal{C}$ est une sous-tribu σ-finie de $\mathcal{A}$. Alors le couplage relativement indépendant de l'espace de Poisson $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ au dessus de la tribu Poisonnienne $\mathcal{C}^*$ est formé à partir du couplage relativement indépendant de la base $(X, \mathcal{A}, \mu)$ au dessus de la tribu $\mathcal{C}$:

$$\mu^* \otimes_{\mathcal{C}^*} \mu^* = \widetilde{\mu \otimes_{\mathcal{C}} \mu}$$

Pour s'en convaincre il suffit de se rappeler que $\widetilde{\pi_{\mathcal{C}}} = \pi_{\mathcal{C}^*}$ et que l'espérance conditionnelle est bien l'opérateur de Markov associé au couplage relativement indépendant au dessus de la tribu correspondante.

2.3.5. Quelques résultats de structure sur les opérateurs de Markov de $L^2(\mu^*)$. On vient de voir que si θ est un opérateur sous-Markovien de $L^2(\mu)$ alors l'opérateur exponentiel $\widetilde{\theta}$ sur $L^2(\mu^*)$ est un opérateur Markovien. On peut se poser la question inverse en partant d'un opérateur Markovien Φ sur $L^2(\mu^*)$ qui préserve le premier chaos et se demander quelles bonnes propriétés possède l'opérateur induit par Φ sur $L^2(\mu)$.

Ce résultat a été énoncé dans [**33**] dans un cadre dynamique où la préservation du premier chaos est assurée moyennant des hypothèses spectrales classiques. Le contenu est avant tout probabiliste.

THÉORÈME 16. [**26**] *Soit* $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ *Un espace de Poisson et* Φ *un opérateur de Markov* $L^2(\mu^*)$. *Si* Φ *et son adjoint* Φ^* *préservent* H^1, *alors* Φ *et* Φ^* *induisent sur* $L^2(\mu)$ *des opérateurs sous-Markoviens* φ *et* φ^*.

Démonstration. Bien sûr, l'identification $H^1 \simeq L^2(\mu)$ entraîne l'existence d'opérateurs φ et φ^*. Φ et φ sont reliés par la formule, pour f et g dans $L^2(\mu)$,

$$\langle \Phi I(f), I(g)\rangle_{L^2(\mu^*)} = \langle \varphi f, g\rangle_{L^2(\mu)} = \langle I(\varphi f), I(g)\rangle_{L^2(\mu^*)}$$

Le reste de la preuve est basée sur la propriété suivante des variables infiniment divisibles (voir [**37**]) :

Une variable aléatoire réelle infiniment divisible Z de mesure de Lévy ρ est positive et intégrable si et seulement si elle est de la forme $a+Y$ où a est un réel positif et ρ vérifie $\rho(\mathbb{R}_-)=0$ avec $\mathbb{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}_+} u\rho(du) < \infty$.

Considérons f une fonction positive dans $L^1(\mu)\cap L^2(\mu)$, on a alors la représentation $I(f) = \int_X f dN - \int_X f d\mu$ dans le sens où l'intégrale stochastique $\int_X f dN$ est bien définie μ^*-presque sûrement. En particulier, $\Phi\left(I(f) + \int_X f d\mu\right) = I(\varphi(f)) + \int_X f d\mu$ est une variable positive, intégrable et dans $\mathbb{C}\oplus H^1$, donc infiniment divisible. D'après ce qu'on a rappelé plus haut, sa mesure de Lévy ν est portée par la demi-droite positive et vérifie $\int_{\mathbb{R}_+} x\nu(dx) < \infty$. Mais cette mesure ν n'est autre que la mesure image de μ par $\varphi(f)$ où on a supprimé l'éventuel atome en 0, ainsi $\mu(\varphi(f)<0) = \nu(]-\infty,0[) = 0$ ce qui signifie que $\varphi(f)$ est positive. De plus $\int_X \varphi(f)\,d\mu = \int_{\mathbb{R}_+} x\nu(dx)$, donc $\varphi(f)\in L^1(\mu)$.

Remarquons maintenant que l'on a

$$\int_X \varphi(f)\,dN + \int_X f d\mu - \int_X \varphi(f)\,d\mu = \Phi\left(\int_X f dN\right) \geq 0.$$

Ainsi, toujours d'après le rappel, et comme $\mathbb{E}\left[\int_X \varphi(f)\,dN\right] = \int_X \varphi(f)\,d\mu$, on en déduit que $\int_X \varphi(f)\,d\mu \leq \int_X f d\mu$.

On a des conclusions identiques pour Φ^* et φ^* et on a évidemment que φ^* est bien l'adjoint de φ.

Finalement, pour tout f dans $L^1(\mu)\cap L^2(\mu)$, on a $\int_X \varphi(f)\,d\mu \leq \int_X f d\mu$ et $\int_X \varphi^*(f)\,d\mu \leq \int_X f d\mu$, ceci suffit pour conclure que φ est un opérateur sous-Markovien. □

Insistons sur le fait que le résultat ne permet pas en général d'affirmer que Φ est l'opérateur exponentiel $\widetilde{\varphi}$ construit à partir de φ.

Le deuxième résultat porte sur le cas particulier des espérances conditionnelles et requiert des outils particuliers plus familiers des physiciens, les opérateurs dits *différentiels*.

2.3.5.1. *Opérateurs différentiels.*

Définition 17. Soit F une fonction mesurable définie sur $(X^*, \mathcal{A}^*)$ et soit $y\in X$, l'opérateur *différentiel* D_y^1 agit sur les fonctions mesurables de $(X^*,\mathcal{A}^*)$ par

$$D_y^1 F(\nu) := F(\nu+\delta_y) - F(\nu)$$

et par induction, on définit $D^n_{y_1,\ldots,y_n}$ par

$$D^n_{y_1,\ldots,y_n} F(\nu) := D^{n-1}_{y_2,\ldots,y_n}\left(D^1_{y_1}F(\nu)\right)$$

Ainsi, faire agir D_y^1 consiste à évaluer la différence des valeurs d'une fonction avant et après avoir ajouté une particule en y. Observons aussi que $D^n_{y_1,\ldots,y_n}$ est symétrique en les variables $y_1,\ldots,y_n$. Ces opérateurs sont intimement liés à la formule dite "de Mecke" :

$$\int_{X^*}\int_X h(\nu,x)\,\nu(dx)\,\mu^*(d\nu) = \int_{X^*}\int_X h(\nu+\delta_x,x)\,\mu(dx)\,\mu^*(d\nu) \tag{2.3.2}$$

valable pour toute fonction positive mesurable définie sur $X^* \times X$. On a comme première conséquence heureuse de cette formule, le lemme suivant, qui n'est autre qu'une extension immédiate du lemme 2.4 dans [**19**] :

LEMME 18. [**26**]*(**) Si F et G sont deux fonctions mesurables définies sur $(X^*, \mathcal{A}^*)$ qui coïncident μ^*-presque partout, alors, pour tout $n \geq 1$,*

$$D^n_{y_1,\dots,y_n} F(\nu) = D^n_{y_1,\dots,y_n} G(\nu),$$

pour $\mu^* \otimes \mu^{\otimes n}$-presque tous $(\nu, y_1, \dots, y_n) \in X^* \times X^n$.

On peut à présent faire la liste des bonnes propriétés de ces opérateurs (voir là encore [**19**]), pour $F \in L^2(\mu^*)$:

— Pour $\mu^{\otimes n}$-presque tous $(y_1, \dots, y_n) \in X^n$, $D^n_{y_1,\dots,y_n} F$ est μ^*-intégrable.
— $(y_1, \dots, y_n) \mapsto \mathbb{E}\left[D^n_{y_1,\dots,y_n} F\right]$ est dans $L^2_{\text{sym}}(\mu^{\otimes n})$.
— En posant $P_0 F = \mathbb{E}[F]$ et $P_n F(y_1, \dots, y_n) := \mathbb{E}\left[D^n_{y_1,\dots,y_n} F\right]$, alors F se décompose sur les chaos en

$$F \simeq P_0 F + \cdots + P_n F + \dots$$

En particulier, on a l'identité, pour $f \in L^2_{\text{sym}}(\mu^{\otimes n})$:

$$P_n \left[\frac{1}{n!} I_n(f)\right] = f,\ \mu^{\otimes n} - \text{presque partout.}$$

La propriété qui suit est ce qui a motivé l'usage de ces opérateurs :

LEMME 19. [**26**]*(**) Si $F \in H^n$ pour $n \geq 1$, alors pour μ-presque tout $y \in X$, $D^1_y F \in H^{n-1}$.*

DÉMONSTRATION. Le fait que $D^1_y F \in L^2(\mu^*)$ pour μ-presque tout $y \in X$ est une conséquence relativement facile des diverses formules établies dans [**19**], il vient ensuite, pour $k \neq n-1$,

$$\begin{aligned} P_k\left(D^1_y F\right)(y_1, \dots, y_k) &= \mathbb{E}\left[D^k_{y_1,\dots,y_k}\left(D^1_y F\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[D^{k+1}_{y_1,\dots,y_k,y} F\right] \\ &= P_{k+1} F(y_1, \dots, y_k, y) \end{aligned}$$

Mais comme F est dans H^n, $P_{k+1} F = 0$ $\mu^{\otimes k+1}$-presque partout et on en déduit donc que pour μ-presque tout $y \in X$, $P_k\left(D^1_y F\right)$ est nul $\mu^{\otimes k}$-presque partout, ce qui termine la preuve. □

On est maintenant en mesure d'énoncer le résultat "structurel" recherché :

THÉORÈME 20. [**26**] *Soit $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ Un espace de Poisson et $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}^*$ une sous-tribu dont l'espérance conditionnelle Φ préserve les chaos et s'annule sur le premier. Alors Φ s'annule sur tous les chaos d'ordre supérieur ou égal à 2. Dit autrement, $\mathcal{C}$ est la tribu triviale $\{X^*, \mathcal{A}^*\}$ mod. μ^*.*

DÉMONSTRATION. Soit $F \in H^n$, $n \geq 2$, on veut montrer que $\Phi F = 0$. On peut supposer sans perte de généralité que F est réelle.

Comme $\Phi F \in H^n$, on a $P_k(\Phi F) = 0$ pour tout $k \neq n$ donc il suffit de montrer que $P_n(\Phi F) = 0$. Pour ce faire, on montrera d'abord que $D^1_a(\Phi F)(\nu) = 0$ pour $\mu^* \otimes \mu$-presque tout $(\nu, a) \in X^* \times X$, il s'ensuivra alors que $D^n_{y_1,\dots,y_n}(\Phi F)(\nu) = 0$ pour $\mu^* \otimes \mu^{\otimes n}$-presque tout $(\nu, (y_1, \dots, y_n)) \in X^* \times X^n$ et donc $P_n(\Phi F) = 0$ en intégrant, la preuve sera alors complète.

Soit donc $a \in X$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(D_a^1(\Phi F)\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\Phi F(\cdot+\delta_a)-\Phi F\right)^2\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\Phi F(\cdot+\delta_a)^2\right]+\mathbb{E}\left[(\Phi F)^2\right]-2\mathbb{E}\left[\Phi F(\cdot+\delta_a)\cdot\Phi F\right]\end{aligned}$$

et on a

$$\mathbb{E}\left[\Phi F(\cdot+\delta_a)\Phi F\right]=\mathbb{E}\left[D_a^1(\Phi F)\cdot\Phi F\right]+\mathbb{E}\left[(\Phi F)^2\right]$$

Mais comme ΦF est dans H^n, alors $D_a^1(\Phi F)$ est dans H^{n-1} pour μ-presque tout $a \in X$. Ces deux vecteurs sont donc orthogonaux, ainsi

$$\mathbb{E}\left[\Phi F(\cdot+\delta_a)\Phi F\right]=\mathbb{E}\left[(\Phi F)^2\right]$$

d'où

$$\mathbb{E}\left[\left(D_a^1(\Phi F)\right)^2\right]=\mathbb{E}\left[\Phi F(\cdot+\delta_a)^2\right]-\mathbb{E}\left[(\Phi F)^2\right].$$

Appliquons maintenant la formule de Mecke (2.3.2) avec

$$h(\nu,x):=(\Phi F)^2(\nu)\,f(x),$$

où f est une fonction positive de $L^1(\mu)\cap L^2(\mu)$. On a donc :

$$\int_{X^*}\int_X(\Phi F)^2(\nu)\,f(x)\,\nu(dx)\,\mu^*(dx)=\int_{X^*}\int_X(\Phi F)^2(\nu+\delta_x)\,f(x)\,\mu(dx)\,\mu^*(dx)$$

ce que l'on peut réécrire en

$$\mathbb{E}\left[(\Phi F)^2\int_X f(x)\,N(dx)\right]=\int_X\mathbb{E}\left[(\Phi F)^2(\cdot+\delta_x)\right]f(x)\,\mu(dx).$$

Puisque $I(f)=\int_X f(x)\,N(dx)-\int_X f(x)\,\mu(dx)$, on a aussi

$$\mathbb{E}\left[(\Phi F)^2\int_X f(x)\,N(dx)\right]=\mathbb{E}\left[(\Phi F)^2 I(f)\right]+\int_X\mathbb{E}\left[(\Phi F)^2\right]f(x)\,\mu(dx),$$

mais Φ est l'espérance conditionnelle relativement à $\mathcal{C}$ donc, comme ΦF est $\mathcal{C}$-mesurable, il en est de même pour $(\Phi F)^2$, ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(\Phi F)^2 I(f)\right]&=\mathbb{E}\left[\Phi\left[(\Phi F)^2 I(f)\right]\right]\\&=\mathbb{E}\left[(\Phi F)^2\,\Phi(I(f))\right]\\&=0\end{aligned}$$

car Φ s'annule sur le premier chaos.

Donc

$$\mathbb{E}\left[(\Phi F)^2\int_X f(x)\,N(dx)\right]=\int_X\mathbb{E}\left[(\Phi F)^2\right]f(x)\,\mu(dx)$$

et il s'ensuit

$$\int_X\mathbb{E}\left[(\Phi F)^2\right]f(x)\,\mu(dx)=\int_X\mathbb{E}\left[(\Phi F)^2(\cdot+\delta_x)\right]f(x)\,\mu(dx).$$

L'égalité étant vraie pour toute fonction positive f de $L^1(\mu)\cap L^2(\mu)$, on en déduit que, pour μ-presque tout $x\in X$:

$$\mathbb{E}\left[(\Phi F)^2\right]=\mathbb{E}\left[(\Phi F)^2(\cdot+\delta_x)\right].$$

On obtient alors $\mathbb{E}\left[\left(D_a^1(\Phi F)\right)^2\right] = 0$ et donc $D_a^1(\Phi F)(\nu) = 0$ pour $\mu^* \otimes \mu$-presque tout $(\nu, a) \in X^* \times X$. □

Ces deux théorèmes 16 et 20 sont au coeur de l'article [**27**].

2.3.6. Preuve de la Proposition 12. Nous revenons ici sur la Proposition 12. Comme expliqué plus haut, la preuve du premier point était fausse dans l'article [**11**], nous en donnons une preuve correcte, maintenant armés des opérateurs exponentiels. Nous présentons également une preuve du second point plus "conceptuelle" que celle présente dans ce même article, cette fois à l'aide des couplages Poissonniens.

PROPOSITION 21. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de Lebesgue, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux sous-tribus σ-finies de $\mathcal{A}$. On a $(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2)^* = \mathcal{B}_1^* \cap \mathcal{B}_2^*$. Si $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ est σ-finie et non-atomique pour μ, alors $(\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2)^* = \mathcal{B}_1^* \vee \mathcal{B}_2^*$.*

DÉMONSTRATION. La preuve (essentiellement similaire au cas Gaussien (voir [**39**])) s'appuie sur le fait général que si $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ est un espace mesuré σ-fini et si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont deux tribus σ-finies de $\mathcal{C}$, alors l'espérance conditionnelle $\pi_{\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2}$ est la limite faible des opérateurs $(\pi_{\mathcal{C}_1}\pi_{\mathcal{C}_2}\pi_{\mathcal{C}_1})^n$. Rappelons aussi que si $\mathcal{B}$ est une sous-tribu σ-finie de $\mathcal{A}$, alors $\pi_{\mathcal{B}^*} = \widetilde{\pi_{\mathcal{B}}}$.

Ainsi $\pi_{\mathcal{B}_1^* \cap \mathcal{B}_2^*}$ (resp. $\pi_{\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2}$) est la limite faible des opérateurs $\left(\pi_{\mathcal{B}_1^*}\pi_{\mathcal{B}_2^*}\pi_{\mathcal{B}_1^*}\right)^n$ (resp. $(\pi_{\mathcal{B}_1}\pi_{\mathcal{B}_2}\pi_{\mathcal{B}_1})^n$), mais on a

$$\begin{aligned}\left(\pi_{\mathcal{B}_1^*}\pi_{\mathcal{B}_2^*}\pi_{\mathcal{B}_1^*}\right)^n &= (\widetilde{\pi_{\mathcal{B}_1}}\widetilde{\pi_{\mathcal{B}_2}}\widetilde{\pi_{\mathcal{B}_1}})^n \\ &= (\widetilde{\pi_{\mathcal{B}_1}\pi_{\mathcal{B}_2}\pi_{\mathcal{B}_1}})^n\end{aligned}$$

En passant à la limite, on obtient donc $\pi_{\mathcal{B}_1^* \cap \mathcal{B}_2^*} = \widetilde{\pi_{\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2}} = \pi_{(\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2)^*}$ ce qui implique que $\mathcal{B}_1^* \cap \mathcal{B}_2^* = (\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2)^*$.

Pour le second point, on peut traduire le problème de la manière suivante :

$\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2$ peut être interprété comme un couplage au niveau des bases entre deux systèmes $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$:

$$(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, m)$$

où $\mathcal{B}_1 := \mathcal{A}_1 \otimes \{X_2, \emptyset\}$ et $\mathcal{B}_2 := \{X_1, \emptyset\} \otimes \mathcal{A}_2$. l'espace de Poisson $\left((X_1 \times X_2)^*, (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)^*, m^*\right)$ donne alors naissance au couplage Poissonnien $(X_1^* \times X_2^*, \mathcal{A}_1^* \otimes \mathcal{A}_2^*, \widetilde{m})$ grâce à l'application vue plus haut $\varphi : (X_1 \times X_2)^* \to X_1^* \times X_2^*$

$$\varphi(\nu) \mapsto (\nu_1, \nu_2)$$

où ν_1 (resp ν_2) est la mesure image de la projection de ν sur X_1 (resp. X_2).

Dans cette construction, on a alors $\mathcal{B}_1^* := \mathcal{A}_1^* \otimes \{X_2^*, \emptyset\}$, $\mathcal{B}_2^* := \{X_1^*, \emptyset\} \otimes \mathcal{A}_2^*$, $(\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2)^* = (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)^*$ et $\mathcal{B}_1^* \vee \mathcal{B}_2^* = \varphi^{-1}(\mathcal{A}_1^* \otimes \mathcal{A}_2^*) = \mathcal{A}_1^* \otimes \{X_2^*, \emptyset\} \vee \{X_1^*, \emptyset\} \otimes \mathcal{A}_2^*$. Autrement dit, il s'agit de savoir si le couplage Poissonnien "remplit" l'espace de Poisson qui lui a donné naissance, ou, pour le dire autrement, si on peut reconstruire l'espace de Poisson sur $X_1 \times X_2$ à partir de ses projections sur les "axes" X_1 et X_2. C'est là où l'hypothèse de σ-finitude de $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ ainsi que l'absence d'atomes (pour la mesure ambiante) jouent un rôle décisif, en effet, cela signifie qu'il existe un espace de Lebesgue $(Y, \mathcal{C}, \rho)$ où ρ est une mesure continue, des applications $\Phi : X_1 \times X_2 \to Y$, $\Phi_1 : X_1 \to Y$ et $\Phi_2 : X_2 \to Y$ telles que, pour tout $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$,

$$\Phi(x_1, x_2) = \Phi_1(x_1) = \Phi_2(x_2) \text{ et } \Phi^{-1}\mathcal{C} = \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2.$$

On a alors un espace de Poisson $(Y^*, \mathcal{C}^*, \rho^*)$ qu'on réalise à partir de $\left((X_1 \times X_2)^*, (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)^*, m^*\right)$ grâce à l'application Φ^*. Si N représente le processus de Poisson d'intensité m, alors, ses projections sur X_1 et X_2 , N_1 et N_2 réalisent le couplage Poissonnien de distribution $\widetilde{m}$ et $\Phi^* N$ est le processus de Poisson d'intensité ρ vérifiant

$$\Phi^* N = \Phi_1^* N_1 = \Phi_2^* N_2.$$

Le problème est donc le suivant, en partant de $\nu \in (X_1 \times X_2)^*$, il s'agit de reconstruire cette mesure à partir de ses projections ν_1 et ν_2, sachant de plus que $\Phi_1^*(\nu_1) = \Phi_2^*(\nu_2)$. Mais il faut remarquer que toutes ces mesures ν, ν_1, ν_2 et $\Phi_1^*(\nu_1)$ sont ponctuelles simples m^*-presque sûrement car les intensités des processus de Poisson sont des mesures diffuses. On reconstruit donc ν de manière déterministe à partir de ν_1 et ν_2 de la manière suivante :

Soient $\nu_1 = \sum_{i \in I} \delta_{x_i}$, $\nu_2 = \sum_{j \in J} \delta_{y_j}$ et $\Phi_1^*(\nu_1) = \sum_{k \in K} \delta_{z_k}$. Pour un point z_k de $\Phi_1^*(\nu_1)$, il existe un unique point x_i de ν_1 et un unique point y_j de ν_2 tel que que $\Phi_1(x_i) = \Phi_2(x_j) = z_k$, on forme alors le point (x_i, y_j) qui vient nécessairement de ν. On épuise alors tous les points de ν en considérant chaque point de ν_1 et ν_2. On a en fait montré que dans cette situation, l'application $\nu \mapsto (\nu_1, \nu_2)$ est inversible. On peut donc conclure que $\mathcal{B}_1^* \vee \mathcal{B}_2^* = (\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2)^*$.

Un dessin suffit à expliquer tout ceci de manière infiniment plus efficace... □

2.3.7. Un dernier résultat sur les tribus Poissonniennes. Nous avons vu plus haut que, partant d'une sous-tribu σ-finie $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ de la base $(X, \mathcal{A}, \mu)$, le couplage Poissonnien correspondant au couplage relativement indépendant de la base par rapport à $\mathcal{B}$ n'est autre que le couplage relativement indépendant par rapport à $\mathcal{C}^*$, autrement dit

$$\mu^* \otimes_{\mathcal{C}^*} \mu^* = \widetilde{\mu \otimes_{\mathcal{C}} \mu}.$$

Il y a une réciproque/généralisation de ce résultat qui nous sera très utile :

Proposition 22. [**26**] *Soit $(X^* \times X^*, \mathcal{A}^* \otimes \mathcal{A}^*, \widetilde{m})$ un auto-couplage Poissonnien formé à partir du sous-couplage $(X \times X, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, m)$. Si ce couplage Poissonnien est également un couplage relativement indépendant au dessus d'une tribu $\mathcal{Y} \subset \mathcal{A}^*$, alors $\mathcal{Y}$ est une tribu Poissonnienne : il existe une sous-tribu $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ (non nécessairement σ-finie) telle que $\mathcal{C}^* = \mathcal{Y}$.*

Démonstration. Soit φ l'opérateur sous-Markovien tel que $\widetilde{\varphi}$ est l'opérateur de Markov associé à l'auto-couplage Poissonnien. $\widetilde{\varphi}$ est aussi une projection orthogonale car c'est l'espérance conditionnelle relativement à $\mathcal{Y}$. Par suite φ est aussi une projection orthogonale sur $L^2(\mu)$ (puisque φ peut être vu comme la restriction de $\widetilde{\varphi}$ au premier chaos).

Remarquons que comme φ est sous Markovien, il peut être étendu aux fonctions mesurables positives par limite croissante, en particulier $\varphi(1_X)$ est bien définie et vérifie $\varphi(1_X) \leq 1$. On a alors, comme φ est une projection orthogonale

$$\int_X \varphi(1_A)\, \varphi(1_B)\, d\mu = \int_X \varphi(1_A)\, 1_B d\mu \leq \int_X 1_A d\mu$$

En passant à la limite quand B grossit vers X,

$$\int_X \varphi(1_A)\, \varphi(1_X)\, d\mu = \int_X \varphi(1_A)\, 1_X d\mu \leq \int_X 1_A d\mu$$

D'où, pour tout $A \in \mathcal{A}_f$:

$$\int_X \varphi(1_A)(1_X - \varphi(1_X))\, d\mu = 0$$

Ce qui signifie $\varphi(1_A)(1_X - \varphi(1_X)) = 0$ μ-presque partout. En passant à la limite croissante quand A grossit vers X, on obtient

$$\varphi(1_X) = \varphi(1_X)^2$$

ce qui implique que $\varphi(1_X)$ est l'indicatrice d'un ensemble $K \in \mathcal{A}$. On conclut alors aisément en considérant l'espace $\left(K, \mathcal{A}_{|K}, \mu_{|K}\right)$ où cette fois φ, restreint à $L^2\left(\mu_{|K}\right)$ n'est plus seulement un opérateur sous-Markovien mais bien Markovien. Comme il est de plus toujours une projection orthogonale, c'est donc l'espérance conditionnelle relativement à une sous-tribu σ-finie $\mathcal{C}_K$ de $\mathcal{A}_{|K}$. On étend ensuite $\mathcal{C}_K$ en une sous-tribu $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ en rajoutant à $\mathcal{C}_K$ les ensembles complétés par K^c. Bien sûr $\mathcal{C}$ n'est σ-finie pour μ que si K^c est de mesure finie.

On a enfin évidemment $\mathcal{Y} = \mathcal{C}^*$. $\square$

Chapitre 3

Suspensions de Poisson

Nous avons vu au paragraphe 2.2.4 que les applications Poissonniennes agissent naturellement entre espaces de Poisson en en préservant la structure, la Théorie ergodique des espaces de Poisson est justement l'étude de ces applications Poissonniennes, cette fois à l'intérieur du même espace.

Ainsi si T est un automorphisme de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ qui préserve la mesure μ, alors T_* est un automorphisme de $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ qui préserve la mesure μ^*.

Définition 23. $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*, T_*)$ est appelé *suspension de Poisson* au dessus de (la *base*) $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$.

Plus généralement si $\{T_g\}_{g\in G}$ représente l'action d'un groupe "raisonnable" sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$ par automorphismes préservant la mesure alors, on a l'action du même groupe sur $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ via les automorphismes $(T_g)_*$.

3.1. Propriétés ergodiques

Rappelons ici les résultats de base de la Théorie ergodique des suspensions de Poisson :

Théorème 24. *([**22**] pour les points 1 et 3 et la thèse [**32**] pour une autre preuve de ces même points et pour le reste)*

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique et $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*, T_*)$ sa suspension de Poisson.

— *$(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*, T_*)$ est ergodique (et faiblement mélangeant) si et seulement si $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ ne possède pas d'ensemble T-invariant de mesure finie non nulle.*
— *$(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*, T_*)$ est rigide pour la suite $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ si et seulement si $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ est rigide pour la même suite $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.*
— *$(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*, T_*)$ est modérément mélangeant ("mildly mixing") si et seulement si $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ n'a pas de facteur rigide (rigidity free).*
— *$(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*, T_*)$ est mélangeant (de tous ordres) si et seulement si $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ est de type zéro.*
— *Si $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ est "remotely infinite" (voir [**18**]), alors $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*, T_*)$ est K.*
— *Si $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ est dissipatif, alors $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*, T_*)$ est Bernoulli.*

La plupart de ces propriétés sont spectrales et se déduisent aisément de la structure d'espace de Fock de $L^2(\mu^*)$, en effet, on a le résultat important suivant :

Proposition 25. *(Voir [**2**] (Chapitre 14) pour le cas Gaussien similaire) Soient U_T et U_{T_*} les opérateurs de Koopman $f \mapsto f\circ T$ et $F \mapsto F\circ T_*$ sur $L^2(\mu)$ et $L^2(\mu^*)$ respectivement. Alors $U_{T_*} = \widetilde{U_T}$. En particulier, si σ est le type spectral maximal* *de U_T sur $L^2(\mu)$ alors σ^{*n} est le type spectral maximal de U_{T_*} sur le chaos d'ordre n et donc $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{n!}\sigma^{*n}$ est le type spectral maximal réduit de U_{T_*}.*

3.2. Ergodicité, une nouvelle preuve

Nous donnons ici une nouvelle preuve de l'ergodicité que nous qualifions de manière évidemment impropre de "non dynamique". Elle repose sur le résultat structurel (Théorème 20) lié aux sous-tribus d'un espace de Poisson. Notons que cette preuve n'utilise pas les propriétés des mesures spectrales liées aux opérateurs de Koopman. Ainsi le résultat peut-être généralisé au-delà des actions de groupes localement compacts.

Théorème 26. *Une suspension de Poisson $(X^*,\mathcal{A}^*,\mu^*,T_*)$ est ergodique si et seulement si $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ ne possède pas d'ensemble T-invariant de mesure finie non nulle.*

Démonstration. Considérons les opérateurs $\Psi := U_{T_*} - Id$ et π l'espérance conditionnelle par rapport à la tribu des invariants de la suspension. On va montrer que π préserve les chaos en s'appuyant sur le fait que Ψ les préserve de manière évidente.

Remarquons que l'on a :

$$\mathrm{Ker}\Psi = \left(H^0\cap \mathrm{Ker}\Psi\right)\oplus\left(H^1\cap \mathrm{Ker}\Psi\right)\oplus\left(H^2\cap \mathrm{Ker}\Psi\right)\oplus\cdots\oplus\left(H^n\cap \mathrm{Ker}\Psi\right)\oplus\cdots$$

En effet, si $F\in\mathrm{Ker}\Psi$ et si $F:=\sum_{k\geq 0}F_k$ est la décomposition selon les chaos H^n, alors, comme Ψ les préserve, on a $0=\Psi F=\sum_{k\geq 0}\Psi F_k$ avec $\Psi F_k\in H^n$. Par unicité de la décomposition selon les chaos, on a bien $\Psi F_k = 0$ c'est à dire $F_k\in\mathrm{Ker}\Psi$, pour tout $k\geq 0$. Notons maintenant que $\mathrm{Im}(\pi)=\mathrm{Ker}\Psi$, ainsi

$$\mathrm{Im}(\pi) = \left(H^0\cap \mathrm{Im}(\pi)\right)\oplus\left(H^1\cap \mathrm{Im}(\pi)\right)\oplus\left(H^2\cap \mathrm{Im}(\pi)\right)\oplus\cdots\oplus\left(H^n\cap \mathrm{Im}(\pi)\right)\oplus\cdots$$

Les chaos étant orthogonaux entre eux, on en déduit, par unicité du supplémentaire orthogonal

$$\mathrm{Ker}(\pi) = \left(H^0\cap \mathrm{Ker}(\pi)\right)\oplus\left(H^1\cap \mathrm{Ker}(\pi)\right)\oplus\left(H^2\cap \mathrm{Ker}(\pi)\right)\oplus\cdots\oplus\left(H^n\cap \mathrm{Ker}(\pi)\right)\oplus\cdots$$

ce qui signifie bien que π préserve les chaos.

Enfin, si $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ ne possède pas d'ensemble T-invariant de mesure finie non nulle, alors π s'annule sur le premier chaos et on peut alors appliquer le Théorème 20 pour conclure que la tribu invariante de la suspension est triviale, cette dernière est donc ergodique.

Réciproquement, si A est un ensemble T-invariant de mesure finie non nulle, alors $N(A)$ est une fonction T_*-invariante qui suit la loi de Poisson de paramètre $0<\mu(A)<\infty$, en particulier elle n'est pas constante, ce qui empêche l'ergodicité. □

Corollaire 27. *Une suspension de Poisson $(X^*,\mathcal{A}^*,\mu^*,T_*)$ ergodique est faiblement mélangeante.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que le système produit $(X^*\times X^*,\mathcal{A}^*\otimes\mathcal{A}^*,\mu^*\otimes\mu^*,T_*\times T_*)$ est isomorphe à la suspension $\left((X\times\{0,1\})^*,(\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{P}\{0,1\})^*,\left(\mu\otimes\left(\frac{1}{2}\delta_0+\frac{1}{2}\delta_1\right)\right)^*,(T\times Id)_*\right)$ et que s'il n'y pas d'ensemble invariant de mesure finie non nulle pour $(X,\mathcal{A},\mu,T)$, il n'y en a pas non plus pour $\left(X\times\{0,1\},\mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{P}\{0,1\},\mu\otimes\left(\frac{1}{2}\delta_0+\frac{1}{2}\delta_1\right),T\times Id\right)$. On applique donc le Théorème 26 pour conclure que si $(X^*,\mathcal{A}^*,\mu^*,T_*)$ est ergodique, alors $(X^* \times X^*, \mathcal{A}^* \otimes \mathcal{A}^*, \mu^* \otimes \mu^*, T_* \times T_*)$ aussi, ce qui entraîne bien le mélange faible. $\square$

3.3. Facteurs et couplages

Nous avons présenté les sous-tribus et les couplages Poissonniens au chapitre précédent pour mettre l'accent sur leur caractère entièrement probabiliste. Maintenant que nous avons introduit les transformations T et T_*, les notions de facteurs Poissonniens et couplages Poissonniens s'obtiennent immédiatement en rajoutant l'invariance :

Définition 28. Un facteur Poissonnien de $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*, T_*)$ est une sous-tribu Poissonnienne invariante par T_*. Un couplage (dynamique) Poissonnien entre les suspensions $(X_1^*, \mathcal{A}_1^*, \mu_1^*, T_{1*})$ et $(X_2^*, \mathcal{A}_2^*, \mu_2^*, T_{2*})$ est un couplage (probabiliste) Poissonnien invariant par $T_{1*} \times T_{2*}$.

Remarque 29. Les couplages Poissonniens ont été introduits dans [**32**] en se concentrant sur l'aspect infiniment divisible et parallèlement dans [**8**] avec un point de vue centré sur les opérateurs de Markov préservant les chaos.

Il nous paraît important de rappeler une première conséquence dynamique des couplages Poissonniens.

Proposition 30. [**32**],[**8**] *Un couplage Poissonnien entre deux suspensions ergodiques* $(X_1^*, \mathcal{A}_1^*, \mu_1^*, T_{1*})$ *et* $(X_2^*, \mathcal{A}_2^*, \mu_2^*, T_{2*})$ *est encore ergodique.*

Chapitre 4

Entropie

Ce chapitre détaille les résultats obtenus dans [**11**] et dans [**34**]. Il est basé sur la remarque suivante, faite à la fin de la thèse [**32**] :

L'entropie de Kolmogorov $h(T_*)$ d'une suspension $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*, T_*)$ définit un invariant pour la base $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$. Nous l'avons naturellement appelée l'*entropie de Poisson* $h_{\mathcal{P}}(T)$:

$$h_{\mathcal{P}}(T) := h(T_*)$$

C'est là un exemple où les suspensions de Poisson peuvent servir d'outils pour étudier la Théorie ergodique en mesure infinie.

4.1. Propriétés élémentaires

Il était d'abord important de vérifier que cette "entropie" avait bien les propriétés élémentaires attendues, notamment :

Proposition 31. [**32**] *Si $\mu(X) = 1$, alors $h_{\mathcal{P}}(T) := h(T)$ (l'entropie de Poisson est bien une généralisation de l'entropie de Kolmogorov).*

Si S est un facteur de T alors $h_{\mathcal{P}}(S) \leq h_{\mathcal{P}}(T)$.

En particulier, l'entropie de Poisson est un invariant.

Evidemment, cette nouvelle définition de l'entropie était à comparer aux deux définitions existantes en mesure infinie, l'entropie de Krengel et l'entropie de Parry :

Définition 32. Entropie de Krengel ([**17**]) :

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique conservatif. On définit l'entropie de Krengel de T par

$$h_K(T) := \sup\left\{h(T_A)\,\mu(A), 0 < \mu(A) < \infty\right\}$$

où $h(T_A)$ est l'entropie de Kolmogorov du système induit sur A relativement à la mesure conditionnelle $\mu(\cdot \mid A)$.

L'entropie de Parry étant définie via la notion d'entropie conditionnelle, il nous faut introduire cette notion en mesure infinie avec prudence :

On introduit d'abord la fonction d'information (voir [**16**] et [**28**]) d'une partition quelconque de $(X, \mathcal{A})$ par rapport à une mesure μ :

$$I_\mu(\alpha)(x) := \begin{cases} -\log\mu(\alpha(x)) & \text{si } 0 < \mu(\alpha(x)) < +\infty \\ +\infty & \text{si } \mu(\alpha(x)) = 0 \\ 0 & \text{si } \mu(\alpha(x)) = +\infty \end{cases}$$

où $\alpha(x)$ désigne l'unique atome de α auquel appartient x.

Ainsi, on définit l'entropie $H_\mu(\alpha)$ d'une partition α par

$$H_\mu(\alpha) := \int_X I_\mu(\alpha)(x)\,\mu(dx)$$

dès que cette intégrale est bien définie (il suffit par exemple que la mesure des atomes de mesure finie soit bornée).

Et on définit aussi la fonction d'information conditionnelle d'une partition α par rapport à une partition β :

$$I_\mu(\alpha \mid \beta)(x) := \begin{cases} I_{\mu(\cdot\mid\beta(x))}(\alpha)(x) & \text{si } \mu(\beta(x)) < +\infty \\ I_\mu(\alpha \vee \{\beta(x), X \setminus \beta(x)\})(x) & \text{si } \mu(\beta(x)) = +\infty \end{cases}.$$

De même, l'entropie conditionnelle de α sachant β est définie par $H_\mu(\alpha \mid \beta) := \int_X I_\mu(\alpha \mid \beta)(x)\,\mu(dx)$ dès que l'intégrale a un sens.

Dans la suite, on utilisera ces notions non plus seulement avec des partitions mais également avec des tribus puisqu'à ces dernières sont associées de manière essentiellement uniques (au sens de Rokhlin), des partitions.

Nous sommes maintenant en mesure d'introduire l'entropie au sens de Parry :

Définition 33. Entropie de Parry ([**28**])

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique conservatif. L'entropie de Parry est définie par

$$h_{Pa}(T) := \sup_{\mathcal{B}\subset\mathcal{T}} \left\{ H_\mu\left(\mathcal{B} \mid T^{-1}\mathcal{B}\right) \right\}$$

où $\mathcal{T}$ est l'ensemble des tribus σ-finies $\mathcal{B}$ telles que $T^{-1}\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$.

Une grande partie des difficultés liées à la mesure infinie vient de l'existence de sous-tribus non σ-finies. Pour contourner ces difficultés inhérentes à la mesure infinie, il convient, comme la définition de Parry le suggère, d'étudier l'entropie relative plutôt qu'absolue. Ceci permet de se ramener, dans une certaine mesure, via les mesures conditionnelles, au cas fini.

Il apparaît alors que les entropies conditionnelles de la suspension et de sa base se comportent *bien*. On a en effet :

Proposition 34. [**11**] *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique conservatif et μ une mesure infinie. Pour toute tribu σ-finie $\mathcal{B}$ sans atome telle que $T^{-1}\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$, on a :*

$$H_\mu\left(\mathcal{B} \mid T^{-1}\mathcal{B}\right) = H_{\mu^*}\left(\mathcal{B}^* \mid T_*^{-1}\mathcal{B}^*\right)$$

Démonstration. C'est une conséquence de la formule plus générale

$$H_\mu(\mathcal{C} \mid \mathcal{D}) = H_{\mu^*}(\mathcal{C}^* \mid \mathcal{D}^*)$$

dès que $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ sont deux sous-tribus σ-finies sans atome qui se démontre grâce à la structure de processus de Poisson marqué décrite dans la section 2.2.7.

En effet, on peut supposer, quitte à passer au facteur Poissonnien dans la suspension, que $\mathcal{C} = \mathcal{A}$ que $\mathcal{C}$ est la tribu ambiante $\mathcal{A}$, puis tirer profit des identifications

$$(X, \mathcal{A}, \mu) \simeq (\mathbb{R} \times K, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{K}, \rho)$$

où dans cette identification, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ correspond à $\mathcal{D}$ et ρ se désintègre en

$$\rho = \int_{\mathbb{R}} m_t(\cdot)\,\lambda(dt)$$

Et pour l'espace de Poisson :

$$(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*) \simeq \left(\mathbb{R}^* \times K^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^* \otimes \mathcal{K}^{\otimes \mathbb{Z}}, \widetilde{\rho}\right)$$

où $\mathcal{B}(\mathbb{R})^*$ correspond à $\mathcal{D}^*$ et $\widetilde{\rho}$ se désintègre en

$$\widetilde{\rho} = \int_{\mathbb{R}^*} p_\gamma(\cdot)\,\lambda^*(d\gamma)$$

Ainsi $H_\mu(\mathcal{A} \mid \mathcal{D}) = \int_{\mathbb{R}} H_{m_t}(K)\,\lambda(dt)$ et $H_{\mu^*}(\mathcal{A}^* \mid \mathcal{D}^*) = \int_{\mathbb{R}^*} H_{p_\gamma}\left(K^{\mathbb{Z}}\right)\lambda^*(d\gamma)$. Mais comme p_γ est égal à $\bigotimes_{i\in\mathbb{Z}} m_{t_i(\gamma)}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^*} H_{p_\gamma}\left(K^{\mathbb{Z}}\right)\lambda^*(d\gamma) &= \int_{\mathbb{R}^*} \sum_{i\in\mathbb{Z}} H_{m_{t_i(\gamma)}}(K)\,\lambda^*(d\gamma) \\
&= \int_{\mathbb{R}^*}\int_{\mathbb{R}} H_{m_t}(K)\,\gamma(dt)\,\lambda^*(d\gamma) \\
&= \int_{\mathbb{R}} H_{m_t}(K)\,\lambda(dt) \\
&= H_\mu(\mathcal{A} \mid \mathcal{D})
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'identité de base du calcul Poissonnien :

$$\int_{\mathbb{R}^*}\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\gamma(dt)\,\lambda^*(d\gamma) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\lambda(dt)$$

valable pour toute fonction positive f. □

Ainsi on a immédiatement une première inégalité :

COROLLAIRE 35. [**11**] *Pour tout système dynamique conservatif* $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$, *on a*

$$h_{Pa}(T) \leq h_{\mathcal{P}}(T)$$

Rappelons également qu'on a la même inégalité avec l'entropie de Krengel $h_{Pa}(T) \leq h_K(T)$ (voir [**28**]).

La proposition suivante fait partie des résultats attendus pour une notion d'entropie, vraie également pour les entropies de Krengel et de Parry.

PROPOSITION 36. [**11**] *L'entropie de Poisson est linéaire :*

$$h_{\mathcal{P}}(X, \mathcal{A}, \alpha\mu, T) = \alpha h_{\mathcal{P}}(X, \mathcal{A}, \mu, T)$$

DÉMONSTRATION. La preuve utilise de manière décisive la propriété du Théorème 9, à savoir $(\alpha\mu)^* * (\beta\mu)^* = ((\alpha+\beta)\mu)^*$ qui est une première étape pour montrer que $h_{\mathcal{P}}(X, \mathcal{A}, (\alpha+\beta)\mu, T) = h_{\mathcal{P}}(X, \mathcal{A}, \alpha\mu, T) + h_{\mathcal{P}}(X, \mathcal{A}, \beta\mu, T)$. Il reste toutefois à vérifier que l'extension

$$\left(X^*, \mathcal{A}^*, ((\alpha+\beta)\mu)^*, T_*\right) \leftarrow \left(X^* \times X^*, \mathcal{A}^* \otimes \mathcal{A}^*, (\alpha\mu)^* \otimes (\beta\mu)^*, T_* \times T_*\right)$$

est d'entropie nulle, ce qui est une conséquence des résultats de Meyerovitch sur les quasi-facteurs (voir [**24**]). □

En particulier, on observe immédiatement que pour les systèmes dits *squashable*, c'est à dire les systèmes $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ isomorphes à $(X, \mathcal{A}, \alpha\mu, T)$ pour tout $\alpha > 0$, alors l'entropie de Poisson est nulle ou infinie. Ce résultat est directement lié à la conjecture suivante :

Conjecture 37. *Un processus stationnaire α-stable est d'entropie nulle ou infinie.*

En effet, on a montré dans [**35**], que le système associé à la mesure de Lévy d'un processus α-stable est toujours *squashable* (car c'est une transformation de Maharam). De plus, la représentation de Maruyama de tout processus α-stable comme facteur de la suspension de Poisson ayant pour base la mesure de Lévy du processus donne du poids à cette conjecture, dont l'origine est l'analogue Gaussien (c'est à dire quand $\alpha = 2$, [**4**]).

4.2. Egalité des entropies relatives et absolues.

Comme nous l'avons vu avec la proposition 34, les formules "relatives" sont particulièrement adaptées aux entropies de Poisson et de Parry. En travaillant un peu plus autour de cette proposition, on obtient le résultat général suivant :

Théorème 38. [**11**] *Soit $\mathcal{B}$ un facteur σ-fini du système conservatif $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$. Alors les entropies relatives à ce facteur coïncident pour les trois notions d'entropie.*

La question naturelle reste donc l'égalité des entropies "absolues" pour ces trois notions, qui correspond intuitivement à l'entropie relative au facteur trivial. Ce dernier n'étant pas σ-fini en mesure infinie, le théorème ci-dessus ne s'applique pas. Il était alors naturel de suivre les pas de Parry qui a montré qu'en se restreignant à une classe (très large au demeurant) de systèmes, on obtenait l'égalité $h_{Pa}(T) = h_K(T)$. Cette classe est celle des systèmes dits *quasi-finis*.

Définition 39. Un système $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ est *quasi-fini* s'il existe un sweep-out set $A \in \mathcal{A}$ de μ-mesure finie tel que l'entropie de partition des temps de retour sur A est d'entropie finie.

En mesure finie, la partition des temps de retour sur n'importe quel ensemble est automatiquement finie. Ainsi la présence d'un tel ensemble en mesure infinie donne un point d'appuis pour mimer une grande partie du travail technique propre à la mesure finie pour évaluer l'entropie et finalement montrer l'égalité recherchée. Le principal résultat de [**11**] a été de montrer qu'on pouvait aussi se servir de cette notion pour montrer :

Théorème 40. [**11**] *Si $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ est quasi-fini, alors*

$$h_{\mathcal{P}}(T) = h_{Pa}(T) = h_K(T).$$

Il s'agit donc de montrer l'égalité des entropies de Poisson et de Parry. Nous allons donner les grandes lignes de la preuve en précisant au préalable les notions de partitions adaptées à notre situation :

Définition 41. Une partition dénombrable α de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est appelée *partition locale* si elle possède un unique atome de mesure infinie et si son entropie $H_\mu(\alpha)$ est finie. Le complémentaire de l'atome de mesure infinie est appelé le *coeur* de la partition.

Et dans le cas des suspensions, les partitions naturelles sont bien sûr les partitions Poissonniennes :

Définition 42. Si α est une partition de $(X, \mathcal{A}, \mu)$, alors la partition Poissonnienne α^* est définie par

$$\alpha^* := \vee_{\alpha_i \in \alpha} \{N(\alpha_i) = k,\ k \geq 0\}.$$

Remarquons que si α_i est un atome de mesure infinie, alors, la partition $\{N(\alpha_i) = k,\, k \geq 0\}$ est triviale, ainsi les atomes de mesure nulle ou infinie ne jouent aucun rôle : ils ne sont pas “vus” par la suspension. Remarquons également que la disjonction des atomes entraîne l’indépendance des partitions, ainsi, en notant $f(x)$ l’entropie d’une variable de Poisson de paramètre x, on a $H_{\mu^*}(\alpha^*) = \sum_{\alpha_i \in \alpha,\, \mu(\alpha_i) < \infty} f(\mu(\alpha_i))$. En particulier, on vérifie facilement que $H_{\mu^*}(\alpha^*)$ est finie dès que l’entropie de α, calculée sur les atomes de mesure finie, l’est. Ainsi, c’est le cas pour les partitions locales.

Le comportement à l’origine de la fonction d’entropie d’une variable de de Poisson joue un rôle clé dans la suite, en effet :

$$f(x) \sim_0 -x \log x. \tag{4.2.1}$$

On utilisera alors la conséquence suivante, où on note par $\hat{\alpha}$ le facteur engendré par la partition α :

Proposition 43. [**11**] *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système conservatif sans ensemble invariant de mesure finie non nulle et α une partition locale dont le coeur est un sweep-out set. Alors*

$$h\left(\left(X^*, (\hat{\alpha})^*, \mu^*, T_*\right)\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu\left(\alpha_0^{n-1}\right)$$

Remarquons que dans le cas de la mesure finie, le membre de droite ne serait autre que l’entropie du facteur $\hat{\alpha}$.

Démonstration. On peut montrer que dans le cas d’une partition locale, l’hypothèse que T est conservative et n’admet pas d’ensemble T-invariant de mesure finie non nulle implique que la taille des atomes de mesures finies des partitions α_0^{n-1} tend vers 0. L’inégalité se déduit alors aisément de l’équivalent en 0 énoncé plus haut de la fonction d’entropie d’une variable de Poisson et donc que $H_{\mu^*}\left(\left(\alpha_0^{n-1}\right)^*\right)$ devient comparable à $H_\mu\left(\alpha_0^{n-1}\right)$ quand n tend vers l’infini. □

On peut à présent détailler la preuve de l’égalité des entropies dans le cas quasi-fini :

Démonstration. (du théorème 40) La quasi-finitude du système implique l’existence d’un “sweep-out” set A qui fait de la partition des temps de retour une partition locale quasi-finie α de coeur A. L’avantage essentiel d’une telle partition est que la fonction d’information conditionnelle $I_\mu(\alpha \mid \alpha_1^n)$ vérifie

$$I_\mu(\alpha \mid \alpha_1^n) = I_\mu(\alpha_0 \mid \alpha_1^\infty) = 0$$

sur $X \setminus A$. On est ainsi ramené au cas de la mesure finie où $\int_X I_\mu(\alpha \mid \alpha_1^n)\, d\mu = \int_A I_\mu(\alpha \mid \alpha_1^n)\, d\mu$ qui tend vers $\int_A I_\mu(\alpha \mid \alpha_1^\infty)\, d\mu = \int_X I_\mu(\alpha \mid \alpha_1^\infty)\, d\mu$.

Ensuite, il convient d’observer que, comme dans le cas fini, la fonction d’information vérifie l’identité :

$$I_\mu(\alpha_0^n) = I_\mu(\alpha) \circ T^{-(n-1)} + \sum_{j=1}^{n-1} I_\mu\left(\alpha \mid \alpha_1^j\right) \circ T^{j-(n-1)}$$

Il suffit alors d'intégrer pour obtenir

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_\mu\left(\alpha_0^{n-1}\right) &= \int_X I_\mu\left(\alpha \mid \alpha_1^\infty\right)d\mu\\ &= \int_X I_\mu\left(\alpha_0^\infty \mid \alpha_1^\infty\right)d\mu\\ &= H_\mu\left(\alpha_0^\infty \mid \alpha_1^\infty\right)\end{aligned}$$

On en déduit donc grâce à la proposition 43, que $h\left(\left(X^*, (\hat{\alpha})^*, \mu^*, T_*\right)\right) \leq H_\mu\left(\alpha_0^\infty \mid \alpha_1^\infty\right) \leq h_{Pa}\left((X, \hat{\alpha}, \mu, T)\right)$

Puis, en raffinant de plus en plus α de telle sorte à tendre vers la partition ponctuelle, l'inégalité devient :

$$h\left((X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*, T_*)\right) \leq h_{Pa}\left((X, \mathcal{A}, \mu, T)\right),$$

et comme l'inégalité inverse est vraie en général, on en déduit l'égalité des entropies de Poisson et de Parry. □

Pour finir cette section, il est indispensable de mentionner le résultat suivant résolvant par la négative la conjecture de l'égalité des trois entropies en général :

Théorème 44. *(Janvresse et de la Rue,* [**7**]*) Il existe un système ergodique conservatif d'entropie de Poisson infinie et d'entropie de Krengel et de Parry nulle.*

Bien sûr, l'exemple donné par ces auteurs n'est pas quasi-fini. Une des difficultés de ce résultat est déjà d'obtenir un tel système, avant d'évaluer son entropie. Les systèmes "classiques" sont en effet *tous* quasi-finis.

4.3. Résultats complémentaires

Pour montrer l'égalité des entropies dans le cas quasi-fini, nous avons dû développer quelques résultats techniques, propres aux suspensions de Poisson, qui nous ont permis d'obtenir des réponses à des questions dont la plupart traitent de la généralisation de résultats classiques en mesure finie.

4.3.1. Chaînes de Markov. Les chaînes de Markov forment une famille importante de systèmes dont l'entropie se calcule immédiatement depuis ses caractéristiques. La formule classique en mesure finie, s'étend à la mesure infinie :

Théorème 45. [**11**] *Une chaîne de Markov sur un alphabet au plus dénombrable Σ, de probabilités de transition $\{p_{a,b}\}_{(a,b)\in\Sigma^2}$, et mesure stationnaire $\{q_a\}_{a\in\Sigma}$ a pour entropie, quelle que soit la définition choisie :*

$$-\sum_{a\in\Sigma} q_a \sum_{a\in\Sigma} p_{a,b}\log p_{a,b}$$

Démonstration. Grâce à la formule de Krengel (Théorème 4.1 dans [**17**]), la quantité ci-dessus est bien l'entropie de Krengel, puis en prenant la partition de Markov standard ξ, on obtient que cette même quantité est égale à

$$H_\mu\left(\xi_0^\infty \mid \xi_1^\infty\right).$$

Ainsi l'entropie de Parry domine ici celle de Krengel d'où l'égalité des deux. Pour obtenir l'égalité avec l'entropie de Poisson, il convient d'abord de remarquer que quand la chaîne de Markov est un processus de renouvellement ($\Sigma = \mathbb{N}$ et $p_{n,n-1} = 1$ pour $n > 1$), alors la formule n'est autre que l'entropie de la partition des temps de retour à l'état $\{1\}$. Donc si cette quantité est finie, le système est quasi-fini et les trois entropies coïncident et si cette quantité est infinie, alors l'entropie de Parry est infinie et donc celle de Poisson aussi. Il suffit alors de remarquer que toute chaîne de Markov possède un facteur qui est un processus de renouvellement. Donc une chaîne de Markov est soit quasi-finie, soit d'entropie de Parry infinie, ce qui permet de conclure. □

4.3.2. Entropie nulle.

4.3.2.1. *Rang fini.* A l'autre extrémité du spectre se trouvent les transformations d'entropie de Poisson nulle. Les systèmes de rang fini sont des exemples bien connus de systèmes d'entropie nulle en mesure finie, c'est aussi le cas en mesure infinie pour l'entropie de Poisson.

PROPOSITION 46. [**11**] *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ *un système conservatif obtenu par une construction "cutting and stacking" où* c_n *représente le nombre de colonnes et* ϵ_n *la taille des niveaux à l'étape* n *de la construction, alors si* $c_n \epsilon_n \log \epsilon_n$ *tend vers* 0 *quand* n *tend vers l'infini, l'entropie de Poisson de* T *est nulle. C'est le cas en particulier si le rang est fini.*

DÉMONSTRATION. Notons $\beta_n := \{I_{n,1}, \ldots, I_{n,c_n}\}$ la collection des niveaux de base des colonnes à l'étapes n, et ξ_n la collection de tous les niveaux de la construction à l'étape n. En passant aux partitions Poissonniennes correspondantes, on a $\xi_n^* \prec \hat{\beta}_n^*$, en effet, chaque niveau de ξ_n est obtenu comme un itéré des niveaux de base. Par construction, comme $\xi_n \uparrow \mathcal{A}$, on a $\xi_n^* \uparrow \mathcal{A}^*$ et donc $\hat{\beta}_n^* \uparrow \mathcal{A}^*$. Ainsi $h\left(X^*, \hat{\beta}_n^*, \mu^*, T_*\right)$ tend vers $h\left(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*, T_*\right)$, or $h\left(X^*, \hat{\beta}_n^*, \mu^*, T_*\right)$ est borné par l'entropie de la partition β_n^* qui vaut exactement $c_n f\left(\epsilon_n\right)$, et cette quantité se comporte comme $c_n \epsilon_n \log \epsilon_n$ quand n tend vers l'infini d'après l'équivalent (4.2.1). □

4.3.2.2. *Critère spectral.* Le type spectral est souvent le moyen le plus simple pour déterminer sans calcul l'entropie d'un système en mesure finie. Nous avons pu généraliser partiellement ces critères, notamment :

PROPOSITION 47. [**11**] *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ *un système conservatif en mesure infinie. Si l'entropie de Poisson n'est pas nulle, alors le spectre contient une composante de Lebesgue dénombrable.*

DÉMONSTRATION. Si l'entropie de Poisson n'est pas nulle, alors bien sûr $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*, T_*)$ possède dans son spectre une composante de Lebesgue dénombrable. Pour pouvoir en dire autant de $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$, il faut pouvoir localiser au moins une partie de cette composante de Lebesgue dénombrable dans le premier chaos H, la conclusion s'ensuit alors par l'isomorphisme unitaire fondamental entre celui-ci et $L^2(\mu)$. Ainsi, la preuve consiste à produire de manière inductive des sous-espaces cycliques orthogonaux dans H sur lesquels le spectre est de Lebesgue. Nous renvoyons le lecteur à l'article [**11**] pour la fin, un peu technique, de l'argument. □

Et son corollaire immédiat :

COROLLAIRE 48. [**11**] *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ *un système conservatif en mesure infinie. Si le type spectral maximal est singulier ou si la multiplicité est finie, alors l'entropie de Poisson est nulle.*

4.3.2.3. *Tribus parfaites.* En mesure finie, on peut "lire" l'entropie sur les partitions d'entropie finie : Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, T)$ est un système ergodique probabiliste et ξ une partition d'entropie finie, alors l'entropie de T sur le facteur engendré par ξ, $\sigma\left(\vee_{n\in\mathbb{Z}} T^{-n}\xi\right)$, est égale à $H\left(\sigma\left(\vee_{n\geq 0} T^{-n}\xi\right) \mid T^{-1}\sigma\left(\vee_{n\geq 0} T^{-n}\xi\right)\right)$. De plus, le facteur de Pinsker de T sur $\sigma\left(\vee_{n\in\mathbb{Z}} T^{-n}\xi\right)$ est la tribu-queue $\cap_{k\geq 0} T^{-k}\sigma\left(\vee_{n\geq 0} T^{-n}\xi\right)$. Une des difficultés majeures en mesure infinie est l'absence d'analogue à ces résultat, les partitions, même les plus simples (par exemple à deux atomes dont un de mesure finie non-nulle) ne peuvent fournir un équivalent, même partiel. Néanmoins, au prix de considérer des objets plus compliqués, il est quand même possible d'obtenir dans certains cas, une notion approchante en mesure infinie.

Partons de nouveau du cas de la mesure finie en mentionnant la notion de tribu parfaite (voir par exemple [**31**]).

Définition 49. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, T)$ est un système probabiliste et $\mathcal{P}$ son facteur de Pinsker. Une tribu $\mathcal{B}$ est parfaite si

(1) $T^{-1}\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$
(2) $T^{n}\mathcal{B} \uparrow \mathcal{F}$
(3) $h(T) = H\left(\mathcal{B} \mid T^{-1}\mathcal{B}\right)$
(4) $T^{n}\mathcal{B} \downarrow \mathcal{P}$

Ainsi, d'après ce qu'on a écrit plus haut, $\sigma\left(\vee_{n\geq 0} T^{-n}\xi\right)$ est une tribu parfaite relativement au facteur qu'elle engendre.

On a alors introduit la notion de *tribu ED :*

Définition 50. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système et $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*, T_*)$ sa suspension. Une sous-tribu $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ est dite ED (pour "entropy determining") si $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{A}^*$ est parfaite pour le facteur qu'elle engendre et que son entropie est finie.

Cette notion n'est pas vide, en effet, on peut observer en reprenant les preuves liées à l'égalité des entropies dans le cas quasi-fini que de tels systèmes possèdent toujours une tribu ED. En effet, si $A \in \mathcal{A}$ est un sweep-out set quasi-fini (c'est à dire, où la partition des temps de retour associée est d'entropie finie) alors en définissant la partition $\xi := \{A, A^c\}$, on vérifie aisément que $\xi_{-\infty}^{0} := \vee_{n\geq 0} T^{-n}\xi$ est bien ED.

D'autre part, on a évidemment aussi que si $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ est un facteur d'entropie de Poisson nulle, celui-ci constitue lui-même une tribu ED.

Proposition 51. [**11**] *Si $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ possède une tribu ED, alors il possède une tribu ED génératrice $\mathcal{B}$, et l'entropie de Poisson et l'entropie de Parry coïncident.*

De plus $\left(\cap_{n\geq 0} T^{-n}\mathcal{B}\right)^*$ est le facteur de Pinsker de la suspension de Poisson associée.

Démonstration. La preuve suit essentiellement celle du théorème de Rokhlin-Sinaï comme décrite dans [**29**] en construisant prudemment une tribu parfaite génératrice pour la suspension qui s'avère être aussi Poissonnienne, de sorte à pouvoir en déduire le résultat sur la base. □

4.3.2.4. *Facteur de Poisson-Pinsker.* L'intérêt principal du dernier résultat du paragraphe précédent est le suivant :

Pour les systèmes possédant un facteur d'entropie de Poisson nulle, il existe un plus gros facteur d'entropie de Poisson nulle, que nous appelons naturellement *facteur de Poisson-Pinsker*, il est donné, avec les notations de la Proposition, par $\cap_{n\geq 0}T^{-n}\mathcal{B}$.

A l'inverse, si le système possède une tribu ED et qu'il n'y a pas de facteur d'entropie de Poisson nulle, alors $\left(\cap_{n\geq 0}T^{-n}\mathcal{B}\right)^*$ est triviale ce qui signifie que $\cap_{n\geq 0}T^{-n}\mathcal{B}$ n'est constitué que d'ensembles de mesure 0 ou $+\infty$, le système est donc *remotely infinite*.

Malheureusement, nous ne sommes pas arrivés à montrer le théorème sans l'hypothèse de l'existence d'une tribu ED.

Remarquons que les résultats ci-dessus autorisent a priori la situation suivante : un système qui ne possède pas de facteur d'entropie de Poisson nulle mais dont la suspension de Poisson possèderait un facteur d'entropie nulle non-trivial (qui serait donc nécessairement non Poissonnien). L'article [**34**], dont nous détaillons les résultats dans le paragraphe suivant, est venu montrer que cette situation ne peut en fait pas se produire.

4.3.2.5. *Facteur de Poisson-Pinsker : raffinements.*

Théorème 52. [**34**] *Le facteur de Pinsker d'une suspension est toujours un facteur Poissonnien.*

Ce résultat vient compléter le résultat précédent en s'appuyant sur une toute autre méthode. On utilise de manière décisive qu'un facteur d'une suspension est Poissonnien si et seulement si le couplage relativement indépendant associé est ID. Le grand bénéfice de cette méthode est de se débarrasser de la dimension “temporelle” liée à l'ordre de $\mathbb{Z}$ et donc d'être valable pour des groupes qui admettent une définition de l'entropie (par exemples des groupes dénombrables moyennables).

Bien sûr, l'intérêt de la méthode d'origine dans le cas de $\mathbb{Z}$ est quand même d'utiliser cette dimension temporelle en voyant le facteur de Poisson-Pinsker comme la tribu queue d'une certaine tribu génératrice, ce qui a d'autres avantages. Mais le résultat suivant est plus général en ce sens qu'il affirme que dès que le facteur de Pinsker de la suspension est non-trivial, alors il existe un facteur de Poisson-Pinsker dans la base (éventuellement restreinte à un sous-ensemble invariant si elle n'est pas ergodique), ce qui ne pouvait pas être obtenu par la méthode décrite plus haut. Nous présentons le résultat dans le cas de $\mathbb{Z}$ et renvoyons le lecteur à l'article [**34**] pour le cas de groupes dénombrables moyennables.

Démonstration. Considérons la suspension de Poisson $(X^*,\mathcal{A}^*,\mu^*,T_*)$. Nous allons prouver que le facteur de Pinsker est un facteur Poissonnien en montrant que le couplage relativement indépendant associé est un couplage infiniment divisible, donc Poissonnien. Nous conclurons grâce à la Proposition 22. Pour ce faire nous avons d'abord besoin d'étudier le système produit suivant

$$\left(X^*\times X^*,\mathcal{A}^*_\alpha\otimes\mathcal{A}^*_\beta,(\alpha\mu)^*\otimes(\beta\mu)^*,T_*\times T_*\right)$$

où α et β sont strictement positifs. Nous écrivons $\mathcal{A}^*_\alpha$ au lieu de $\mathcal{A}^*$ puisqu'après tout, la tribu est complétée relativement à la mesure $(\alpha\mu)^*$. Notons Π_γ la tribu de Pinsker associée à la suspension $\left(X^*\times X^*,\mathcal{A}^*_\gamma,(\gamma\mu)^*,T_*\right)$, pour $\gamma>0$. Ainsi, d'après un résultat classique, la tribu de Pinsker de

$$\left(X^*\times X^*,\mathcal{A}^*_\alpha\otimes\mathcal{A}^*_\beta,(\alpha\mu)^*\otimes(\beta\mu)^*,T_*\times T_*\right)$$

est $\Pi_\alpha\otimes\Pi_\beta$, le produit des tribus de Pinsker de chaque facteur.

Soit φ l'application somme de $X^* \times X^*$ dans X^* :

$$\varphi(\nu_1, \nu_2) = \nu_1 + \nu_2.$$

C'est l'application qui nous permet d'obtenir $\left(X^*, \mathcal{A}^*_{\alpha+\beta}, ((\alpha+\beta)\mu)^*, T_*\right)$ à partir de $\left(X^* \times X^*, \mathcal{A}^*_\alpha \otimes \mathcal{A}^*_\beta, (\alpha\mu)^* \otimes (\beta\mu)^*, T_* \times T_*\right)$.

Notons alors $\widetilde{\mathcal{A}^*_{\alpha+\beta}} := \varphi^{-1}\mathcal{A}^*_{\alpha+\beta}$ et $\widetilde{\Pi_{\alpha+\beta}} := \varphi^{-1}\Pi_{\alpha+\beta}$. Bien sûr, ce sont deux sous-tribus de $\mathcal{A}^*_\alpha \otimes \mathcal{A}^*_\beta$ et on a aussi les deux inclusions suivantes $\widetilde{\Pi_{\alpha+\beta}} \subset \Pi_\alpha \otimes \Pi_\beta$ et $\widetilde{\Pi_{\alpha+\beta}} \subset \widetilde{\mathcal{A}^*_{\alpha+\beta}}$. Remarquons que l'extension $\widetilde{\Pi_{\alpha+\beta}} \leftarrow \Pi_\alpha \otimes \Pi_\beta$ est d'entropie nulle tandis que $\widetilde{\Pi_{\alpha+\beta}} \leftarrow \widetilde{\mathcal{A}^*_{\alpha+\beta}}$ est d'entropie complètement positive, ceci entraîne, d'après le Lemme 3 dans [**38**], que les facteurs $\Pi_\alpha \otimes \Pi_\beta$ et $\widetilde{\mathcal{A}^*_{\alpha+\beta}}$ sont relativement indépendants au dessus de $\widetilde{\Pi_{\alpha+\beta}}$.

Ceci a pour conséquence que $L^2(\Pi_\alpha \otimes \Pi_\beta) \ominus L^2\left(\widetilde{\Pi_{\alpha+\beta}}\right)$ et $L^2\left(\widetilde{\mathcal{A}^*_{\alpha+\beta}}\right) \ominus L^2\left(\widetilde{\Pi_{\alpha+\beta}}\right)$ sont des sous-espaces orthogonaux de $L^2\left(\mathcal{A}^*_\alpha \otimes \mathcal{A}^*_\beta\right)$, en effet, en prenant f dans le premier de ces espaces et g dans le second :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[fg] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[fg \mid \widetilde{\Pi_{\alpha+\beta}}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[f \mid \widetilde{\Pi_{\alpha+\beta}}\right]\mathbb{E}\left[g \mid \widetilde{\Pi_{\alpha+\beta}}\right]\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

On peut alors écrire $L^2\left(\mathcal{A}^*_\alpha \otimes \mathcal{A}^*_\beta\right)$ comme la somme orthogonale suivante

$$L^2\left(\widetilde{\Pi_{\alpha+\beta}}\right) \oplus \left(L^2\left(\widetilde{\mathcal{A}^*_{\alpha+\beta}}\right) \ominus L^2\left(\widetilde{\Pi_{\alpha+\beta}}\right)\right) \oplus \left(L^2(\Pi_\alpha \otimes \Pi_\beta) \ominus L^2\left(\widetilde{\Pi_{\alpha+\beta}}\right)\right) \oplus H$$

où H est l'orthocomplément de

$$L^2\left(\widetilde{\Pi_{\alpha+\beta}}\right) \oplus \left(L^2\left(\widetilde{\mathcal{A}^*_{\alpha+\beta}}\right) \ominus L^2\left(\widetilde{\Pi_{\alpha+\beta}}\right)\right) \oplus \left(L^2(\Pi_\alpha \otimes \Pi_\beta) \ominus L^2\left(\widetilde{\Pi_{\alpha+\beta}}\right)\right).$$

Soit alors $f \in L^2\left(\mathcal{A}^*_\alpha \otimes \mathcal{A}^*_\beta\right)$, que l'on décompose suivant cette somme en $f_1 + f_2 + f_3 + f_4$, on a alors :

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[f \mid \widetilde{\mathcal{A}^*_{\alpha+\beta}}\right] \mid \Pi_\alpha \otimes \Pi_\beta\right] = \mathbb{E}[f_1 + f_2 \mid \Pi_\alpha \otimes \Pi_\beta] = f_1$$

Ainsi, $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[f \mid \widetilde{\mathcal{A}^*_{\alpha+\beta}}\right] \mid \Pi_\alpha \otimes \Pi_\beta\right] = \mathbb{E}\left[f \mid \widetilde{\Pi_{\alpha+\beta}}\right]$ (ce qui signifie en fait que $(\Pi_\alpha \otimes \Pi_\beta) \cap \widetilde{\mathcal{A}^*_{\alpha+\beta}} = \widetilde{\Pi_{\alpha+\beta}}$).

Nous voulons maintenant déterminer l'image de la mesure

$$\left((\alpha\mu)^* \otimes_{\Pi_\alpha} (\alpha\mu)^*\right) \otimes \left((\beta\mu)^* \otimes_{\Pi_\beta} (\beta\mu)^*\right)$$

par l'application $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) \mapsto (\nu_1 + \nu_3, \nu_2 + \nu_4)$ ce qui revient à calculer le produit de convolution :

$$\left((\alpha\mu)^* \otimes_{\Pi_\alpha} (\alpha\mu)^*\right) * \left((\beta\mu)^* \otimes_{\Pi_\beta} (\beta\mu)^*\right).$$

Remarquons qu'en changeant l'ordre des facteurs en appliquant la permutation $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) \mapsto (\nu_1, \nu_3, \nu_2, \nu_4)$, la mesure

$$\left((\alpha\mu)^* \otimes_{\Pi_\alpha} (\alpha\mu)^*\right) \otimes \left((\beta\mu)^* \otimes_{\Pi_\beta} (\beta\mu)^*\right)$$

n'est autre que

$$\left((\alpha\mu)^* \otimes (\beta\mu)^*\right) \otimes_{\Pi_\alpha \otimes \Pi_\beta} \left((\alpha\mu)^* \otimes (\beta\mu)^*\right).$$

Et on obtient la mesure recherchée en prenant l'image de cette dernière par l'application

$$\varphi \times \varphi : (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) \mapsto (\nu_1 + \nu_2, \nu_3 + \nu_4)$$

Soit donc $A \times B \in \mathcal{A}^*_{\alpha+\beta} \otimes \mathcal{A}^*_{\alpha+\beta}$, on a, en omettant les mesures ambiantes pour ne pas alourdir encore les notations :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[1_{(\varphi\times\varphi)^{-1}(A\times B)}\right] &= \mathbb{E}\left[1_{\varphi^{-1}(A)\times\varphi^{-1}(B)}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[1_{\varphi^{-1}(A)} 1_{\varphi^{-1}(B)} \mid \Pi_\alpha \otimes \Pi_\beta\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[1_{\varphi^{-1}(A)} \mid \Pi_\alpha \otimes \Pi_\beta\right] \mathbb{E}\left[1_{\varphi^{-1}(B)} \mid \Pi_\alpha \otimes \Pi_\beta\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[1_{\varphi^{-1}(A)} \mid \widetilde{\mathcal{A}^*_{\alpha+\beta}}\right] \mid \Pi_\alpha \otimes \Pi_\beta\right] \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[1_{\varphi^{-1}(B)} \mid \widetilde{\mathcal{A}^*_{\alpha+\beta}}\right] \mid \Pi_\alpha \otimes \Pi_\beta\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[1_{\varphi^{-1}(A)} \mid \widetilde{\Pi_{\alpha+\beta}}\right] \mathbb{E}\left[1_{\varphi^{-1}(B)} \mid \widetilde{\Pi_{\alpha+\beta}}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[1_A \mid \Pi_{\alpha+\beta}\right] \mathbb{E}\left[1_B \mid \Pi_{\alpha+\beta}\right]\right]
\end{aligned}$$

ceci prouve donc

$$\left((\alpha\mu)^* \otimes_{\Pi_\alpha} (\alpha\mu)^*\right) * \left((\beta\mu)^* \otimes_{\Pi_\beta} (\beta\mu)^*\right) = \left((\alpha+\beta)\,\mu\right)^* \otimes_{\Pi_{\alpha+\beta}} \left((\alpha+\beta)\,\mu\right)^*.$$

Par suite, on déduit aisément

$$\left(\left(\frac{1}{k}\mu\right)^* \otimes_{\Pi_{\frac{1}{k}}} \left(\frac{1}{k}\mu\right)^*\right)^{*k} = \mu^* \otimes_{\Pi_1} \mu^*,$$

Autrement dit, la mesure de probabilité $\mu^* \otimes_{\Pi_1} \mu^*$ est infiniment divisible et donc l'autocouplage relativement indépendant d'une suspension au dessus de son facteur de Pinsker est Poissonnien, celui-ci est donc bien Poissonnien ce qui achève la preuve. □

Il devient maintenant naturel de faire une catégorie des systèmes ne possédant aucun facteur d'entropie de Poisson nulle :

DÉFINITION 53. Un système $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ est dit *d'entropie de Poisson totalement positive* s'il n'existe aucun ensemble T-invariant $Y \in \mathcal{A}$ tel que le système restreint à Y possède un facteur (σ-fini) d'entropie de Poisson nulle. De manière équivalente, un système est d'entropie de Poisson totalement positive si et seulement si sa suspension de Poisson a la propriété K de Kolmogorov (i.e. ne possède aucun facteur d'entropie nulle autre que le facteur trivial).

Ainsi, un système ergodique est ou bien d'entropie totalement positive ou bien il possède un facteur de Poisson-Pinsker. Insistons une nouvelle fois sur le fait que le facteur trivial en mesure infinie n'est pas pour nous un facteur et ne saurait donc être un facteur de Poisson-Pinsker.

On a alors :

PROPOSITION 54. [**34**] *Si $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ est d'entropie de Poisson totalement positive, alors U_T a spectre de Lebesgue dénombrable. En particulier, il est de type zéro.*

Si $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ possède un facteur de Poisson-Pinsker, alors U_T a spectre de Lebesgue dénombrable sur l'orthocomplément du facteur de Poisson-Pinsker.

Des exemples de systèmes d'entropie totalement positive sont donnés par des chaînes de Markov récurrente nulle et, plus généralement, tout système "remotely infinite" est d'entropie totalement positive (voir Théorème 24). Malheureusement, nous ne sommes pas en mesure d'affirmer que c'est une caractérisation de l'entropie totalement positive.

Comme corollaire, nous avons les résultats suivants, bien connus en mesure finie :

Proposition 55. [**34**] *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique. Le système est d'entropie de Poisson nulle dans les cas suivants*

— *Le type spectral maximal est singulier*
— *La multiplicité spectrale est finie*
— *Il existe $f \in L^2(\mu)$ de mesure spectrale singulière et telle que*

$$\sigma \{f \circ T^n, \, n \in \mathbb{Z}\} = \mathcal{A}.$$

Signalons pour finir un résultat attendu au vu de ce qui précède :

Proposition 56. [**34**] *Un système possédant un facteur de Poisson-Pinsker est fortement disjoint d'un système d'entropie de Poisson totalement positive.*

Chapitre 5

Ecart de complexité entre $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ et $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*, T_*)$

A première vue, une suspension de Poisson $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*, T_*)$ semble être un système bien plus compliqué que le système $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ sur lequel elle est basée :

Quand un seul point est transformé par une transformation T, une collection dénombrable de points est déplacée par T_* !

Cette première observation naïve est accompagnée d'autres, moins triviales. Considérons par exemple la suspension au dessus du flot des translations sur la droite réelle préservant la mesure de Lebesgue. On ne peut guère imaginer de flot plus simple, pour autant, la suspension associée est d'une complexité extrême par bien des points de vue : multitude de facteurs, centralisateur énorme... A l'inverse le flot des translations n'admet pas de facteur non trivial et son centralisateur est réduit au flot lui même. Bien sûr, le caractère très particulier des systèmes dissipatifs empêche de faire des généralisations hâtives et seul le cas conservatif mérite véritablement notre attention. Le but poursuivi a été le suivant au cours de ces années :

Peut-on trouver des systèmes conservatifs pour lesquels la complexité de la suspension est essentiellement la même que celle de la base ?

Les liens fonctoriels entre un système dynamique et sa suspension indiquent, de manière plus convaincante que la remarque faite plus haut, que la suspension est un système en général plus riche :

— Le centralisateur $C(T_*)$ "contient" $C(T)$ (grâce à l'injection $T \mapsto T_*$)
— Toute la structure spectrale de T se retrouve dans celle de T_*(dans le premier chaos de $L^2(\mu^*)$)
— Si $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ est un facteur σ-fini de la base, alors $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{A}^*$ est un facteur de la suspension
— Tout sous-couplage de T induit un couplage ergodique de T_*.

5.1. Centralisateur

Ainsi, un premier pas vers l'obtention d'exemples de suspensions à "complexité contrôlée" était ce résultat de [**33**] (similaire en tout point au cas Gaussien).

Lemme 57. [**33**] *Soit $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*, T_*)$ une suspension de Poisson ergodique. Si σ, le type spectral maximal de T, vérifie, pour tout $n \geq 2$, $\sigma \perp \sigma^{*n}$, alors $C(T_*) \simeq C(T)$.*

Démonstration. En effet, si la propriété est vérifiée, alors, d'une part σ est une mesure continue et, en considérant un élément R du centralisateur de T_* et l'opérateur unitaire U_R associé, pour tout vecteur F du premier chaos H^1, $U_R F$ a la même mesure spectrale que F. Mais ceci implique que $U_R F \in H^1$ puisque le type spectral sur l'orthogonal de H^1 est absolument continu par rapport à $\delta_0 + \sum_{n\geq 2} \sigma^{*n}$ qui est singulière à σ par hypothèse. Ainsi le couplage porté par le graphe de $\bar{S}$ est un couplage Poissonnien puisque il est clair que pour tous ensembles A et B de $\mathcal{A}_f$, $(N(A), N(B) \circ S) = (N(A), U_R N(B))$ est un vecteur infiniment divisible. Mais alors, ce couplage induit un sous-couplage pour $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ et on vérifie facilement que l'opérateur sous-Markovien associé est l'opérateur induit par U_R sur $H^1 \simeq L^2(\mu)$ qui est encore une isométrie. Cet opérateur est donc en fait Markovien, donc positif et également une isométrie, il provient donc nécessairement d'une transformation qui préserve la mesure S et qui commute avec T. Finalement on a $R = S_*$, c'est à dire $C(T_*) \simeq C(T)$. $\square$

5.2. Structure spectrale

Spectralement, une seule situation permet de considérer que l'écart de complexité est réduit à son minimum, c'est le cas du spectre simple. En effet, si la multiplicité de T n'est pas égale à 1, alors on est sûr que la multiplicité de T_* sera infinie (résultat identique au cas Gaussien, voir [**2**]). Mais même si T est à spectre simple, en général, la multiplicité de T_* peut être infinie, c'est le cas par exemple avec la suspension au dessus de la translation sur $\mathbb{Z}$. En fait, la condition nécessaire et suffisante pour que T_* soit à spectre simple est que T_* soit à spectre simple sur chaque chaos (ce qui implique bien entendu que T est à spectre simple) mais aussi que σ, le type spectral maximal de T, vérifie $\forall n \neq m$, $\sigma^n \perp \sigma^m$ (en particulier, les hypothèses du Lemme précédent sont vérifiées). Dans l'article [**33**], nous avons donné les conditions suivantes pour obtenir le spectre simple, application directe d'un théorème d'Ageev ([**1**]). Il y en a bien d'autres.

PROPOSITION 58. [**33**] *Supposons que T soit à spectre simple en mesure infinie et que pour un ensemble dénombrable de réels θ, $\theta I + (1-\theta) U_T$ appartiennent à la clôture faible des U_{T^n}, $n \in \mathbb{Z}$, alors T_* est à spectre simple.*

On construit facilement des systèmes de rang 1 remplissant ces conditions.

5.3. Facteurs

Le cas des facteurs est plus délicat, les suspensions partagent là encore des similitudes avec le cas Gaussien mais présentent aussi des différences drastiques.

En général, on ne peut espérer obtenir une suspension dont tous les facteurs sont Poissonniens. En particulier, on a l'exemple suivant :

Supposons que le système $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ possède un facteur compact $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$, formé à partir d'un sous-groupe compact non trivial K de $C(T)$, i.e. $\mathcal{K}$ est l'ensemble des ensembles mesurables invariants par tous les automorphismes de K. On serait tenté de conclure que le facteur Poissonnien correspondant $\mathcal{K}^* \subset \mathcal{A}^*$ est le facteur compact correspondant à K, vu cette fois dans $C(T_*)$. En fait, ce n'est jamais le cas, comme conséquence du résultat suivant :

PROPOSITION 59. *Une suspension de Poisson ergodique est toujours relativement faiblement mélangeante au dessus de ses facteurs Poissonniens.*

DÉMONSTRATION. En effet, l'auto-couplage relativement indépendant d'une suspension au-dessus d'un facteur Poissonnien est toujours un auto-couplage Poissonnien, donc ergodique si la suspension est ergodique d'après la Proposition 30. $\square$

Ainsi, comme d'une manière générale un système ergodique n'est jamais relativement faiblement mélangeant au dessus d'un facteur compact non trivial, on en déduit que $\mathcal{K}^*$ n'est pas le facteur compact supposé. En fait, on se trouve dans la situation suivante où les inclusions sont strictes :

$$\mathcal{K}^* \subset \widetilde{\mathcal{K}} \subset \mathcal{A}^*$$

où $\widetilde{\mathcal{K}}$ désigne le facteur compact de $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*, T_*)$ correspondant à K, vu cette fois dans $C(T_*)$.

Cet exemple tend à illustrer que les facteurs de la base peuvent engendrer non seulement les facteurs Poissonniens correspondant mais aussi d'autres facteurs non Poissonniens.

Pour traiter plus avant le cas des facteurs, il nous faut réintroduire dans son contexte dynamique le résultat suivant que nous avons présenté d'un point de vue entièrement probabiliste (Théorème 16).

Théorème 60. [**33**] *Soit $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*, T_*)$ une suspension de Poisson et Φ un opérateur de Markov $L^2(\mu^*)$ qui commute avec T_*. Si Φ et son adjoint Φ^* préservent H^1, alors Φ et Φ^* induisent sur $L^2(\mu)$ des opérateurs sous-Markoviens φ et φ^* qui commutent avec T.*

L'inclusion écrite ci-dessus se généralise à tous les facteurs si la suspension possède la propriété suivante que nous avons appelée “CP” pour “chaos preserving” :

Définition 61. Une suspension $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*, T_*)$ est dite CP si pour tout facteur $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}^*$, l'espérance conditionnelle associée préserve les chaos.

Cette propriété est notamment vérifiée si le type spectral maximal de T vérifie pour tout $n \neq m$, $\sigma^n \perp \sigma^m$.

Ce théorème permet notamment de généraliser partiellement la chaîne d'inclusion ci-dessus.

Proposition 62. [**26**] *Soit $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*, T_*)$ une suspension avec T ergodique. Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}^*$ un facteur tel que son espérance conditionnelle préserve, sans s'y annuler, le premier chaos H^1. Alors il existe un facteur (σ-fini) $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ tel que $\mathcal{C}^* \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{A}^*$.*

Démonstration. Soit Φ l'espérance conditionnelle associée à $\mathcal{B}$. Φ est un opérateur de Markov autoadjoint qui commute avec T_* et préserve H^1, on peut donc appliquer le Théorème 60 et ainsi obtenir φ, l'opérateur sous Markovien commutant avec T induit par Φ sur $L^2(\mu)$. Par positivité de φ, on définit aisément $\varphi(1_X)$ comme limite croissante de fonctions $\varphi(1_{A_n})$ avec $1_{A_n} \uparrow 1_X$ et en montrant que la limite ne dépend pas de la suite choisie, de plus $\varphi(1_X) \leq 1$ car φ est sous-Markovien. $\varphi(1_X)$ est clairement T-invariante et par ergodicité, constante. Remarquons que comme Φ est une projection orthogonale, il en est de même pour φ, donc $c = \varphi(1_X) = \varphi \circ \varphi(1_X) = \varphi(c1_X) = c^2$. On a aussi supposé que Φ ne s'annule pas sur H^1 ainsi φ ne peut pas être nul non plus et on en déduit que $\varphi(1_X) = 1$, donc φ est Markovien. Finalement φ est bien une espérance conditionnelle associée à un facteur σ-fini $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$.

D'une manière générale, les vecteurs se trouvant dans $\Im(\Phi)$ sont mesurables par rapport à $\mathcal{B}$, donc c'est le cas pour les vecteurs de la forme $I(1_A) = N(A) - \mu(A)$, pour $A \in \mathcal{C}$ de mesure finie, puisque

$$\Phi(N(A) - \mu(A)) = \Phi(I(1_A)) = I(\varphi(1_A)) = I(1_A).$$

Mais par définition, $\mathcal{C}^* = \sigma\{N(A), A \in \mathcal{C}\} = \sigma\{I(1_A), A \in \mathcal{C}\}$, ainsi $\mathcal{C}^* \subset \mathcal{B}$. $\square$

Bien sûr, cette proposition reste insatisfaisante dans le cas où l'espérance conditionnelle s'annule sur le premier chaos. Fort heureusement, cette situation trouve la réponse attendue grâce à la version dynamique du Théorème 20 :

THÉORÈME 63. [**27**] *Soit $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*, T_*)$ une suspension de Poisson et $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}^*$ un facteur dont l'espérance conditionnelle Φ préserve les chaos et s'annule sur le premier. Alors Φ s'annule sur tous les chaos en dehors du chaos d'ordre* 0*, c'est à dire $\mathcal{C}$ est le facteur trivial $\{X^*, \mathcal{A}^*\}$ mod. μ^*.*

En combinant la Proposition 62 et le Théorème 63, on est donc maintenant en mesure de généraliser complètement la chaîne d'inclusion des facteurs :

PROPOSITION 64. [**27**]*Soit $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*, T_*)$ une suspension de Poisson CP avec T ergodique. Si $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}^*$ un facteur non trivial, alors il existe un facteur (σ-fini) $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ tel que $\mathcal{C}^* \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{A}^*$.*

La question naturelle suivante est bien sûr de savoir si la situation extrême, à savoir l'absence de facteur non-trivial, peut se présenter. En mesure finie, on appelle "premier" un tel système $(Y, \mathcal{K}, m, S)$ où les seuls facteurs sont $\mathcal{K}$ et $\{Y, \emptyset\}$. En mesure infinie, $\{Y, \emptyset\}$ n'étant pas pour nous un facteur (σ-fini), on dira qu'un système est premier en mesure infinie" si $\mathcal{K}$ et le seul facteur (σ-fini).

On a donc le résultat suivant comme corollaire immédiat :

THÉORÈME 65. [**27**] *La suspension $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*, T_*)$ est première si et seulement si T_* a la propriété CP et T est ergodique et premier en mesure infinie.*

Un exemple d'une telle transformation T produisant une suspension de Poisson première est donné par certaines rotations sur un groupe compact préservant une mesure infinie (et donc nécessairement singulière par rapport à la mesure de Haar).

Voilà donc une situation où la complexité en terme de facteur est la même pour la base et la suspension. Remarquons néanmoins que dans les exemples en question, le spectre de la suspension n'est pas simple et que l'on ne connaît pas non plus la structure des couplages, celle-ci n'étant pas directement accessible, pensons-nous.

Ces suspensions premières occupent une place particulière dans le zoo des systèmes dynamiques car, cette propriété, combinée à la structure particulière des suspensions en font des exemples nouveaux de systèmes premiers. Les exemples connus précédemment étaient soit de rang un, soit simples, soit des constructions à partir de ces derniers.

Notons que la possibilité d'avoir des suspensions de Poisson sans facteur non-trivial vient illustrer une différence majeure par rapport aux systèmes Gaussiens où cette situation ne se produit jamais, il y a même toujours un continuum de facteurs Gaussiens dans un système Gaussien. Comme différence notable, citons également le cas du facteur dit "pair" : le projecteur sur la somme des chaos Gaussiens pairs est un opérateur de Markov. Cette situation est impossible dans le cas d'une suspension de Poisson d'après le théorème 63.

Restait à étudier le domaine des couplages, celui-ci englobant d'ailleurs également celui des facteurs et du centralisateur. Nous y consacrons une partie de la section suivante.

Chapitre 6

Sushis et Propriété $\mathcal{P}a\mathcal{P}$

Cette partie représente notre avancement le plus conséquent dans la maîtrise des différents aspects de la structure des suspensions de Poisson. La motivation initiale était d'établir un analogue du Théorème dit de Foiaş-Strătilă, théorème remarquable au coeur de la théorie des systèmes Gaussiens :

Théorème 66. *(Théorème de Foiaş-Strătilă,* **[9]***) Soit σ une mesure continue symétrique portée par un ensemble de Kronecker (symétrisé). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, S)$ un système ergodique probabiliste. Si $f \in L^2(\mathbb{P})$ admet σ pour mesure spectrale, alors le processus stationnaire $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}} := \{f \circ S^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est Gaussien.*

Ainsi, certaines mesures spectrales, moyennant l'hypothèse naturelle d'ergodicité, induisent nécessairement le caractère Gaussien d'un processus L^2. Bien évidemment, ces processus très particuliers tiennent une place importante au sein de la théorie ergodique.

Pour établir un analogue dans le cas des suspensions de Poisson, il s'agissait de considérer les bons objets. Le rôle des processus stationnaires est joué ici par les processus ponctuels et celui de la mesure spectrale l'est par l'intensité du processus ponctuel, soumis à une certaine transformation.

Soyons plus précis et introduisons la notion suivante :

Définition 67. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ un système dynamique. Un T-processus ponctuel est une variable aléatoire N définie sur un système dynamique $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, S)$ à valeurs dans $(X^*, \mathcal{A}^*)$ telle que, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $N(A) \circ S = N\left(T^{-1}A\right)$ et dont l'intensité est $\alpha\mu$ pour un certain $0 < \alpha < +\infty$, c'est à dire $\mathbb{E}[N(A)] = \alpha\mu(A)$.

Un T-processus ponctuel est donc juste une fonction mesurable établissant une relation de facteur entre le système $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, S)$ et $(X^*, \mathcal{A}^*, N_*\mathbb{P}, T_*)$. Si $N_*\mathbb{P} = (\alpha\mu)^*$ alors, on dira que le processus est un T-processus (ponctuel) de Poisson d'intensité $\alpha\mu$.

Remarquons qu'en prenant $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, S) = \left(X^*, \mathcal{A}^*, (\alpha\mu)^*, T_*\right)$ et $N := Id$, N réalise alors un T-processus de Poisson d'intensité $\alpha\mu$.

L'idée de trouver un analogue au théorème de Foiaş-Strătilă consiste à essayer de trouver un système $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ où les possibilités de réaliser des T-processus ponctuels sont très limitées. Pour circonscrire un peu plus le problème, il est naturel d'imposer que T est ergodique, que μ est infinie et d'exiger que les T-processus ponctuels soient ergodiques. Bien sûr, l'exemple au dessus indique que les processus de Poisson sont toujours disponibles, mais on en construit bien d'autres en procédant comme suit :

Supposons qu'il existe sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, S)$, une famille $\{N_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de T-processus ponctuels de Poisson indépendants et d'intensités respectives $\alpha_k\mu$ et des parties finies $\{F_k\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ contenant 0 et tels que $\sum\sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k \times (\sharp F_k) = \alpha$, alors le processus $N := \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{m\in F_k} N_k\circ S^m$ est un T-processus ponctuel ergodique d'intensité $\alpha\mu$. Cette construction est toujours possible en considérant par exemple le produit direct des suspensions de Poisson associées et l'ergodicité du T-processus obtenu provient de l'ergodicité de ce produit direct dû au mélange faible de chaque suspension. Le nom que nous avons donné à cet exemple particulier est "SuShi" (pour SUperposition of SHIfted poisson processes).

La question devient alors : peut-on mettre des hypothèses sur $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ pour que les seuls T-processus ponctuels ergodiques soient des SuShis ?

Si dans le cas du Théorème de Foiaş-Strătilă, l'hypothèse L^2 suffit, dans notre cas nous n'avons pas pu nous en contenter. En effet, notre étude repose entièrement sur les mesures de moments d'un processus ponctuel, à savoir les mesures

$$M_n^N\left(A_1\times\cdots\times A_n\right) := \mathbb{E}\left[N\left(A_1\right)\cdots N\left(A_n\right)\right]$$

pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A_i\in\mathcal{A}_f$, $1\le i\le n$. Pour apporter un tant soit peu d'information, ces mesures doivent être bien sûr σ-finies ce qui est équivalent à demander que le processus ponctuel ait des moments de tous ordres, à savoir, pour tout $A\in\mathcal{A}_f$:

$$\mathbb{E}\left[N\left(A\right)^n\right]<\infty$$

Nous pouvons alors donner des hypothèses sur $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ pour réaliser notre objectif.

— (P1) Pour tout $n\ge 1$, $(X^n,\mathcal{A}^{\otimes n},\mu^{\otimes n},T^{\times n})$ est ergodique (on dit que l'*indice ergodique* de T est infini)
— (P2) Pour tout $n\ge 1$, si σ est une mesure $T^{\times n}$-invariante sur $(X^n,\mathcal{A}^{\otimes n})$ dont les marginales sont absolument continues par rapport à μ, alors $(X^n,\mathcal{A}^{\otimes n},\sigma,T^{\times n})$ est conservatif et ses composantes ergodiques sont des combinaisons de graphes et de produit directs basés sur $(X,\mathcal{A},\mu,T)$.

Décrivons plus formellement les mesures impliquées dans (P2). Pour tout $n\ge 1$, toute partition π_n de $\{1,\dots,n\}$ et pour $\kappa_n=(k_i)_{1\le i\le n}$, on définit une mesure $m_{\pi_n}^{\kappa_n}$ sur X^n par

$$m_{\pi_n}^{\kappa_n}\left(A_1\times\cdots\times A_n\right) := \prod_{P\in\pi_n}\mu\left(\bigcap_{i\in P}T^{-k_i}A_i\right).$$

Ces mesures sont $T^{\times n}$-invariantes et chaque système $\left(X^n,\mathcal{A}^{\otimes n},m_{\pi_n}^{\kappa_n},T^{\times n}\right)$ est isomorphe à $\left(X^{\sharp\pi_n},\mathcal{A}^{\otimes\pi_n},\mu^{\otimes\sharp\pi_n},T^{\times\pi_n}\right)$.

L'hypothèse (P2) indique que pour tout $n\ge 1$, chaque mesure σ est une combinaison des mesures du type $m_{\pi_n}^{\kappa_n}$.

Le théorème désiré s'énonce alors comme suit :

Théorème 68. [**12**] *Soit $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ satisfaisant à (P1) et (P2). Tout T-processus ponctuel ergodique ayant des moments de tous ordres est un SuShi.*

Remarque 69. Nous sommes arrivés à montrer qu'on peut, quel que soit le système $(X,\mathcal{A},\mu,T)$, construire un T-processus ponctuel ergodique n'ayant pas de moment d'ordre 2 et qui n'est pas un SuShi.

La preuve de ce Théorème nécessite plusieurs étapes, la première consistant à analyser complètement les interactions entre les points du T-processus ponctuel qui nous intéresse, où par interaction nous entendons la présence de points d'une même T-orbite.

La première observation dans ce sens est la suivante :

Proposition 70. [**12**] *Un T-processus ponctuel N avec des moments d'ordre 2 défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, S)$ vérifie, pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, si $x \in N(\omega)$, alors* $\sharp\left\{k \in \mathbb{Z}, T^k x \in N(\omega)\right\} < +\infty$.

Autrement dit, un tel T-processus ponctuel ne voit que des morceaux finis de T-orbites. La preuve de ce résultat reposant entièrement sur le calcul de Palm est un peu technique, nous l'omettons.

Fort de cette première information, nous allons pouvoir décortiquer notre T-processus ponctuel en des T-processus ponctuels plus simples sans interaction interne (libres) et aussi relativement aux autres (mutuellement dissociés).

Définition 71. On dit qu'un T-processus ponctuel N défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, S)$ est *libre* si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $\mathbb{P}$ -presque tout $\omega \in \Omega$, $N(\omega) \cap N(S^n\omega) = \emptyset$.

Deux T-processus ponctuels N_1 et N_2 sont dits T-dissociés si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour $\mathbb{P}$ -presque tout $\omega \in \Omega$, $N_1(\omega) \cap N_2(S^n\omega) = \emptyset$.

Ainsi, la liberté d'un T-processus ponctuel N signifie que les points d'une réalisation donnée sont tous sur des T-orbites différentes, tandis que la dissociation de deux T-processus ponctuels se manifeste, pour une réalisation donnée, par l'absence de points de l'un sur la même T-orbite d'un point de l'autre.

On obtient alors facilement :

Proposition 72. [**12**] *Soit N un T-processus ponctuel avec des moments d'ordre 2 défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, S)$. Il existe un ensemble I, fini ou dénombrable, une famille $\{F_i\}_{i\in I}$ de parties finies de $\mathbb{N}$, et une famille $\{N_{F_i}\}_{i\in I}$ de T-processus ponctuels N-mesurables, libres et mutuellement dissociés tels que :*

$$N = \sum_{i\in I}\left(\sum_{k\in F_i} N_{F_i} \circ S^k\right)$$

Les briques élémentaires du processus N sont donc les processus libres et mutuellement dissociés N_{F_i} qu'il s'agit à présent d'étudier.

Le lemme technique suivant permet de relier liberté et dissociation avec les mesures de moments :

Lemme 73. [**12**] *Soient $N_1, \ldots, N_n$ des T-processus ponctuels ayant des moments de tous ordres et définis sur un même système ergodique $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, S)$. Supposons qu'il existe $c > 0$, des entiers $2 \le j \le n$, $k_2, \ldots, k_j$ et une mesure ν sur X^{n-j} σ-finie non-nulle et $T^{\times(n-j)}$-invariante tels que, pour tous ensembles $A_1, \ldots, A_n$ de $\mathcal{A}_f$,*

$$\mathbb{E}\left[N_1(A_1)\cdots N_n(A_n)\right] \ge c\mu\left(A_1 \cap T^{-k_2}A_2 \cap \cdots \cap T^{-k_j}A_j\right)\nu\left(A_{j+1} \times \cdots \times A_n\right)$$

Alors, pour tout $A \in \mathcal{A}_f$,

$$\mathbb{P}\left(A \cap N_1 \cap T^{-k_2}N_2 \cap \cdots \cap T^{-k_j}N_j \neq \emptyset\right) > 0.$$

Avec la réciproque partielle suivante :

Proposition 74. [**12**] *Soit N un T-processus ponctuel de carré intégrable dont la mesure de moments d'ordre 2 vérifie*

$$M_2^N(A_1 \times A_2) = \mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_1)\mu(A_2).$$

Alors N est un T-processus ponctuel libre.

En particulier, mais on s'y attendait, un T-processus de Poisson associé à la suspension $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*, T_*)$ est libre. Nous voilà maintenant en mesure d'identifier les processus libres obtenus dans la décomposition de la Proposition 72 :

THÉORÈME 75. [**12**] *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ satisfaisant à (P1) et (P2). Tout T-processus ponctuel ergodique, libre et ayant des moments de tous ordres est un T-processus de Poisson d'intensité $\alpha\mu$ pour un certain $\alpha > 0$.*

DÉMONSTRATION. Commençons par établir la forme des mesures des moments d'un T-processus ponctuel N satisfaisant les hypothèses du Théorème.

L'intensité d'un tel processus est nécessairement de la forme $\alpha\mu$, $\alpha > 0$ et on peut supposer $\alpha = 1$ pour ne pas alourdir les notations.

Les hypothèses (P1) et (P2) ainsi que le Lemme 73 implique que les mesures impliquées dans la décomposition ergodique de la mesure des moments M_n^N sont les mesures $m_{\pi_n}^{\kappa_n}$ pour $\kappa_n = (0, \ldots, 0)$ que nous notons encore m_{π_n}.

Ainsi, pour tout $n \geq 1$, il existe des nombres positifs c_{π_n} tels que

$$M_n^N = \sum_{\pi_n \in \mathcal{P}_n} c_{\pi_n} m_{\pi_n}.$$

On vérifie aisément qu'un processus de Poisson d'intensité μ a le même type de mesures des moments.

Nous allons déterminer par récurrence les coefficients c_{π_n} en commençant par remarquer au préalable que le coefficient correspondant à la mesure diagonale (i.e. quand π_n est la partition en n singletons) est toujours 1 (ceci est d'ailleurs valable pour n'importe quel T-processus ponctuel d'intensité μ ayant des moments de tous ordres). L'hypothèse de récurrence sera, que pour chaque $n \geq 1$, M_n^N sera la mesure des moments d'un T-processus de Poisson d'intensité μ.

L'initialisation étant évidente, considérons $n \geq 1$ et supposons que l'hypothèse est vérifiée jusqu'à cet entier. Soient $A_1, \ldots, A_{n+1}$ des ensembles de $\mathcal{A}_f$ et soit $K \subsetneq \{1, \ldots, n+1\}$, non vide. Par le Théorème ergodique, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{l} \sum_{k=1}^{l} \mathbb{E}\left[\prod_{i \in K} N(A_i) \left(\prod_{j \in K^c} N(A_j) \circ S^k\right)\right] \\
\longrightarrow_{l \to \infty} \mathbb{E}\left[\prod_{i \in K} N(A_i)\right] \mathbb{E}\left[\prod_{j \in K^c} N(A_j)\right] \\
= M_{\sharp K}^N \left(\prod_{i \in K} A_i\right) M_{n+1-\sharp K}^N \left(\prod_{j \in K^c} A_j\right)
\end{aligned}$$

On a par ailleurs aussi

$$\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l}\mathbb{E}\left[\prod_{i\in K}N\left(A_i\right)\left(\prod_{j\in K^c}N\left(A_j\right)\circ S^k\right)\right]$$
$$=\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l}M_{n+1}^{N}\mathbb{E}\left[T^{-\epsilon_k(1)}A_1\times\cdots\times T^{-\epsilon_k(n+1)}A_{n+1}\right]$$
$$=\sum_{\pi_{n+1}\in\mathcal{P}_{n+1}}c_{\pi_{n+1}}\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l}m_{\pi_{n+1}}\left(T^{-\epsilon_k(1)}A_1\times\cdots\times T^{-\epsilon_k(n+1)}A_{n+1}\right)$$
$$=\sum_{\pi_{n+1}\in\mathcal{P}_{n+1}}c_{\pi_{n+1}}\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l}\prod_{P\in\pi_{n+1}}\mu\left(\bigcap_{i\in P}T^{-\epsilon_k(i)}A_i\right)$$

où $\epsilon_k(i) := k$ si $i \in K$ et $\epsilon_k(i) := 0$ sinon.

Pour chaque partition π_{n+1}, deux situations se présentent : soit K est une réunion d'atomes de π_{n+1} et alors $\mu\left(\bigcap_{i\in P}T^{-\epsilon_k(i)}A_i\right)=\mu\left(\bigcap_{i\in P}A_i\right)$, soit il existe au moins un atome de π_{n+1} qui contient un indice $i \in K$ et un indice $j \in K^c$ et donc $\epsilon_k(i) = k$ et $\epsilon_k(j) := 0$. Dans ce cas, on a, pour une certaine constante $C > 0$:

$$m_{\pi_{n+1}}\left(T^{-\epsilon_k(1)}A_1\times\cdots\times T^{-\epsilon_k(n+1)}A_{n+1}\right)\leq C\mu\left(A_j\cap T^{-k}A_i\right).$$

Mais comme T est une transformation ergodique préservant une mesure infinie :

$$\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l}\mu\left(A_j\cap T^{-k}A_i\right)\to 0.$$

On a donc montré que si $\mathcal{P}_{n+1}^{K}$ désigne l'ensemble des partitions π_{n+1} où K est une réunion d'atomes de π_{n+1}, la contribution des partitions de $\mathcal{P}_{n+1}\setminus\mathcal{P}_{n+1}^{K}$ est nulle. On déduit alors des égalités au dessus :

$$M_{\sharp K}^{N}\left(\prod_{i\in K}A_i\right)M_{n+1-\sharp K}^{N}\left(\prod_{j\in K^c}A_j\right)=\sum_{\pi_{n+1}\in\mathcal{P}_{n+1}^{K}}c_{\pi_{n+1}}m_{\pi_{n+1}}\left(A_1\times\cdots\times A_{n+1}\right)$$

Comme $\emptyset \notin K \subsetneqq \{1,\ldots,n+1\}$, les décompositions ergodiques de $M_{\sharp K}^{N}$ et $M_{n+1-\sharp K}^{N}$ ne font intervenir que des coefficients c_π pour $\pi \in \mathcal{P}_1\cup\cdots\cup\mathcal{P}_n$. En identifiant alors les décompositions ergodiques des deux membres de l'égalité ci-dessus, on s'aperçoit que les coefficients $c_{\pi_{n+1}}$ pour $\pi_{n+1}\in\mathcal{P}_{n+1}^{K}$ sont entièrement déterminés par les coefficients correspondants aux partitions de $\mathcal{P}_1\cup\cdots\cup\mathcal{P}_n$.

Il s'agit à présent de remarquer que la méthode s'applique de manière rigoureusement identique au processus de Poisson d'intensité μ.

En laissant K parcourir tous les sous-ensembles stricts de $\{1,\ldots,n+1\}$ et en utilisant l'hypothèse de récurrence, on se rend compte que l'on peut identifier tous sauf un coefficients de la décomposition ergodique de M_{n+1}^{N} comme ceux de la mesure des moments d'ordre n d'un processus de Poisson d'intensité μ. Seul le coefficient correspondant à la mesure diagonale ne peut être déduit par cette méthode mais nous savons déjà que ce coefficient vaut 1. La récurrence est donc achevée.

Il reste finalement à observer que la connaissance des mesures des moments de tous ordres suffisent à identifier la loi d'un processus de Poisson. $\square$

Pour finir la preuve du théorème principal 68, on doit finalement montrer le résultat suivant dont nous ne détaillerons pas la preuve qui combine de nouveau le théorème ergodique et le lemme 73.

THÉORÈME 76. [**12**] *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ *satisfaisant à (P1) et (P2) et soient* $N_1, \ldots, N_k$ *des* T*-processus ponctuels de Poisson définis sur un même système ergodique* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, S)$*. Si ces processus sont mutuellement dissociés alors ils sont indépendants.*

6.1. Suspensions $\mathcal{P}a\mathcal{P}$

Cette section traite de la propriété qui réalise pour l'instant le mieux l'objectif de minimisation de l'écart de complexité entre une base et sa suspension.

DÉFINITION 77. Une suspension de Poisson ergodique est dite $\mathcal{P}a\mathcal{P}$ si tous ses autocouplages ergodiques sont Poissonniens.

Cette définition est là encore l'analogue complet de la propriété GaG des systèmes Gaussiens et, tout comme le Théorème de Foiaş-Strătilă, a permis d'obtenir des processus Gaussiens GaG, le théorème 68 nous a permis d'obtenir des suspensions $\mathcal{P}a\mathcal{P}$. Précisons que dans un travail non publié, en collaboration avec François Parreau, nous avons pu obtenir des systèmes $\mathcal{P}a\mathcal{P}$, cependant, ces suspensions étaient basées sur des systèmes non ergodiques et l'obtention de la propriété reposait entièrement sur cette non-ergodicité. Rappelons que, tout comme une suspension de Poisson (ou plutôt la classe des suspensions qui lui sont isomorphes par isomorphisme Poissonnien) est un invariant pour une transformation, la propriété $\mathcal{P}a\mathcal{P}$ est également un invariant pour une transformation. Si la propriété $\mathcal{P}a\mathcal{P}$ avait été réservée aux transformations non ergodiques, son intérêt s'en serait trouvé limité.

Ainsi la propriété $\mathcal{P}a\mathcal{P}$ est celle qui permet d'obtenir le plus grand contrôle de la complexité entre la base et la suspension, comme détaillée dans la section précédente.

THÉORÈME 78. [**12**] *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ *satisfaisant à (P1) et (P2).* $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*, T_*)$ *est* $\mathcal{P}a\mathcal{P}$*.*

DÉMONSTRATION. Considérons $(X^* \times X^*, \mathcal{A}^* \otimes \mathcal{A}^*, m, T_* \times T_*)$, un autocouplage ergodique et soient N et N' les T-processus de Poisson correspondants aux facteurs marginaux. On décompose facilement N et N' en groupant les points qui sont sur une même orbite. On obtient ainsi

$$N := N_\infty + \sum_{n \in I} N_n$$

et

$$N' := N'_\infty + \sum_{n \in I} N_n \circ T^n$$

où $I \subset \mathbb{Z}$ et N_n correspond aux points de N_n dont les itérés par T^n se trouvent sur N'. N_∞ et N'_∞ correspondent aux points de N et N' qui ne sont pas des itérés de points de N' et N respectivement. Par construction les processus $\{N_n\}_{n \in I}$, N_∞ and N'_∞ sont des T-processus ponctuels libres et mutuellement dissociés définis sur un même système dynamique ergodique. D'après les Théorèmes 75 et 76 Ces processus sont tous des T-processus de Poisson indépendants. On déduit alors facilement la propriété d'infini divisibilité du couplage. $\square$

On décrit simplement l'autocouplage Poissonnien qu'on a identifié dans la preuve ci-dessus en donnant la forme du sous-couplage associé au niveau de la base (voir Section 2.3.2) :

En notant $\alpha_n\mu$ l'intensité de N_n, on obtient l'opérateur sous-Markovien du sous-couplage :

$$\Theta := \sum_{n\in I} \alpha_n U_{T^n}$$

Remarque 79. Ainsi pour une telle suspension, on pourrait introduire la notion de “suspension de Poisson à autocouplages minimaux” puisque ici, les seuls autocouplages ergodiques sont ceux qui sont toujours disponibles. Bien sûr, cette remarque permet aussi d'observer qu'une suspension de Poisson n'est jamais à autocouplages minimaux, ni même simple. En effet, dès que I n'est pas un singleton, on obtient un couplage Poissonnien ergodique qui n'est pas porté par un graphe.

Plus généralement, on a pu montrer dans [**20**] que toute suspension de Poisson ergodique est disjointe des systèmes distalement simples.

On peut préciser les propriétés ergodiques des suspensions que nous étudions.

Corollaire 80. [**12**] *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ satisfaisant à (P1) et (P2). $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*, T_*)$ est modérément mélangeante (i.e. mildly mixing), sans facteur non trivial (i.e. premier) et son centralisateur est trivial.*

Ainsi, on obtient de nouvelles suspensions premières (voir le chapitre 5).

6.2. Disjonction

Les suspensions que nous avons construites ont une structure extrêmement contrainte qui permet d'obtenir des résultats de disjonction assez drastiques.

Théorème 81. [**12**] *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ satisfaisant à (P1) et (P2) et possédant une “loi des grands nombres mesurable” et soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, S)$ un système dynamique ($\mathbb{P}(\Omega) = 1$). Si $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*, T_*)$ n'est pas disjoint de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, S)$, alors ce dernier possède $\left(X^*, \mathcal{A}^*, (\alpha\mu)^*, T_*\right)$ comme facteur pour un certain $\alpha > 0$.*

La preuve originale de ce résultat est relativement fastidieuse et nécessite cette hypothèse de *loi des grands nombres mesurable* dont nous ne rappellerons pas la définition. En effet, nous étions convaincus que cette hypothèse était superflue et nous avons récemment donné une nouvelle preuve du théorème, sans cette hypothèse. Celle-ci est nettement plus courte mais repose sur une extension du Théorème 68 à des mesures aléatoires et plus seulement des processus ponctuels simples.

Rappelons la conjecture que faisait Furstenberg dans [**10**] où il introduisait les notions de couplage et de disjonction.

Conjecture 82. *(Furstenberg) Si deux systèmes (probabilistes) ne sont pas disjoints alors ils possèdent un facteur commun non trivial.*

Rudolph a montré dans [**36**] que cette conjecture était fausse en construisant une “machinerie à exemples/contre-exemples” répondant à des questions générales qui se présentaient alors. La famille de systèmes $\left(X^*, \mathcal{A}^*, (\alpha\mu)^*, T_*\right)$, $\alpha > 0$, fournit également, de par la structure très simple de leurs couplages, une source d'exemples pour certains phénomènes. Nous avons par exemple :

Proposition 83. [**12**] *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ *satisfaisant à (P1) et (P2) et possédant une "loi des grands nombres mesurable".*

La suspension $\left((X \times [0,1])^*, (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^*, (\mu \otimes \lambda)^*, (T \times Id)_*\right)$ *possède alors un continuum de facteurs, les systèmes* $\left(X^*, \mathcal{A}^*, (\alpha\mu)^*, T_*\right)$, $0 < \alpha \leq 1$ *qui sont non-disjoints, premiers et sans facteur (non-trivial) commun.*

Démonstration. Notons d'abord que

$$\left((X \times [0,1])^*, (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^*, (\mu \otimes \lambda)^*, (T \times Id)_*\right)$$

est une suspension ergodique puisqu'il n'y a pas d'ensemble $T \times Id$-invariants de mesure finie non nulle. Ensuite, on obtient chaque facteur $\left(X^*, \mathcal{A}^*, (\alpha\mu)^*, T_*\right)$, $0 < \alpha \leq 1$, à partir de $\left((X \times [0,1])^*, (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^*, (\mu \otimes \lambda)^*, (T \times Id)_*\right)$ grâce à l'application :

$$\nu \in (X \times [0,1])^* \mapsto \nu\left(\cdot \times [0, \alpha)\right)$$

et ces facteurs sont non-disjoints deux à deux car, en prenant $\alpha_1 < \alpha_2$, on a $\nu\left(\cdot \times [0, \alpha_1)\right) \leq \nu\left(\cdot \times [0, \alpha_2)\right)$, ce qui empêche l'indépendance : les facteurs correspondant forment donc au sein de $\left((X \times [0,1])^*, (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^*, (\mu \otimes \lambda)^*, (T \times Id)_*\right)$, un couplage ergodique non trivial.

Ensuite, toujours pour $\alpha_1 < \alpha_2$, $\left(X^*, \mathcal{A}^*, (\alpha_1\mu)^*, T_*\right)$ et $\left(X^*, \mathcal{A}^*, (\alpha_2\mu)^*, T_*\right)$ sont premiers d'après le corollaire 80. S'ils avaient un facteur non-trivial commun, ils seraient donc isomorphes. Or ici, un isomorphisme entre ces deux suspensions engendrerait un couplage Poissonnien (le raisonnement est similaire à 78) et proviendrait ainsi nécessairement d'un isomorphisme entre les bases $(X, \mathcal{A}, \alpha_1\mu, T)$ et $(X, \mathcal{A}, \alpha_2\mu, T)$. Puis, du fait de la propriété $(P2)$, cet isomorphisme ne pourrait être qu'une puissance de T ce qui donnerait enfin $\alpha_1 = \alpha_2$. Ainsi $\left(X^*, \mathcal{A}^*, (\alpha_1\mu)^*, T_*\right)$ et $\left(X^*, \mathcal{A}^*, (\alpha_2\mu)^*, T_*\right)$ n'ont pas de facteur non trivial commun. □

On voit donc, d'une part, que le Théorème 81 permet de se rapprocher au plus près de la conjecture originelle de Furstenberg quand d'autre part, et avec les mêmes systèmes, on obtient un nouveau contre-exemple à cette conjecture grâce à la Proposition 83.

Bien sûr le Théorème 81 trouve un certain nombre d'applications :

Corollaire 84. [**12**] *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ *satisfaisant à (P1) et (P2). La suspension* $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*, T_*)$ *est disjointe de tout système de rang fini*

La preuve repose sur le fait que $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*, T_*)$ (et donc $\left(X^*, \mathcal{A}^*, (\alpha\mu)^*, T_*\right)$ pour tout $\alpha > 0$) est modérément mélangeante et donc disjoint de tout système rigide puis on conclut en utilisant le Théorème 81 et le résultat suivant provenant de [**27**] :

Proposition 85. [**27**] *Si une suspension de Poisson ergodique est de rang fini, alors elle rigide.*

Bien sûr, la conjecture est qu'une suspension de Poisson n'est jamais de rang fini, tout comme dans le cas Gaussien (voir [**6**]).

On a enfin :

Corollaire 86. [**12**] *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ *satisfaisant à (P1) et (P2). La suspension* $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*, T_*)$ *est disjointe de tout système Gaussien.*

Ce résultat met, en quelque sorte, un terme à la quête consistant à montrer que les suspensions de Poisson peuvent être des objets très différents des systèmes Gaussiens.

Appendice

A la lumière des résultats obtenus, exposés dans le dernier chapitre, plusieurs questions se posent tout naturellement. D'une part, la propriété $\mathcal{P}a\mathcal{P}$ est-elle une propriété "commune" au sein des suspensions de Poisson ? Nous espérons trouver à l'avenir des critères plus simples sur les transformations en mesure infinie qui induisent la propriété $\mathcal{P}a\mathcal{P}$ pour leur suspension associée. Il est évident qu'un tel travail ne sera possible qu'en explorant plus à fond l'univers des transformations en mesure infinie qui reste encore largement méconnu.

Par analogie avec la mesure finie, nous pensons que les systèmes d'origine géométrique tels que les flots horocycliques en mesure infinie fourniront sûrement des exemples particulièrement intéressants, mais leur étude, particulièrement difficile, n'a pour l'instant pas été aussi poussée qu'en mesure finie, notamment pour les aspects qui nous intéressent ("couplages" essentiellement). C'est un travail que nous poursuivons en collaboration avec Elise Janvresse (Amiens) et Thierry de la Rue (Rouen).

Une autre direction que nous explorons depuis peu est le cas non-singulier : si T est une transformation non-singulière de $(X, \mathcal{A}, \mu)$, alors T_* est une transformation non-singulière de $(X^*, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ si et seulement si $\sqrt{\frac{d\mu\circ T^{-1}}{d\mu}} - 1 \in L^2(\mu)$. Ce cas a été très peu étudié jusque-là et nous avons entrepris, en compagnie d'Alexandre Danilenko (Kharkov) et de Zemer Kosloff (Jerusalem), d'explorer la théorie ergodique de ces objets, qui s'avère déjà très riche. Nous avons présenté plusieurs exposés sur le sujet et deux articles ont été acceptés pour publication.

Bibliographie

[1] O. N. Ageev. On the spectrum of cartesian powers of classical automorphisms. *Math. Notes*, 68(5-6) :547–551, 2000.

[2] I.P. Cornfeld, S.V. Fomin, and Y. G. Sinaï. *Ergodic Theory*. Springer-Verlag, 1982.

[3] D.J. Daley and D. Vere-Jones. *An introduction to the theory of point processes*. Springer-Verlag, New York, 1988.

[4] T. de la Rue. Entropie d'un système dynamique Gaussien : cas d'une action de Z^d. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 317 :191–194, 1993.

[5] T. de la Rue. Espaces de Lebesgue. *Séminaire de probabilités de Strasbourg*, 27 :15–21, 1993.

[6] T. de la Rue. Rang des systèmes dynamiques gaussiens. *Israel J. Math.*, 104 :261–283, 1998.

[7] T. de la Rue and E. Janvresse. Zero Krengel entropy does not kill Poisson entropy. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 48(2) :368–376, 2012.

[8] Y. Derriennic, K. Frączek, M. Lemańczyk, and F. Parreau. Ergodic automorphisms whose weak closure of off-diagonal measures consists of ergodic self-joinings. *Colloq. Math.*, 110 :81–115, 2008.

[9] C. Foiaş and Ş. Strătilă. Ensembles de Kronecker dans la théorie ergodique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 267 :166–168, 1968.

[10] H. Furstenberg. Disjointness in ergodic theory, minimal sets and diophantine approximation. *Math. Systems Theory*, 1 :1–49, 1967.

[11] É. Janvresse, T. Meyerovitch, E. Roy, and T. de la Rue. Poisson suspensions and entropy for infinite transformations. *T.A.M.S.*, 362 :3069–3094, 2008.

[12] É. Janvresse, E. Roy, and T. de la Rue. Poisson Suspensions and SuShis. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 50(6) :1301–1334, 2017.

[13] É. Janvresse, E. Roy, and T. de la Rue. Invariant measures for Cartesian powers of Chacon infinite transformation. *Israel J. Math.*, 224 :1–37, 2018.

[14] É. Janvresse, E. Roy, and T. de la Rue. Ergodic Poisson splittings. *Ann. Probab.*, 2019. To appear.

[15] É. Janvresse, E. Roy, and T. de la Rue. Nearly finite Chacon transformation. *Annales Henri Lebesgue*, 2019. To appear.

[16] E. M. Klimko and L. Sucheston. On convergence of information in spaces with infinite invariant measure. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 10 :226–235, 1968.

[17] U. Krengel. Entropy of conservative transformations. *Z.Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, 7 :161–181, 1967.

[18] U. Krengel and L. Sucheston. On mixing in infinite measure spaces. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete.*, 13 :150–164, 1969.

[19] G. Last and M. Penrose. Poisson process Fock space representation, chaos expansion and covariance inequalities. *Probab. Theory Related Fields*, 150(3-4) :663–690, 2011.

[20] M. Lemańczyk, F. Parreau, and E. Roy. Joining Primeness and disjointness from infinitely divisible systems. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 139 :185–199, 2011.

[21] M. Lemańczyk, F. Parreau, and J.-P. Thouvenot. Gaussian automorphisms whose ergodic self-joinings are Gaussian. *Fund. Math.*, 164 :253–293, 2000.

[22] F. A. Marchat. *A class of measure-preserving transformations arising by the Poisson process*. PhD thesis, Berkeley, December 1978.

[23] G. Maruyama. Infinitely divisible processes. *Theory Probab. Appl.*, 15(1) :1–22, 1970.

[24] T. Meyerovitch. Quasi-factors and relative entropy for infinite-measure-preserving transformations. *Israel J. Math.*, 185 :43–60, 2011.

[25] D. S. Ornstein and B. Weiss. Entropy and isomorphism theorems for actions of amenable groups. *J. Analyse Math.*, 48 :1–147, 1987.

[26] F. Parreau and E. Roy. Poisson joinings of poisson suspensions. preprint, 2007.

[27] F. Parreau and E. Roy. Prime Poisson suspensions. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 35(7) :2216–2230, 2015.

[28] W. Parry. *Entropy and generators in ergodic theory.* W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.

[29] W. Parry. *Topics in ergodic theory.* Cambridge University Press, 1981.

[30] V.A. Rokhlin. On the fundamental ideas of measure theory. *Mat. Sb. (N.S.)*, 67(25) :107–150, 1949.

[31] V.A. Rokhlin. Lectures on the entropy theory of measure-preserving transformations. *Russ. Math. Surv.*, 22 :1–52, 1967.

[32] E. Roy. *Mesures de Poisson, infinie divisibilité et propriétés ergodiques.* PhD thesis, Université Paris 6, 2005.

[33] E. Roy. Poisson suspensions and infinite ergodic theory. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 29(2) :667–683, 2009.

[34] E. Roy. Poisson-Pinsker factor and infinite measure preserving group actions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 138(6) :2087–2094, 2010.

[35] E. Roy. Maharam extension and stationary stable processes. *Ann. Probab.*, 3 :1357–1374, 2012.

[36] D. J. Rudolph. An example of a measure-preserving transformation with minimal self-joinings and applications. *J. Analyse Math.*, 35 :97–122, 1979.

[37] K.-I. Sato. *Lévy processes and infinitely divisible distributions.* Cambridge University Press, 1999.

[38] J.-P. Thouvenot. Une classe de systèmes pour lesquels la conjecture de Pinsker est vraie. *Israel J. Math.*, 21(2–3) :208–214, 1975.

[39] J.-P. Thouvenot. Utilisation des processus gaussiens en théorie ergodique. *Astérisque*, (236) :303–308, 1996.

[40] N. Wiener. The homogeneous chaos. *Am J. Math.*, 60 :897–936, 1938.