Mémoire

en vue de l'obtention de

l'Habilitation à Diriger des Recherches

en

Mathématiques

présenté à

l'Université Sorbonne Paris Nord

par

Federico Scavia

Contributions à la cohomologie galoisienne

soutenu publiquement le 8 avril 2026.

Rapporteurs :

M. David HARARI	Professeur (Université Paris Saclay)
M. Ján MINÁČ	Professeur (Western University, Canada)
M. Burt TOTARO	Professeur (University of California, Los Angeles, États-Unis)

Jury :

M. Olivier BENOIST	Directeur de recherche (CNRS et École Normale Supérieure de Paris)
M. Philippe GILLE	Directeur de recherche (CNRS et Université Claude Bernard Lyon 1)
M. David HARARI	Professeur (Université Paris Saclay)
M. Marc LEVINE	Professeur (Universität Duisburg-Essen, Allemagne)
Mme. Anne QUÉGUINER–MATHIEU	Maîtresse de conférences HDR (Université Sorbonne Paris Nord)
M. Alexei SKOROBOGATOV	Professeur (Imperial College London, Royaume-Uni)
M. Olivier WITTENBERG	Directeur de recherche (CNRS et Université Sorbonne Paris Nord)

Remerciements

Je remercie David Harari, Ján Mináč et Burt Totaro d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce manuscrit. Je remercie également Olivier Benoist, Philippe Gille, David Harari, Marc Levine, Anne Quéguiner-Mathieu, Alexei Skorobogatov et Olivier Wittenberg d'être membres de mon jury d'HDR.

Je remercie aussi mes collaborateurs Alexis Bouthier, Jean-Louis Colliot-Thélène, Kęstutis Česnavičius, Louis Esser, Andrew Fiori, Dmitry Kubrak, Ivan Martino, Alexander Merkurjev, Alena Pirutka, Zinovy Reichstein et Fumiaki Suzuki, sans qui les travaux présentés ici n'existeraient pas.

J'aimerais aussi exprimer ma gratitude envers l'équipe d'arithmétique et géométrie algébrique pour m'avoir si bien accueilli depuis mon arrivée. Je remercie tout particulièrement Matteo Tamiozzo et Olivier Wittenberg pour les nombreuses discussions mathématiques de ces deux dernières années.

Un grand merci également à Yolande Jimenez et Leïla Segarel pour leur aide constante dans l'organisation des missions et du séminaire de l'équipe, ainsi qu'à Grégory Ginot, directeur du LAGA, sans le soutien duquel je n'aurais sans doute pas réussi à franchir l'obstacle de la bureaucratie et à parvenir jusqu'à la soutenance de cette HDR.

Je voudrais remercier chaleureusement Jean-Louis Colliot-Thélène, avec qui j'ai eu la grande chance de travailler et auprès duquel j'ai énormément appris lors d'un semestre passé à Orsay pendant ma troisième année de thèse, ainsi qu'à de nombreuses autres occasions par la suite.

J'adresse également mes plus sincères remerciements à Alexander Merkurjev et Burt Totaro, avec qui j'ai eu l'honneur et le plaisir de discuter de mathématiques chaque semaine à UCLA pendant mon postdoctorat.

Enfin, je voudrais exprimer ma profonde gratitude à Zinovy Reichstein, qui a été mon directeur de thèse à l'Université de la Colombie-Britannique. C'est lui qui m'a introduit à ces thématiques de recherche et qui m'a guidé pendant les quatre premières années de ma vie de chercheur. Je lui dois une part fondamentale de ma formation mathématique et professionnelle.

Table des matières

Liste des publications

Travaux couvrant la période de la thèse

[1] F. Scavia, *Essential dimension of representations of algebras*, Commentarii Mathematici Helvetici **95** (2020), 661–702.

[2] F. Scavia, *Rational Picard group of moduli of pointed hyperelliptic curves*, International Math. Research Notices **21** (2020), 8027–8056.

[3] F. Scavia, *On the motivic class of an algebraic group*, Algebra & Number Theory **14** (2020), no. 4, 855–866.

[4] F. Scavia, *Retract rationality and algebraic tori*, Canadian Math. Bulletin **63** (2020), no. 1, 173–186.

[5] F. Scavia, *Essential dimension and genericity for quiver representations*, Documenta Mathematica **25** (2020), 329–364.

[6] I. Martino et F. Scavia, *Motivic classes of classifying stacks of some semi-direct products*, Journal of Algebra **544** (2020), 62–74.

[7] F. Scavia, *On the Noether problem for torsion subgroups of tori*, Pacific Journal of Mathematics **306** (2020), no. 2, 699–719.

[8] Z. Reichstein et F. Scavia, *The Noether problem for spinor groups of small rank*, Journal of Algebra **548** (2020), 134–152.

[9] A. Fiori et F. Scavia, *Embeddings of maximal tori in groups of type $F4$*, Pacific Journal of Mathematics **311** (2021), no. 1, 53–88.

[10] F. Scavia, *Torsion classes in the equivariant Chow groups of algebraic tori*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure **56** (2023), no. 2, 571–587.

[11] J.-L. Colliot-Thélène et F. Scavia, *Sur la conjecture de Tate entière pour le produit d'une courbe et d'une surface CH_0-triviale sur un corps fini*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Series II **72** (2023), 2895–2927.

[12] F. Scavia, *Motivic classes and the integral Hodge Question*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **359** (2021), no. 3, 305–311.

[13] F. Scavia, *On the Mixed Tate property and the motivic class of the classifying stack of a finite group*, Algebra & Number Theory **16** (2022), No. 10, 2265–2287.

[14] Z. Reichstein et F. Scavia, *Essential dimension of extensions of finite groups by tori.* Algebraic Geometry **8** (2021), no. 6, 749–769.

[15] F. Scavia, *Steenrod operations on the de Rham cohomology of algebraic stacks*, Journal de l'Institut de Mathématiques de Jussieu **22** (2023), no. 2, 493–540.

[16] F. Scavia, *Sur la conjecture de Tate entière pour certains produits en dimension 3 sur un corps fini*, Épijournal de Géométrie Algébrique **6** (2022), Art. 21.

[17] Z. Reichstein et F. Scavia, *The behavior of essential dimension under specialization.* Épijournal de Géométrie Algébrique **6** (2022), Art. 22, 28 pp.

[18] Z. Reichstein et F. Scavia, *The behavior of essential dimension under specialization II.* Algebra & Number Theory **17** (2023), no. 11, 1925–1958.

Travaux complétés après l'obtention du doctorat

[19] F. Scavia, *Pathologies du groupe des classes de R-équivalence d'un groupe algébrique linéaire*, Mathematische Annalen **387** (2023), 1333–1342.

[20] F. Scavia et F. Suzuki, *Non-algebraic geometrically trivial cohomology classes over finite fields.* Advances in Mathematics **458**, Part A (2024), article no. 109964, 30 pp.

[21] F. Scavia et F. Suzuki, *Noninjectivity of the cycle class map in continuous l-adic cohomology*, Forum of Mathematics, Sigma **11** (2023), article no. e6, 19 pp.

[22] A. Merkurjev et F. Scavia, *Degenerate fourfold Massey products in Galois cohomology.* Journal of the European Mathematical Society (2024), publié en ligne.

[23] L. Esser et F. Scavia, *Quotient singularities in the Grothendieck ring of varieties.* Journal of Algebraic Geometry **34** (2025), 183–204.

[24] D. Kubrak et F. Scavia, *Eilenberg-Moore spectral sequence and Hodge cohomology of classifying stacks.* Journal of Algebraic Geometry **34** (2025), no. 4, 613–683.

[25] J.-L. Colliot-Thélène et F. Scavia, *Sur l'injectivité de l'application cycle de Jannsen.* in : Perspectives on Four Decades of Algebraic Geometry, In Memory of Alberto Collino, Volume 1, Progr. Math., **351**, Birkhäuser (2025), 151–183.

[26] A. Merkurjev et F. Scavia, *The Massey Vanishing Conjecture for fourfold Massey products modulo 2.* Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure (4) **58** (2025), no. 3, 589–606.

[27] F. Scavia et F. Suzuki, *Two coniveau filtrations and algebraic equivalence over finite fields.* Algebraic Geometry **12** (2025), no. 5, 701–734.

[28] F. Scavia, *Varieties over $\overline{\mathbb{Q}}$ with infinite Chow groups modulo almost all primes.* Journal of the London Mathematical Society (2) **110** (2024), no. 4, article no. e12994, 20 pp.

[29] A. Merkurjev et F. Scavia, *On the Massey Vanishing Conjecture and Formal Hilbert 90.* Proceedings of the London Mathematical Society (3) **130** (2025), no. 3, article no. e70036.

[30] A. Merkurjev et F. Scavia, *Non-formality of Galois cohomology modulo all primes.* Compositio Mathematica **161** (2025), no. 4, 831–858.

[31] A. Merkurjev et F. Scavia, *Galois representations modulo p that do not lift modulo p^2.* Journal of the American Mathematical Society **39** (2026), 73–94.

[32] A. Merkurjev et F. Scavia, *The lifting problem for Galois representations.* Mathematische Annalen **394** (2026), no. 2, 29.

[33] A. Bouthier, K. Česnavičius et F. Scavia, *Generically trivial torsors under constant groups.* Soumis, mai 2025.

[34] J.-L. Colliot-Thélène, A. Pirutka et F. Scavia, *Variétés réelles connexes non stablement rationnelles*. Soumis, juin 2025.

[35] Z. Reichstein et F. Scavia, *Specialization and rigidity*. Soumis, juin 2025.

[36] F. Scavia et F. Suzuki, *On direct summands of products of Jacobians over arbitrary fields*. Soumis, juillet 2025.

[37] Z. Reichstein et F. Scavia, *Brauer classes not split by genus one curves*. Soumis, août 2025.

Introduction

La cohomologie galoisienne est l'étude systématique des groupes de Galois absolus des corps, non pas de manière isolée, mais à travers leurs actions sur des structures algébriques. Depuis les travaux de Hilbert, Noether, et plus tard Artin, Serre et Tate, parmi beaucoup d'autres, il est devenu clair que la cohomologie galoisienne est le langage naturel pour étudier les complexités de l'arithmétique des corps à travers leurs groupes de Galois absolus et leurs invariants : le groupe de Brauer, le groupe de Witt, la K-théorie de Milnor, la cohomologie non abélienne, ...

Dans ce texte, je décris mes contributions principales à la cohomologie galoisienne des corps arbitraires.

- Le Chapitre 1 résume une série de travaux en commun avec Alexander Merkurjev sur la conjecture d'annulation de Massey, formulée par Mináč–Tân, et sur la question de non-formalité de Positselski.
- Le Chapitre 2 décrit la résolution du problème de relèvement pour les représentations galoisiennes, menée en collaboration avec Alexander Merkurjev.
- Le Chapitre 3 est consacré au cas constant de la conjecture de Grothendieck–Serre, résolu en collaboration avec Alexis Bouthier et Kęstutis Česnavičius.
- Le Chapitre 4 présente le premier exemple d'une classe de Brauer qui ne peut être déployée par aucune courbe de genre 1, obtenu en collaboration avec Zinovy Reichstein.

Ce mémoire ne vise pas à présenter l'ensemble de mes travaux, mais à dégager une ligne directrice centrée sur la cohomologie galoisienne. J'ai donc laissé de côté plusieurs de mes travaux sur les cycles algébriques ou la cohomologie non ramifiée, qui explorent des directions intéressantes mais ne s'inscrivent pas dans un programme continu et unifié comparable à celui exposé ici.

Notations

Pour tout groupe profini Γ, tout Γ-module discret M, c'est-à-dire tout Γ-module continu muni de la topologie discrète, et tout entier $i \geq 0$, on note $H^i(\Gamma, M)$ le i-ème groupe de cohomologie (continue) de Γ à coefficients dans M.

Soient F un corps, $F_s \subset \overline{F}$ une clôture séparable et une clôture algébrique de F, et

$\Gamma_F := \mathrm{Gal}(F_s/F)$ le groupe de Galois absolu de F. On écrit $F^\times$ pour le groupe des unités dans F. Pour tout Γ_F-module discret M, on pose $H^i(F, M) := H^i(\Gamma_F, M)$. On note $\mathrm{Br}(F)$ le groupe de Brauer de F. Si E est une F-algèbre étale, on note encore $\mathrm{Br}(E)$ le groupe de Brauer de E. Pour tout entier $n \geq 1$ inversible dans F, on note $\mu_n \subset F_s^\times$ le Γ_F-module des racines n-ièmes de l'unité.

Soient p un nombre premier et $\zeta \in F$ une racine primitive p-ième de l'unité (donc $\mathrm{car}(F) \neq p$). Pour tous $a, b \in F^\times$, on définit $(a, b)_p \in \mathrm{Br}(F)$ comme la classe de Brauer de l'algèbre cyclique de degré p sur F engendrée par deux variables u, v modulo les relations $u^p = a$, $v^p = b$ et $uv = \zeta vu$. Pour tout $a \in F^\times$, on note $\chi_a \in H^1(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ le caractère continu $\chi_a \colon \Gamma_F \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ correspondant à a via la théorie de Kummer : pour tout $\sigma \in \Gamma_F$ on a $\sigma(a^{1/p}) = \zeta^{\chi_a(\sigma)} \cdot a^{1/p}$, où $a^{1/p} \in F_s^\times$ est une racine p-ième de a. L'homomorphisme χ_a dépend du choix de ζ mais pas du choix de $a^{1/p}$. Pour tous $a_1, \dots, a_n \in F^\times$, on pose

$$F_{a_1,\dots,a_n} := F[x_1, \dots, x_n]/(x_1^p - a_1, \dots, x_n^p - a_n).$$

C'est une $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$-algèbre galoisienne sur F, qui est un corps si les $a_i F^{\times p}$ sont $\mathbb{F}_p$-linéairement indépendants dans $F^\times/F^{\times p}$.

Un F-groupe est un schéma en groupes localement de type fini sur F. Pour un F-groupe G et un F-schéma X, on note $H^1(X, G)$ l'ensemble pointé des classes d'isomorphie des G-torseurs fppf sur X. Si A est un groupe abélien ou un F-groupe commutatif, et $n \geq 0$ est un entier, $A[n]$ est par définition le sous-groupe de n-torsion de A.

On rappelle qu'un entier n est dit positif si $n \geq 0$ et strictement positif si $n > 0$.

1. Produits de Massey en cohomologie galoisienne

Soit A un anneau différentiel gradué, c'est-à-dire une $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-graduation $A = \oplus_{i\geq 0} A^i$ munie d'une différentielle ∂ de degré 1 satisfaisant la règle de Leibniz. La cohomologie $H^*(A)$ hérite alors une structure d'anneau gradué, dont la multiplication est appelée le *cup-produit* et se note $\cup$. Outre ce produit binaire, $H^*(A)$ possède des opérations d'ordre supérieur, les *produits de Massey n-uples* ($n \geq 2$).

Dans ce texte, nous ne considérerons que les produits de Massey d'éléments de degré 1. Étant donnés $n \geq 2$ éléments $a_1, \dots, a_n \in H^1(A)$, le produit de Massey $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ est, par définition, un certain sous-ensemble de $H^2(A)$. Pour $n = 2$, on retrouve le cup-produit : $\langle a_1, a_2 \rangle = \{a_1 \cup a_2\}$. On dit qu'un produit de Massey est *défini* s'il est non vide, et qu'il *s'annule* s'il contient 0. Nous n'aurons pas recours à la définition générale et nous nous limiterons à en donner une dans le cas de la cohomologie des groupes.

Pour tout $n \geq 3$ et tous $a_1, \dots, a_n \in H^1(A)$, on a les implications suivantes :

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle \text{ s'annule} \Longrightarrow \langle a_1, \dots, a_n \rangle \text{ est défini} \Longrightarrow a_i \cup a_{i+1} = 0 \ \ (1 \leq i \leq n-1). \quad (1.1)$$

Lorsque $n = 3$, la deuxième implication dans (1.1) est une équivalence : un produit de Massey triple $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ est défini si et seulement si $a_1 \cup a_2 = a_2 \cup a_3 = 0$. En général, aucune autre implication ne peut être inversée.

L'anneau gradué A est dit *formel* s'il existe un anneau différentiel gradué B et des quasi-isomorphismes d'anneaux différentiels gradués

$$A \xleftarrow{\sim} B \xrightarrow{\sim} H^*(A),$$

où $H^*(A)$ est vu comme anneau différentiel gradué avec différentielle $\partial = 0$. Si A est formel, toutes les implications de (1.1) sont des équivalences. En gros, on peut dire que les produits de Massey mesurent l'information sur A qui est perdue lors du passage à $H^*(A)$.

Soit Γ un groupe profini, soit p un nombre premier, et écrivons $C^*(\Gamma, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ pour l'anneau différentiel gradué des cochaînes continues inhomogènes de Γ à coefficients dans

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Les produits de Massey d'éléments de degré 1 admettent une description de nature groupique, due à Dwyer [Dwy75], que nous rappelons maintenant. Pour tout entier $n \geq 2$, nous notons U_{n+1} le groupe des matrices unitriangulaires supérieures dans $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, qui est un p-sous-groupe de Sylow de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Son centre $Z_{n+1} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est constitué des matrices dans U_{n+1} dont les coefficients sont nuls partout sauf pour la diagonale et éventuellement pour le coefficient $(1, n+1)$. Nous définissons le groupe quotient $\overline{\mathrm{U}}_{n+1} \coloneqq \mathrm{U}_{n+1}/Z_{n+1}$, dont les éléments peuvent être visualisés comme des matrices unitriangulaires supérieures avec le coefficient $(1, n+1)$ supprimé. On obtient une suite exacte centrale :

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{U}_{n+1} \longrightarrow \overline{\mathrm{U}}_{n+1} \longrightarrow 1. \tag{1.2}$$

On note $\Delta\colon H^1(F, \overline{\mathrm{U}}_{n+1}) \to H^2(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ l'application en cohomologie non abélienne induite par (1.2). De plus, il existe un diagramme d'homomorphismes surjectifs

$$\mathrm{U}_{n+1} \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \overline{\mathrm{U}}_{n+1} \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n,$$

la surjection de droite étant la projection sur les coefficients de la première diagonale supérieure.

Soient maintenant $\chi_1, \ldots, \chi_n$ des éléments de $H^1(\Gamma, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\Gamma, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Ces caractères définissent un homomorphisme $\chi = (\chi_1, \ldots, \chi_n)\colon \Gamma \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$. Dwyer [Dwy75] a montré que, à signe près, le produit de Massey $\langle \chi_1, \ldots, \chi_n \rangle$ coïncide avec l'ensemble des $\Delta([\overline{\rho}]) \in H^2(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, où $\overline{\rho}\colon \Gamma \to \overline{\mathrm{U}}_{n+1}$ parcourt les relèvements de χ et $[\overline{\rho}] \in H^1(F, \overline{\mathrm{U}}_{n+1})$ est la classe de $\overline{\rho}$. En particulier, le produit de Massey $\langle \chi_1, \ldots, \chi_n \rangle$

– est défini si et seulement si l'homomorphisme χ peut être relevé en un homomorphisme continu $\overline{\rho}\colon \Gamma \to \overline{\mathrm{U}}_{n+1}$, et
– s'annule si et seulement si χ peut être relevé en un homomorphisme continu $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{U}_{n+1}$.

Mináč–Tân [MT17] ont conjecturé que la réciproque de la première implication dans (1.1) devrait toujours être vraie lorsque Γ est le groupe de Galois absolu d'un corps.

Conjecture 1.1 (Mináč–Tân)**.** *Pour tout corps F, tout nombre premier p, et tout entier $n \geq 3$, si le produit de Massey $\langle \chi_1, \ldots, \chi_n \rangle \subset H^2(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est défini pour des caractères $\chi_1, \ldots, \chi_n \in H^1(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, alors il s'annule.*

Si $H^2(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$, ce qui est le cas par exemple si $\mathrm{car}(F) = p$, la conjecture 1.1 est immédiate. On peut donc supposer $\mathrm{car}(F) \neq p$. Supposons de plus que F contient une racine primitive p-ième de l'unité ζ (le cas plus important pour nous étant $p = 2$ et $\zeta = -1$). Alors tout $u \in F^\times$ détermine un caractère $\chi_u \in H^1(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ (cf. Notations). Pour tous $a_1, \ldots, a_n \in F^\times$, on écrira $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ pour le produit de Massey $\langle \chi_{a_1}, \ldots, \chi_{a_n} \rangle$.

La conjecture 1.1 est connue sous le nom de *conjecture d'annulation de Massey*. Elle a été inspirée par un théorème de Hopkins–Wickelgren [HW15], qui ont montré que pour les corps de nombres, tous les produits de Massey triples modulo 2 qui sont définis s'annulent. La conjecture 1.1 est en partie motivée par le théorème d'isomorphisme connu sous le nom « norme-résidu » (la conjecture de Bloch–Kato), prouvé par Voevodsky et Rost [Voe03, Voe11, Wei09] : pour tout premier p inversible dans F, l'application

$$\oplus_{i\geq 0} K_i^M(F)/p \xrightarrow{\sim} \oplus_{i\geq 0} H^i(F, \mu_p^{\otimes i}) \qquad \{a_1, \dots, a_i\} \mapsto (a_1, \dots, a_i)_p$$

est un isomorphisme, où $K_*^M(F)$ est la K-théorie de Milnor de F et, pour tout entier $i > 0$ et tous $a_1, \dots, a_i \in F^\times$, on note $\{a_1, \dots, a_i\} \in K_i^M(F)/p$ et $(a_1, \dots, a_i)_p \in H^i(F, \mu_p^{\otimes i})$ les symboles correspondants. En particulier, lorsque F contient une racine primitive p-ième de l'unité, l'anneau gradué $H^*(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est quadratique : il est engendré par des éléments de degré 1 avec relations de degré deux (les relations de Steinberg). En d'autres termes, le cup-produit sur $H^*(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est particulièrement simple. La conjecture 1.1 prédit que les produits de Massey d'éléments de degré 1 dans $H^*(F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ sont également particulièrement simples.

Une deuxième motivation pour la conjecture 1.1 est le *problème de Galois inverse profini* : comment caractériser les groupes de Galois absolus parmi les groupes profinis ? Par exemple, grâce à Artin–Schreier [Art24, AS27], nous savons que tout sous-groupe fini non trivial d'un groupe de Galois absolu est cyclique d'ordre 2. Le théorème d'isomorphisme norme-résidu impose une forte restriction sur la cohomologie d'un groupe de Galois absolu ; si la conjecture 1.1 était vraie, elle imposerait une autre forte restriction.

La conjecture 1.1 est maintenant connue pour $n = 3$, pour tous les corps et tous les nombres premiers, grâce aux travaux de Efrat, Matzri, Mináč et Tân [Mat18, EM17, MT16]. La conjecture est également connue pour les corps de nombres pour tout n et p : ceci a été prouvé par Harpaz–Wittenberg [HW23] en utilisant des méthodes spécifiques aux corps de nombres (principe local-global, obstruction de Brauer–Manin) qui ne sont pas disponibles sur un corps arbitraire.

Comme nous l'avons déjà mentionné, les produits de Massey détectent la non-formalité des anneaux différentiels gradués. Positselski [Pos17] a posé la question suivante.

Question 1.2 (Positselski)**.** *Soit p un nombre premier. Existe-t-il un corps F contenant toutes les racines primitives p-ièmes de l'unité tel que $C^*(\Gamma_F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ ne soit pas formel ?*

Positselski a démontré que $C^*(\Gamma_F, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ n'est pas formel pour certains corps locaux de caractéristique différente de p. Harpaz–Wittenberg ont démontré que $C^*(\Gamma_\mathbb{Q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ n'est pas formel.

Dans une série de quatre articles, tous en collaboration avec Alexander Merkurjev [22, 26, 29, 30] :

- nous prouvons la conjecture 1.1 pour les produits de Massey quadruples modulo 2,
- nous étudions si les cas connus de la conjecture 1.1 découlent du théorème 90 de Hilbert, en un sens précis, et

– nous montrons, en utilisant les produits de Massey, que la question 1.2 a une réponse négative pour tous les nombres premiers p.

1.1 Un nouveau cas de la conjecture d'annulation de Massey

Théorème 1.3 ([26]). *La conjecture d'annulation de Massey est vraie pour $n = 4$ et $p = 2$. Autrement dit, pour tout corps F et tous caractères $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4 \in H^1(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, si le produit de Massey $\langle \chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4 \rangle \subset H^2(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est défini, alors il s'annule.*

Pour la preuve du théorème 1.3, on peut supposer $\mathrm{car}(F) \neq 2$. Avec les notations introduites avant, il suffit donc de montrer que pour tous $a, b, c, d \in F^\times$, le produit de Massey $\langle a, b, c, d \rangle \subset H^2(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ s'annule dès qu'il est défini. Le point de départ de la démonstration est la proposition suivante, qui caractérise les propriétés « $\langle a, b, c, d \rangle$ s'annule » et « $\langle a, b, c, d \rangle$ est défini » en utilisant le groupe de Brauer de $F_{a,d}$ (cf. Notations). La partie (1) se trouve essentiellement dans l'article de Guillot–Mináč–Topaz–Wittenberg [GMT18].

Proposition 1.4 (Guillot–Mináč–Topaz–Wittenberg). *Supposons $\mathrm{car}(F) \neq 2$, et soient $a, b, c, d \in F^\times$.*

1. *Le produit de Massey $\langle a, b, c, d \rangle$ s'annule si et seulement s'il existe $\alpha \in F_a^\times$ et $\delta \in F_d^\times$ tels que $N_a(\alpha) = b$ et $N_d(\delta) = c$ dans $F^\times/F^{\times 2}$, et $(\alpha, \delta)_2 = 0$ dans $\mathrm{Br}(F_{a,d})[2]$.*
2. *Le produit de Massey $\langle a, b, c, d \rangle$ est défini si et seulement s'il existe $\alpha \in F_a^\times$ et $\delta \in F_d^\times$ tels que $N_a(\alpha) = b$ et $N_d(\delta) = c$ dans $F^\times/F^{\times 2}$, et $(\alpha, \delta)_2$ appartient à l'image de l'application de restriction $\mathrm{Br}(F)[2] \to \mathrm{Br}(F_{a,d})[2]$.*

Ici et dans le reste de cette section, pour tout $u \in F^\times$, on note $N_u \colon F_u^\times \to F^\times$ et $N_u \colon \mathrm{Br}(F_u) \to \mathrm{Br}(F)$ les applications norme. Étant donnés $\alpha \in F_a^\times$ et $\delta \in F_d^\times$ comme dans la proposition 1.4(1), nous remplaçons α par αx et δ par δy, pour des $x, y \in F^\times$ convenables, de sorte que $(\alpha x, \delta y)_2 = 0$ dans $\mathrm{Br}(F_{a,d})[2]$. Nous y parvenons en deux étapes, qui peuvent être résumées comme suit.

– Réduction au cas dégénéré $a = d$, en remplaçant α par αx, pour un certain $x \in F^\times$, et $\delta \in F_d^\times$ par un $\nu \in F_a^\times$ approprié.

– Résolution du cas dégénéré $a = d$, en remplaçant δ par δy, pour un certain $y \in F^\times$.

Voici les versions précises des deux étapes.

Proposition 1.5. *Supposons $\mathrm{car}(F) \neq 2$. Soient $a, c, d \in F^\times$, soit $\alpha \in F_a^\times$, soit $\delta \in F_d^\times$ tel que $N_d(\delta) = c$ dans $F^\times$ et $(\alpha, \delta)_2$ est dans l'image de l'application de restriction $\mathrm{Br}(F)[2] \to \mathrm{Br}(F_{a,d})[2]$. Supposons que c n'est pas un carré dans $F^\times$. Alors il existe*

$x \in F^\times$ *et* $\nu \in F_a^\times$ *tels que* $(\alpha x, \delta)_2 = (\alpha x, \nu)_2$ *dans* $\mathrm{Br}(F_{a,d})[2]$ *et* $(\alpha x, \nu)_2$ *est dans l'image de la restriction* $\mathrm{Br}(F)[2] \to \mathrm{Br}(F_a)[2]$.

Proposition 1.6. *Supposons* $\mathrm{car}(F) \neq 2$. *Soit* $a \in F^\times$ *et soient* $\pi, \mu \in F_a^\times$ *tels que* $N_a((\pi, \mu)_2) = 0$ *dans* $\mathrm{Br}(F)$. *Alors il existe* $y \in F^\times$ *tel que* $(\pi, \mu y)_2 = 0$ *dans* $\mathrm{Br}(F_a)$.

La preuve de la proposition 1.5 utilise un argument de spécialisation délicat qui occupe la majeure partie de [26]. La proposition 1.6 suffit déjà à prouver la conjecture 1.1 pour tous les produits de Massey « dégénérés », c'est-à-dire les produits de Massey modulo 2 de la forme $\langle a, b, c, a \rangle$. C'est l'un des théorèmes principaux de [22]. La preuve de la proposition 1.6 utilise la théorie des formes d'Albert associées aux algèbres de biquaternions.

Étant données les propositions 1.4, 1.5 et 1.6, on peut achever la preuve du théorème 1.3 comme suit. Le cas où c est un carré dans F n'est pas difficile et est traité séparément. À partir de maintenant, nous supposons que c n'est pas un carré dans F. Comme $\langle a, b, c, d \rangle$ est défini, la proposition 1.4(2) fournit $\alpha \in F_a^\times$, $\delta \in F_d^\times$ tels que $N_a(\alpha) = b$ et $N_d(\delta) = c$ dans $F^\times / F^{\times 2}$ et $(\alpha, \delta)_2 \in \mathrm{Im}(\mathrm{Br}(F)[2] \to \mathrm{Br}(F_{a,d})[2])$. La proposition 1.5 donne $x \in F^\times$ et $\nu \in F_a^\times$ tels que

$$(\alpha x, \delta)_2 = (\alpha x, \nu)_2 \quad \text{dans } \mathrm{Br}(F_{a,d})[2], \qquad N_a((\alpha x, \nu)_2) = 0 \quad \text{dans } \mathrm{Br}(F)[2].$$

Si l'on pose $\pi = \alpha x$ et $\mu = \nu$, alors $N_a((\pi, \mu)_2) = 0$. La proposition 1.6 donne alors $y \in F^\times$ tel que

$$(\alpha x, \nu y)_2 = 0 \qquad \text{dans } \mathrm{Br}(F_a)[2].$$

On obtient la chaîne d'égalités suivante dans $\mathrm{Br}(F_{a,d})[2]$:

$$(\alpha x, \delta y)_2 = (\alpha x, \delta)_2 + (\alpha x, y)_2 = (\alpha x, \nu)_2 + (\alpha x, y)_2 = (\alpha x, \nu y)_2 = 0.$$

Par la proposition 1.4(1), le produit de Massey $\langle a, b, c, d \rangle$ s'annule, comme voulu. Ceci achève notre esquisse de preuve du théorème 1.3.

On conclut cette section avec un résultat plus précis pour les produits de Massey modulo 2 de la forme $\langle bc, b, c, bc \rangle$.

Théorème 1.7 ([22])**.** *Soit* $p = 2$, *soit* F *un corps de caractéristique différente de* 2, *et soient* $a, b, c, d \in F^\times$ *tels que* ad *et* abc *soient des carrés dans* F. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *le produit de Massey* $\langle a, b, c, d \rangle$ *est défini,*
2. *le produit de Massey* $\langle a, b, c, d \rangle$ *s'annule,*
3. $(b, c)_2 = 0$ *dans* $\mathrm{Br}(F)$ *et* $-1 \in F^\times$ *appartient à l'image de la norme* $F_{b,c}^\times \to F^\times$.

En particulier, si F contient une racine 8-ième de l'unité, le produit de Massey $\langle bc, b, c, bc \rangle$ s'annule si et seulement si $(b, c)_2 = 0$. Comme application du théorème 1.7, le produit de Massey $\langle 34, 17, 2, 34\rangle$ dans $H^2(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ n'est pas défini, bien que les produits de Massey $\langle 34, 17, 2\rangle$ et $\langle 17, 2, 34\rangle$ s'annulent. Cet exemple numérique est dû à Harpaz et Wittenberg [GMT18, Appendix], et fut notre motivation initiale pour considérer des produits de Massey arbitraires de la forme $\langle bc, b, c, bc\rangle$. En fait, nous avons d'abord prouvé le théorème 1.7, puis nous l'avons généralisé aux produits de Massey $\langle a, b, c, d\rangle$ avec $a = d$ (en utilisant la proposition 1.6), et enfin nous avons prouvé le théorème 1.3.

1.2 Produits de Massey et théorème 90 de Hilbert

Le théorème 90 de Hilbert est omniprésent en cohomologie galoisienne, et il est souvent le cas qu'il est le seul ingrédient non trivial dans une démonstration. Il est naturel de se demander si les cas connus de la conjecture 1.1 « découlent du théorème 90 de Hilbert ». Voici une façon de rendre la question précise.

Soit p un nombre premier. Un *groupe profini p-orienté* est un couple (Γ, θ), où Γ est un groupe profini et $\theta\colon \Gamma \to \mathbb{Z}_p^\times$ est un caractère continu. Nous notons $\mathbb{Z}_p(1)$ le Γ-module continu $\mathbb{Z}_p$ sur lequel Γ agit via θ, et nous posons $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(1) := \mathbb{Z}_p(1)/p^n$ pour tout entier positif n. Nous disons que (Γ, θ) *satisfait le théorème 90 de Hilbert formel* si pour tout sous-groupe ouvert (équivalemment, pour tout sous-groupe fermé) $U \subset \Gamma$, et tout $n \geq 1$, l'application naturelle $H^1(U, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(1)) \to H^1(U, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(1))$ est surjective. Si F est un corps de caractéristique différente de p et $\theta_{\mathrm{cyc},p}\colon \Gamma_F \to \mathbb{Z}_p^\times$ est la p-partie du caractère cyclotomique de Γ_F, par le théorème 90 de Hilbert (théorie de Kummer) le couple $(\Gamma_F, \theta_{\mathrm{cyc},p})$ est un groupe profini p-orienté qui satisfait le théorème 90 de Hilbert formel. Dans ce cas, $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(1) = \mu_{p^n}$ pour tout entier positif n.

Les cas connus de la conjecture 1.1 peuvent-ils être généralisés aux groupes profinis p-orientés satisfaisant le théorème 90 de Hilbert formel ? Dans [29], nous prouvons que c'est le cas pour $n = 3$, ainsi que pour $n = 4$ dans le cas dégénéré $\chi_1 = \chi_4$.

Théorème 1.8 ([29])**.** *Soit p un nombre premier et soit (Γ, θ) un groupe profini p-orienté satisfaisant le théorème 90 de Hilbert formel. Pour tout $\chi_1, \chi_2, \chi_3 \in H^1(\Gamma, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *$\langle \chi_1, \chi_2, \chi_3\rangle$ s'annule,*
- *$\langle \chi_1, \chi_2, \chi_3\rangle$ est défini, et*
- *$\chi_1 \cup \chi_2 = \chi_2 \cup \chi_3 = 0$.*

Théorème 1.9 ([29])**.** *Soit (Γ, θ) un groupe profini 2-orienté satisfaisant le théorème 90 de Hilbert formel. Pour tout $\chi_1, \chi_2, \chi_3 \in H^1(\Gamma, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, si le produit de Massey modulo 2 $\langle \chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_1\rangle$ est défini, alors il s'annule.*

Pour les preuves de ces théorèmes, le point clé est la construction, pour tout groupe profini p-orienté (Γ, θ) satisfaisant le théorème 90 de Hilbert formel, d'un *module de Hilbert 90*. Par définition, c'est un Γ-module discret M tel que :

– M est p-divisible,
– le sous-Γ-module de torsion p-primaire de M est isomorphe à $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1)$, et
– $H^1(U, M) = 0$ pour tout sous-groupe ouvert $U \subset \Gamma$.

Ici $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1)$ est la limite directe des $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(1)$ lorsque $n \to \infty$. Par exemple, pour tout corps F de caractéristique différente de p, le Γ_F-module $F_s^\times$ est un module de Hilbert 90 pour $(\Gamma_F, \theta_{\mathrm{cyc},p})$.

Théorème 1.10 ([29]). *Un groupe profini p-orienté (Γ, θ) satisfait le théorème 90 de Hilbert formel si et seulement s'il admet un module de Hilbert 90.*

On esquisse la preuve du théorème 1.10. Si M est un module de Hilbert 90 pour (Γ, θ), la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(1) \longrightarrow M \xrightarrow{\times p} M \longrightarrow 0$$

montre que (Γ, θ) satisfait le théorème 90 de Hilbert formel. Inversement, si M satisfait le théorème 90 de Hilbert formel, soit

$$X \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, Z^1(\Gamma, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1))),$$

où $Z^1(\Gamma, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1))$ est le groupe des 1-cocycles inhomogènes de Γ à valeurs dans $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1)$. Pour tout $x \in X$, soit u_x un symbole formel, et posons $Q_\Gamma \coloneqq \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Q}u_x$.

Nous définissons maintenant un Γ-module discret M_Γ. En tant que groupe abélien

$$M_\Gamma \coloneqq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1) \oplus Q_\Gamma.$$

Le groupe Γ agit sur M_Γ de la manière suivante : pour tous $s \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1)$, $x \in X$, $q \in \mathbb{Q}$ et $g \in \Gamma$,

$$g(s, qu_x) \coloneqq (\theta(g)s + x(q)(g), qu_x).$$

Il n'est pas difficile de vérifier qu'il s'agit bien d'une action discrète de Γ. Le Γ-module M_Γ est une extension de Q_Γ (avec action banale) par $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1)$. Le module de Hilbert 90 M est assemblé à partir des U-modules M_U, où U parcourt l'ensemble des sous-groupes ouverts de Γ. L'hypothèse que (Γ, θ) satisfait le théorème 90 de Hilbert formel est utilisée de façon cruciale pour montrer $H^1(U, M) = 0$ pour tout sous-groupe ouvert U de Γ.

Comme autre application du théorème 1.10, pour tout couple (G, θ) satisfaisant la condition de Hilbert 90 formel, si $\chi : G \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un caractère et $H = \mathrm{Ker}(\chi)$, alors la suite

$$H^1(H, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathrm{Cor}} H^1(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cup\chi} H^2(G, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathrm{Res}} H^2(H, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

est exacte. Cette suite est classique si G est le groupe de Galois absolu d'un corps de caractéristique différente de p.

1.3 La question de Positselski sur la non-formalité de la cohomologie galoisienne

Nous répondons par la négative à la question 1.2 de Positselski pour tout premier p.

Théorème 1.11 ([30]). *Soit p un nombre premier. Pour tout corps F de caractéristique différente de p, il existe une extension de corps L/F telle que l'anneau différentiel gradué $C^*(\Gamma_L, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ ne soit pas formel.*

Nous avions prouvé le cas $p = 2$ du théorème 1.11 précédemment, dans [22]. Pour la preuve, rappelons d'abord que les implications de (1.1) peuvent être inversées lorsque l'anneau gradué différentiel A est formel. Ainsi, pour prouver le théorème 1.11, il suffit de construire un corps L contenant F et des caractères $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ dans $H^1(L, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ tels que $\chi_1 \cup \chi_2 = \chi_2 \cup \chi_3 = \chi_3 \cup \chi_4 = 0$ dans $H^2(L, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, mais pour lesquels le produit de Massey $\langle \chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4 \rangle$ n'est pas défini. Dans une terminologie courante dans la littérature, cela signifie montrer que L ne satisfait pas la *conjecture d'annulation de Massey forte.*

Notre exemple est construit comme suit. On peut supposer que F contient une racine primitive p-ième de l'unité ζ. On pose $F' := F(x, y)$, où x et y sont des variables indépendantes sur F, et on note L le corps de fonctions de la variété de Severi–Brauer X sur F' correspondant à l'algèbre à division cyclique $(x, y)_p$ de degré p sur F'. En posant $a = 1 - x$, $b = x$, $c = y$ et $d = 1 - y$, on a $(a, b)_p = (c, d)_p = 0$ dans $\mathrm{Br}(F')$, donc dans $\mathrm{Br}(L)$, et par un résultat bien connu $(b, c)_p = 0$ dans $\mathrm{Br}(L)$. Il faut montrer que le produit de Massey $\langle a, b, c, d \rangle \subset H^2(L, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ n'est pas défini. Nous y parvenons comme suit.

- Nous construisons une « variété générique » E_w/L pour le problème. Plus précisément, on construit un F'-tore T et un T-torseur E_w sur L tel que pour toute extension de corps K/L, on a $E_w(K) \neq \emptyset$ si et seulement si $\langle a, b, c, d \rangle$ est défini sur K. La définition de E_w dépend d'une certaine fonction rationnelle $w \in L^\times$, construite explicitement.
- Nous prouvons que $E_w(L) = \emptyset$. Pour cela, nous montrons d'abord que let T-torseur E_w sur $L = F'(X)$ est non ramifié sur F'. Nous introduisons ensuite une obstruction « secondaire » à la trivialité des T-torseurs sur L non ramifiés sur F', à valeurs dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, et montrons par un calcul de réseaux galoisiens qu'elle est non triviale sur E_w.

En notant χ_1, χ_2, χ_3 et χ_4 les cocaractères correspondant à a, b, c et d via le choix de ζ, on obtient le contre-exemple voulu.

2. Le problème de relèvement pour les représentations galoisiennes

Motivé par la conjecture de modularité de Serre, Khare [Kha97] a montré que, pour tout corps de nombres F et tout premier p, tout homomorphisme continu $\Gamma_F \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ se relève en un homomorphisme continu $\Gamma_F \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$. Serre a remarqué que la démonstration de Khare n'utilise que la théorie de Kummer, et s'étend donc à un corps arbitraire. La question suivante se pose naturellement.

Question 2.1 (Khare, Serre)**.** *Soient F un corps, p un nombre premier et n un entier positif. Est-ce que tout homomorphisme continu $\Gamma_F \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ se relève-t-il en un homomorphisme continu $\Gamma_F \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$?*

Soit $\mathrm{B}_n \subset \mathrm{GL}_n$ le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures.

Conjecture 2.2 (Florence [Flo20])**.** *Soient p un nombre premier, F un corps contenant une racine primitive p^2-ième de l'unité, et n un entier positif. Tout homomorphisme continu $\Gamma_F \to \mathrm{B}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ se relève en un homomorphisme continu $\Gamma_F \to \mathrm{B}_n(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$.*

Si la conjecture 2.2 était vraie alors, par un argument de restriction-corestriction, la question 2.1 aurait une réponse positive sur les corps contenant une racine primitive p^2-ième de l'unité. Florence a aussi observé que la conjecture 2.2 implique l'assertion de surjectivité du théorème d'isomorphisme norme-résidu sur tous les corps, y compris ceux qui ne contiennent pas de racine primitive p^2-ième de l'unité. (Une fois établie la surjectivité, l'injectivité suit par des arguments élémentaires.) Le théorème d'isomorphisme norme-résidu a été démontré par Voevodsky et Rost en utilisant la cohomologie motivique et les variétés normiques : une démonstration de ce théorème utilisant uniquement les outils de la cohomologie galoisienne aurait beaucoup d'intérêt. Florence et De Clercq ont prouvé la conjecture 2.2 pour tout p lorsque $n \leq 2$, et pour $p = 2$ lorsque $n \leq 4$.

Dans des travaux en commun avec Alexander Merkurjev [31, 32], nous montrons que la conjecture 2.2 échoue et que la question 2.1 a une réponse négative, sauf dans les cas considérés par Khare et Florence–De Clercq. Ces résultats reposent d'abord sur le calcul de la cohomologie négligeable en degré 2 sur les corps ayant suffisamment de racines de l'unité, que nous décrivons d'abord.

2.1 Cohomologie négligeable de degré 2 sur les corps avec suffisamment de racines de l'unité

Soit H un groupe fini, soit A un H-module fini, et soit $\alpha \in H^2(H, A)$ la classe d'une extension de groupes

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 1.$$

La classe $\alpha \in H^2(H, A)$ est dite *négligeable sur* F si son image réciproque $\rho^*(\alpha)$ dans $H^2(K, A)$ est nulle pour toute extension de corps K/F et tout homomorphisme continu $\rho\colon \Gamma_K \to H$. Ainsi, α est négligeable sur F si et seulement si, pour toute extension K/F, tout homomorphisme continu $\rho\colon \Gamma_K \to H$ se relève en un homomorphisme continu $\tilde{\rho}\colon \Gamma_K \to G$. Cette définition est due à Serre. D'après une observation de Gherman–Merkurjev [GM22, Proposition 2.1], la classe α est négligeable sur F si et seulement si pour une (équivalemment, toute) représentation F-linéaire fidèle de dimension finie V de H, en posant

$$\rho_V : \Gamma_{F(V)^H} \longrightarrow \mathrm{Gal}(F(V)/F(V)^H) = H$$

l'homomorphisme surjectif correspondant, on a $\rho_V^*(\alpha) = 0$. Cela vient du fait que la H-algèbre galoisienne $F(V)/F(V)^H$ correspondant à ρ_V est *verselle* : pour tout sous-schéma ouvert non vide H-invariant $U \subset V$, toute H-algèbre galoisienne L/K est une spécialisation de $U \to U/H$ en un certain point de U/H.

La question 2.1 peut se reformuler en demandant si la classe de l'extension

$$0 \longrightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow 1, \tag{2.1}$$

où $\mathfrak{gl}_n$ est l'algèbre de Lie de GL_n, est négligeable sur tout corps F. La conjecture 2.2 est équivalente à l'assertion que l'extension

$$0 \longrightarrow \mathfrak{b}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{B}_n(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{B}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow 1, \tag{2.2}$$

où $\mathfrak{b}_n$ est l'algèbre de Lie de B_n, est négligeable sur tout corps F contenant une racine primitive p^2-ième de l'unité.

Théorème 2.3 ([31])**.** *Soit H un groupe fini d'exposant $e(H)$, soit A un H-module fini d'exposant $e(A)$, et soit F un corps contenant une racine primitive de l'unité d'ordre $e(A)e(H)$. Le sous-groupe des classes dans $H^2(H, A)$ qui sont négligeables sur F est engendré par les images des applications*

$$A^{H'} \otimes H^2(H', \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cup} H^2(H', A) \xrightarrow{\mathrm{cor}} H^2(H, A), \tag{2.3}$$

où H' parcourt tous les sous-groupes de H.

En particulier, le sous-groupe des classes dans $H^2(H,A)$ négligeables sur F ne dépend pas de F, lorsque F contient une racine primitive de l'unité d'ordre $e(A)e(H)$. Le cas particulier du théorème 2.3 où H agit trivialement sur A est dû à Gherman–Merkurjev [GM22]. Dans leur cadre, Gherman et Merkurjev calculent le sous-groupe des classes négligeables sur F sans hypothèses sur F : leur formule montre que l'hypothèse sur les racines de l'unité faite dans le théorème 2.3 est optimale.

Nous donnons une interprétation plus conceptuelle du théorème 2.3. Pour tous entiers strictement positifs m et n tels que F contienne une racine primitive de l'unité d'ordre mn, nous appelons *classe de Kummer* l'élément de $H^2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ défini par l'extension centrale

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

où l'application $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est la réduction modulo m. Sur $H^2(-,-)$, où la première entrée est un groupe fini et la seconde un module fini sous ce groupe, on peut considérer les opérations suivantes :

(1) l'image directe par rapport au module,

(2) l'image réciproque par rapport au groupe,

(3) la corestriction par rapport à un sous-groupe.

On peut montrer que les classes négligeables sur F sont stables par (1)–(3), et que les classes de $H^2(H,A)$ obtenues via (2.3) s'obtiennent toutes à partir des classes de Kummer en appliquant (1)–(3) (en particulier, elles sont négligeables sur F). Ainsi, d'après la théorème 2.3, les classes de $H^2(H,A)$ obtenues à partir des classes de Kummer au moyen de (1)–(3) forment un système de générateurs du sous-groupe des classes négligeables sur F dans $H^2(H,A)$. Ceci montre aussi la direction facile du théorème 2.3 : toute classe de $H^2(H,A)$ dans l'image d'une flèche (2.3) est négligeable sur F.

Nous abordons maintenant la preuve de la direction difficile du théorème 2.3. Soit $H^2(H,A)_{F,\mathrm{neg}}$ le sous-groupe des classes dans $H^2(H,A)$ qui sont négligeables sur F, soit e l'exposant de H, et soit n l'exposant de A, respectivement. Soit V une H-représentation F-linéaire fidèle de dimension finie et soit $\rho_V\colon \Gamma_{F(V)^H} \to H$ l'homomorphisme continu surjectif induit. D'après l'observation de Gherman–Merkurjev déjà mentionnée, une classe $\alpha \in H^2(H,A)$ est négligeable sur F si et seulement si $\rho_V^*(\alpha) = 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} H^2(H,A)_{F,\mathrm{neg}} &= \mathrm{Ker}[H^2(H,A) \xrightarrow{\rho_V^*} H^2(F(V)^H, A)] \\ &= \mathrm{Im}[H^1(F(V),A)^H \xrightarrow{\mathrm{tg}} H^2(H,A)] \\ &= \mathrm{Im}[(A(-1)\otimes F(V)^\times)^H \xrightarrow{\gamma} H^2(H,A)], \end{aligned}$$

où la deuxième égalité découle de la suite spectrale de Lyndon–Hochschild–Serre, on pose $A(-1) \coloneqq \mathrm{Hom}(\mu_n, A)$ et l'application γ est obtenue en pré-composant l'application de transgression tg avec l'isomorphisme

$$(A(-1)\otimes F(V)^\times)^H \xrightarrow{\sim} (A(-1)\otimes H^1(F(V),\mu_n))^H \xrightarrow{\sim} H^1(F(V),A)^H$$

provenant de la théorie de Kummer.

On considère V comme un espace affine sur F. Ainsi $\mathrm{Pic}(V)=0$ et nous avons une suite exacte courte de H-modules

$$1 \longrightarrow F^\times \longrightarrow F(V)^\times \xrightarrow{\mathrm{div}} \mathrm{Div}(V) \longrightarrow 0.$$

Pour tout point x de codimension 1 de V, on pose $f_x \in F(V)^\times$ une fonction rationnelle telle que $\mathrm{div}(f_x)=x$ (donc f_x est en fait un polynôme), et on note H_x le sous-groupe des $h\in H$ tels que $hx=x$.

Soit $a\in A(-1)^{H_x}$, et considérons l'élément $a\otimes f_x \in A(-1)\otimes F(V)^\times$. Bien que f_x ne soit pas H_x-invariante, nous affirmons que $a\otimes f_x$ est H_x-invariant. En effet, pour tout $h\in H_x$ les fonctions rationnelles f_x et hf_x ont toutes les deux pour diviseur x, et donc $h_x f=\lambda f$ pour un certain $\lambda\in F^\times$. Ainsi $h(a\otimes f_x)=a\otimes hf_x$ et $a\otimes f_x$ diffèrent de $a\otimes\lambda$. Comme H est d'exposant e, on a $\lambda\in\mu_e$. Nous utilisons maintenant l'hypothèse que F contient une racine primitive de l'unité d'ordre en : on a $\lambda=\zeta^n$ pour un certain $\zeta\in\mu_{en}$. Donc $a\otimes\lambda=a\otimes\zeta^n=(na)\otimes\zeta=0$ car $nA=0$. C'est le calcul clé pour la preuve du lemme suivant.

Lemme 2.4. *Le groupe abélien $(A(-1)\otimes F(V)^\times)^H$ est engendré par $A(-1)\otimes F^\times$ et les normes $N_{H/H_x}(a\otimes f_x)$ pour tous les points x de codimension 1 de V et tous les éléments $a\in A(-1)^{H_x}$.*

Par fonctorialité et le fait que $\overline{F}$ est divisible on a $\gamma(A(-1)\otimes F^\times)\subset\gamma(A(-1)\otimes\overline{F}^\times)=0$ et donc $\gamma(A(-1)\otimes F^\times)=0$. D'après le lemme 2.4, on déduit que $\mathrm{Im}(\gamma)$ est engendré par les éléments de la forme $N_{H/H_x}(a\otimes f_x)$. Il reste à montrer que ces éléments appartiennent à l'image de (2.3) (avec $H'=H_x$). Pour simplifier, supposons que $H_x=H$. On doit donc montrer que $\gamma(a\otimes f_x)$ est un cup-produit de $A^H\otimes H^2(H,\mathbb{Z})$. Le point crucial est l'anti-commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
A(-1)^H\otimes(L^\times/\mu_e)^H \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\partial_1"] & (A(-1)\otimes L^\times)^H \arrow[dd, "\gamma"] \\
A(-1)^H\otimes H^1(H,\mu_e) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\partial_2"] & \\
A(-1)^H\otimes H^2(H,\mu_n) \arrow[r, "\cup"] & H^2(H,A).
\end{tikzcd} \tag{2.4}$$

Ici, l'application β envoie $a\otimes f\mu_e$ sur $a\otimes f$: ceci est bien défini car F contient une racine primitive de l'unité d'ordre en. De plus, ∂_1 est un homomorphisme de connexion provenant de

$$1 \longrightarrow \mu_e \longrightarrow F(V)^\times \longrightarrow F(V)^\times/\mu_e \longrightarrow 1$$

et ∂_2 est un homomorphisme de connexion provenant de

$$1 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow \mu_{en} \longrightarrow \mu_e \longrightarrow 1.$$

Puisque $a \otimes f_x \in (A(-1) \otimes F(V)^\times)^H$ est l'image de $a \otimes f_x\mu_e \in A(-1)^H \otimes (F(V)^\times/\mu_e)^H$, on déduit du diagramme (2.4) que $\gamma(a \otimes f_x)$ est un cup-produit de $A(-1)^H \otimes H^2(H, \mu_n)$. Un lemme simple montre que cela revient à dire que $\gamma(a \otimes f_x)$ est un cup-produit de $A^H \otimes H^2(H, \mathbb{Z})$. Ceci achève notre esquisse de preuve du théorème 2.3.

2.2 Le problème de relèvement pour les représentations galoisiennes

En combinant le théorème 2.3 avec un calcul de cohomologie des groupes, nous obtenons les premiers exemples de représentations galoisiennes modulo p qui ne se relèvent pas en représentations modulo p^2.

Théorème 2.5 ([31]). *Soient p un nombre premier impair, $n \geq 3$ un entier, et F un corps contenant une racine primitive p-ième de l'unité. Sur le corps des fonctions rationnelles $K = F(x_1, \dots, x_p)$, il existe :*

- *un homomorphisme continu $\Gamma_K \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ qui ne se relève pas à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$;*
- *un homomorphisme continu $\Gamma_K \to \mathrm{B}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ qui ne se relève pas à $\mathrm{B}_n(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$.*

Ceci montre que la question 2.1 a une réponse négative et que la conjecture 2.2 est fausse.

Pour la démonstration du théorème 2.5, on se réduit aisément au cas $n = 3$. Soit $\mathrm{U}_3 \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ le p-sous-groupe de Sylow des matrices unitriangulaires supérieures, et soit $\alpha \in H^2(\mathrm{U}_3, \mathfrak{gl}_3(\mathbb{F}_p))$ l'image réciproque de la classe de (2.1) pour $n = 3$. Par un argument de restriction-corestriction, il suffit de montrer que α n'est pas négligeable sur F. Nous supposons $p > 3$ pour simplifier. Dans ce cas, si $Z_3 \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est centre de U_3, des calculs directs montrent que la restriction de α à Z_3 est non triviale, tandis que toutes les classes dans les images de (2.3) se restreignent à zéro sur Z_3. Par le théorème 2.3, cela implique que α n'est pas négligeable sur F. Une variante plus compliquée de cet argument s'applique également lorsque $p = 3$. La raison pour laquelle on peut choisir $K = F(x_1, \dots, x_p)$ est que, en posant V comme une représentation fidèle de dimension p de U_3, Chu et Kang [CK01] ont montré que $F(V)^H$ est purement transcendant sur F (cela utilise que F contient une racine primitive p-ième de l'unité).

Dans un travail ultérieur, nous considérons le cas $p = 2$, et, en fait, la situation plus générale où $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ sont remplacés respectivement par un corps k de caractéristique p et par son anneau des vecteurs de Witt p-typiques de longueur 2, noté $W_2(k)$.

Théorème 2.6 ([32])**.** *Soient F un corps, k un corps de caractéristique $p > 0$, et n un entier positif. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) Pour toute extension de corps K/F, toute représentation continue de dimension n de Γ_K sur k se relève à $W_2(k)$.

(2) Pour toute extension de corps K/F, tout drapeau complet de représentations continues de dimension n de Γ_K sur k se relève à $W_2(k)$.

(3) Au moins l'une des conditions suivantes est satisfaite :
- $\mathrm{car}(F) = p$,
- $n \leq 2$, *ou*
- $k \cong \mathbb{F}_2$ *et* $n \leq 4$.

La partie la plus difficile de la preuve du théorème 2.6 consiste à montrer que la classe $\alpha \in H^2(\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), \mathfrak{gl}_5(\mathbb{F}_2))$ de

$$0 \longrightarrow \mathfrak{gl}_5(\mathbb{F}_2) \longrightarrow \mathrm{GL}_5(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{GL}_5(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 1$$

n'est pas négligeable sur F. Par le théorème 2.3 et la formule de projection, il suffit de démontrer que α n'appartient pas au sous-groupe de $H^2(\mathrm{GL}_5(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), \mathfrak{gl}_5(\mathbb{F}_2))$ engendré par les éléments $\mathrm{cor}_{G_a}^G(a \cup \chi)$, où a parcourt tous les éléments de $\mathfrak{gl}_5(\mathbb{F}_2)$, G_a est le stabilisateur de a, et χ parcourt tous les éléments de $H^2(G_a, \mathbb{Z})$. Il suffit de considérer un seul $a \in \mathfrak{gl}_5(\mathbb{F}_2)$ par G-orbite, c'est-à-dire un seul a par classe de conjugaison. Lorsque a n'est pas conjugué à un bloc de Jordan 5×5, une analyse cas par cas utilisant la formule de projection et des calculs matriciels implique que $\mathrm{cor}_{G_a}^G(a \cup \chi) = 0$ pour tout $\chi \in H^2(G_a, \mathbb{Z})$. Lorsque a est conjugué à un bloc de Jordan 5×5, on a

$$H^2(G_a, \mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cdot \chi \oplus (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \cdot \psi$$

pour certains χ et ψ. En utilisant la formule de projection, on prouve $\mathrm{cor}_{G_a}^G(a \cup \chi) = 0$. Pour traiter $\mathrm{cor}_{G_a}^G(a \cup \psi)$, nous construisons un sous-groupe de Klein $Z \subset \mathrm{GL}_5(\mathbb{F}_2)$ tel que

(i) α se restreigne à un élément non trivial dans $H^2(Z, \mathfrak{gl}_5(\mathbb{F}_2))$,

(ii) $\mathrm{cor}_{G_a}^G(a \cup \psi)$ se restreigne à 0 dans $H^2(Z, \mathfrak{gl}_5(\mathbb{F}_2))$.

Nous démontrons (i) par un calcul matriciel et (ii) par un argument utilisant la formule des doubles classes. Ceci achève notre esquisse de preuve de non-négligeabilité de α.

3. La conjecture de Grothendieck–Serre pour les groupes constants

Soient k un corps et G un k-groupe, c'est-à-dire un k-schéma en groupes localement de type fini. Dans les années 1950, Serre a observé que la topologie de Zariski ne suffit pas pour définir la bonne notion de G-torseur en géométrie algébrique. Plus précisément, dans un langage qu'il n'avait pas encore à l'époque, pour une variété X sur k, un G-torseur sur X n'est pas nécessairement localement trivial pour la topologie de Zariski, mais il l'est pour la topologie étale si G est lisse, et pour la topologie fppf en général. (On rappelle que, d'après un théorème de Grothendieck, si G est lisse tout G-torseur fppf est localement trivial pour la topologie étale.) Cette définition plus flexible de G-torseur donne la théorie riche qu'on utilise toujours en géométrie algébrique et cohomologie galoisienne. Elle laisse néanmoins ouverte la question de savoir quand un torseur pour une telle topologie de Grothendieck plus fine sur X est en réalité déjà un torseur pour la topologie de Zariski de X.

En 1958, Grothendieck [Gro58, pp. 26–27] et Serre [Ser58, p. 31] ont abordé cette question en faisant la prédiction suivante : si G et X sont k-lisses, un G-torseur étale E est trivial aux points génériques de X si et seulement si E est trivial localement pour la topologie de Zariski. En 1992, Colliot-Thélène et Ojanguren [CTO92] ont prouvé cette conjecture de Grothendieck–Serre dans le cadre original où le corps de base k est algébriquement clos. Ils ont également établi plusieurs cas particuliers de la prédiction analogue sur un corps de base k quelconque.

Dans un travail en commun avec Alexis Bouthier et Kęstutis Česnavičius, nous résolvons la conjecture de Grothendieck–Serre sur un corps k arbitraire et pour un k-groupe lisse arbitraire.

Théorème 3.1 ([33]). *Soient k un corps, R une k-algèbre semi-locale géométriquement régulière, K l'anneau total des fractions de R et G un k-groupe lisse (plus généralement, un k-groupe tel que tout $\overline{k}$-tore de $G_{\overline{k}}$ se trouve dans $(G^{\mathrm{gred}})_{\overline{k}}$). Tout G-torseur fppf génériquement trivial sur R est trivial :*

$$\mathrm{Ker}(H^1(R,G) \to H^1(K,G)) = \{*\}.$$

Ici G^{gred} est le plus grand sous-groupe k-lisse de G. Nous construisons plusieurs exemples montrant que la condition entre parenthèses, introduite par Gabber dans un but différent, est nécessaire, et nous montrons également que la conclusion du théorème ne peut pas être renforcée en « l'application $H^1(R,G) \to H^1(K,G)$ est injective ». Des exemples de groupes satisfaisant les conditions entre parenthèses sont les k-groupes nilpotents (par exemple les k-groupes commutatifs ou les k-groupes unipotents) et les sous-groupes normaux des k-groupes lisses. On construit des exemples qui montrent que la conclusion du théorème 3.1 est fausse en général, si on enlève cette hypothèse sur G.

Le théorème 3.1 avait déjà été démontré dans le cas suivants.

- Si k est parfait infini par Colliot-Thélène et Ojanguren [CTO92] et si k est fini par Gabber (non publié),
- Si k est infini et G est réductif par Raghunathan [Rag94, Rag95] et si k est fini par Gabber (non publié). Les travaux de Fedorov–Panin [FP15] (k infini) et Panin [Pan20] (k fini) ont montré que la conclusion du théorème 3.1 reste vraie si G est un X-schéma en groupes réductifs, pas nécessairement défini sur k. (On montre par plusieurs exemples qu'une telle généralisation du théorème 3.1 ne vaut pas au-delà du cas réductif.)
- Si $R = k[\![t]\!]$ et G est affine par Florence–Gille [FG21].

Le théorème 3.1 est donc nouveau si k est imparfait et G n'est pas réductif. Dépasser le cadre des corps parfaits présente un intérêt arithmétique considérable : par exemple, les corps de fonctions de variétés algébriques de dimension strictement positive en caractéristique positive ne sont jamais parfaits. La question de Grothendieck–Serre dans ce contexte d'un corps k général (imparfait) est extrêmement complexe, car la structure des k-schémas en groupes lisses généraux fait apparaître beaucoup de nouveaux phénomènes : groupes unipotents ployés, pseudo-réductifs, quasi-réductifs et variétés pseudo-abéliennes jouent un rôle majeur dans la structure des k-groupes lisses. D'autre part, considérer k-groupes lisses arbitraires est important en pratique : par exemple, des résultats récents de Florence [Flo25], et Brion–Schröer [BS26] affirment qu'essentiellement tout G apparaît comme groupe d'automorphismes d'une k-variété projective Y, et alors les G-torseurs correspondent aux formes de Y et sont donc pertinents pour l'étude des familles de variétés.

La difficulté de base pour la preuve du théorème 3.1 est qu'on peut pas se réduire au cas où G est réductif. Lorsque k est parfait, cette réduction est possible de la manière suivante. On suppose que G est k-lisse pour simplifier. Étant donnée une suite exacte courte de k-groupes

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow G/N \longrightarrow 1,$$

si la conclusion du théorème 3.1 est valable pour N et G/N, il n'est pas clair a priori que la conclusion du théorème 3.1 soit également valable pour G. Par exemple, le cas où G est réductif n'admet pas de réduction directe au cas où G est semi-simple. Cependant, si nous supposons de plus que, pour tout (G/N)-torseur E sur R on a $E(R) = E(K)$, c'est-à-dire que toute trivialisation de E sur K s'étend (uniquement) à R, alors un argument simple montre que G satisfait la conclusion du théorème 3.1. En utilisant cette observation et la suite exacte

$$1 \longrightarrow G^0 \longrightarrow G \longrightarrow G/G^0 \longrightarrow 1, \tag{3.1}$$

où G^0 est la composante neutre de G, il suffit de montrer le théorème 3.1 pour G^0. Ensuite, à partir de la même observation et de la suite exacte

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow G^0 \longrightarrow A \longrightarrow 1, \tag{3.2}$$

où H est affine lisse connexe et A est une variété abélienne (théorème de structure de Chevalley [CGP15, Theorem A.3.6]) nous nous réduisons à montrer le théorème 3.1 pour H. Finalement, nous avons la suite

$$1 \longrightarrow R_{u,k}(H) \longrightarrow H \longrightarrow H/R_{u,k}(H) \longrightarrow 1, \tag{3.3}$$

où $R_{u,k}(H)$ est le k-radical unipotent. Puisque k est parfait :

- le k-groupe unipotent lisse connexe $R_{u,k}(H)$ est déployé, c'est-à-dire qu'il est une extension itérée de k-groupes isomorphes à $\mathbb{G}_a$, et n'a donc pas de torseurs non triviaux sur le schéma affine $\mathrm{Spec}(R)$, et
- le quotient $H/R_{u,k}(H)$ est réductif.

Donc le noyau de la flèche $H^1(R, H) \to H^1(R, H/R_{u,k}(H))$ est trivial, et il suffit donc de montrer le théorème 3.1 pour $H/R_{u,k}(H)$. Autrement dit, on peut supposer G réductif, comme voulu.

Sur un corps imparfait k, nous pouvons utiliser (3.1) pour nous réduire au cas connexe. Cependant, toutes les autres réductions échouent :

- on peut seulement supposer que A est une *variété pseudo-abélienne*, au sens de Totaro [Tot13],
- $R_{u,k}(H)$ n'est pas déployé en général, et peut en fait admettre des torseurs non triviaux sur $\mathrm{Spec}(R)$, et
- le quotient $H/R_{u,k}(H)$ n'est pas réductif en général, mais seulement *pseudo-réductif*, au sens de Conrad–Gabber–Prasad [CGP15].

Nous ne pouvons considérer que la suite

$$1 \longrightarrow R_{us,k}(H) \longrightarrow H \longrightarrow H/R_{us,k}(H) \longrightarrow 1, \tag{3.4}$$

où $R_{us,k}(H)$ est le k-radical unipotent déployé de H, c'est-à-dire, le plus grand sous-groupe normal k-unipotent déployé de H. Le quotient $H/R_{us,k}(H)$ n'est pas réductif, ni même pseudo-réductif, mais seulement *quasi-réductif*, c'est-à-dire que son k-radical unipotent est *ployé* (il ne contient pas de sous-groupe isomorphe à $\mathbb{G}_a$). Ainsi (3.4) nous permet de réduire le cas affine lisse connexe au cas quasi-réductif. Après cela, aucune réduction directe n'est plus possible, et il nous faut travailler avec des groupes quasi-réductifs.

Les groupes quasi-réductifs sont bien plus compliqués que les groupes réductifs : déjà pour le cas particulier des groupes unipotents ployés aucun résultat de classification n'est disponible. Ce qui rend la preuve du théorème 3.1 possible est que, comme on verra, plusieurs théorèmes classiques sur les torseurs sous les groupes réductifs (pureté, extension en dimension 2, classification sur la droite projective) restent vrais pour les torseurs sous les groupes quasi-réductifs.

La première partie de la preuve du théorème 3.1 consiste à construire, via des arguments géométriques dus à Fedorov–Panin [FP15] utilisant le théorème de présentation géométrique de Gabber–Quillen [CTHK97, Theorem 3.1.1] et le théorème d'approximation de Popescu [SP, Theorem 07GC], un G-torseur $\mathcal{E}'$ sur $\mathbb{A}^1_R$ et un sous-schéma fermé $Z \subset \mathbb{A}^1_R$ fini sur R tels que $\mathcal{E}'|_{t=0} \cong E$ et $\mathcal{E}'|_{\mathbb{A}^1_R - Z}$ est trivial. Ici t note la cordonnée standard sur $\mathbb{A}^1_R$. Un tel G-torseur $\mathcal{E}'$ peut être étendu à un G-torseur $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{P}^1_R$ tel que $\mathcal{E}|_{t=\infty}$ est trivial. Le théorème 3.1 se réduit donc au théorème suivant.

Théorème 3.2 ([33]). *Pour un corps k, un k-groupe lisse G, une k-algèbre semi-locale A, et un G-torseur $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{P}^1_A$, si la restriction $\mathcal{E}|_{\{t=\infty\}}$ est triviale, alors $\mathcal{E}|_{\{t=0\}}$ l'est aussi.*

Pour démontrer le théorème 3.2 nous établissons les théorèmes suivants, chaque point de la liste étant utilisé dans la démonstration du suivant.

- Théorèmes de pureté pour les torseurs sous des k-groupes (i) commutatifs pseudo-finis, (ii) lisses pseudo-propres et (iii) lisses pseudo-complets.
- Un théorème d'extension en dimension 2 pour les k-groupes quasi-réductifs.
- Un théorème de classification pour les torseurs sur $\mathbb{P}^1_k$ sous des k-groupes quasi-réductifs.

En conséquence de ces théorèmes, on obtient aussi les décompositions de Birkhoff, Cartan et Iwasawa pour $G(k(\!(t)\!))$, où G est un k-groupe quasi-réductif.

3.1 Théorèmes de pureté et d'extension pour les torseurs

On sait que $H^1(\mathbb{A}^2_k, \mathbb{G}_a)$ est trivial, tandis que $H^1(\mathbb{A}^2_k \backslash \{0\}, \mathbb{G}_a)$ est un k-espace vectoriel de dimension infinie. Il existe donc de nombreux $\mathbb{G}_a$-torseurs non triviaux sur $\mathbb{A}^2_k \setminus \{0\}$, et aucun d'entre eux ne s'étend à $\mathbb{A}^2_k$. On démontre que ce phénomène ne se produit pas pour les groupes unipotents ployés.

Théorème 3.3 ([33]). *Soit k un corps, soit S un k-schéma géométriquement régulier, soit $Z \subset S$ un sous-ensemble fermé de codimension ≥ 2, et soit G un k-groupe. Supposons que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :*

(i) G est pseudo-fini et commutatif,

(ii) G est pseudo-propre et lisse,

(iii) G est pseudo-complet et lisse, et tout point $z \in Z$ de codimension 2 dans S est contenu dans un k-schéma $S_z \subset S$ géométriquement régulier de codimension strictement positive (si l'extension k_z/k est séparable, on peut prendre comme S_z la clôture Zariski de z).

Alors le foncteur d'image réciproque induit une équivalence de catégories :

$$\{G\text{-}torseurs\ sur\ S\} \xrightarrow{\sim} \{G\text{-}torseurs\ sur\ S \setminus Z\}.$$

Ici, un k-schéma séparé de type fini X est dit :

– *pseudo-fini* if $X(k_s)$ est fini,

– *pseudo-propre* s'il satisfait le critère valuatif de propreté par rapport à tout anneau de valuation discrète géométriquement régulier sur k,

– (Borel–Tits [BT78]) *pseudo-complet* s'il satisfait le critère valuatif de propreté par rapport à tout anneau de valuation discrète sur k dont le corps résiduel est séparable sur k.

Les notions de « pseudo-fini » et « pseudo-propre » sont nouvelles et essentielles pour notre preuve du théorème 3.1. On obtient aussi le théorème d'extension en dimension 2 suivant.

Théorème 3.4 ([33]). *Soit S un k-schéma géométriquement régulier de dimension 2, soit $z \in S$ un point fermé de hauteur 2, et soit G un k-groupe quasi-réductif. Alors le foncteur d'image réciproque induit une équivalence de catégories :*

$$\{G\text{-}torseurs\ sur\ S\} \xrightarrow{\sim} \{G\text{-}torseurs\ sur\ S \setminus \{z\}\}.$$

Pour $G = \mathrm{GL}_n$, le théorème 3.4 revient au fait que tout module de type fini réflexif sur un anneau local régulier de dimension 2 est libre.

Pour G réductif, le théorème 3.4 est dû à Colliot-Thélène et Sansuc [CTS79, Théorème 6.13]. La preuve est par réduction à GL_n : par le théorème de Matsushima, un sous-groupe connexe lisse G de GL_n est réductif si et seulement si GL_n / G est affine, ce qui est critique car il implique que les réductions de GL_n-torseurs en G-torseurs sur $S \setminus \{z\}$ s'étendent de manière unique à celles sur S. Le théorème 3.4 est spécifique à la dimension 2, car des fibrés vectoriels non triviaux existent déjà sur $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$.

Nous démontrons les théorèmes 3.3 et 3.4 par un dévissage à la fois en S et en G, qui utilise les cas « classiques » de ces théorèmes (groupes finis, variétés abéliennes, groupes réductifs) afin de se ramener à la situation où S est (à peu près) $\mathrm{Spec}(k[\![s,t]\!])$ et où G est unipotent ployé, donné par l'annulation d'un certain p-polynôme F (c'est-à-dire $F(x_1,\ldots,x_r) = \sum a_{ij}x_i^{p^j}$, où $a_{ij} \in k$), puis en faisant des calculs explicites dans $k[\![s,t]\!]$. L'hypothèse « ployé » correspond à une propriété de non-annulation de la partie principale de F, ce qui est crucial dans le calcul.

Les ingrédients principaux du dévissage en S sont le théorème de présentation géométrique de Gabber–Quillen [CTHK97, Theorem 3.1.1] et le théorème d'approximation de Popescu [SP, Theorem 07GC]. Le dévissage en G est plus délicat ; on considère l'application de comparaison

$$i_G : G \longrightarrow \mathrm{Res}_{k'/k}(G'),$$

où k'/k est l'extension finie, purement inséparable, de définition du radical unipotent géométrique $R_{u,\bar{k}}(G_{\bar{k}})$, et où $G' \coloneqq G_{k'}/R_{u,k'}(G_{k'})$ est le k'-groupe réductif associé. L'application i_G apparaît déjà dans [CGP15, CP16]. Le point clé est notre observation, démontrée dans [33, Proposition 2.3.5], que l'espace homogène $\mathrm{Res}_{k'/k}(G)/i_G(G)$ est affine. Comme nous l'avons déjà observé en discutant le théorème de Matsushima ci-dessus, l'affinité des espaces homogènes est à la fois subtile et essentielle pour le traitement des torseurs. D'autre part, $\mathrm{Ker}(i_G)$ est unipotent, pseudo-fini et, dans des situations auxquelles on se ramène facilement, commutatif, de sorte que le théorème 3.3(i) s'y applique. Ce contrôle du noyau et du « conoyau » de i_G se traduit par un contrôle des torseurs lors du passage de G à $i_G(G)$, puis à $\mathrm{Res}_{k'/k}(G')$, et enfin à G', ce qui rend possible le dévissage en G.

3.2 Classification des torseurs sur la droite projective

Le théorème 3.4 nous permet de classifier les G-torseurs sur $\mathbb{P}^1_k$.

Théorème 3.5 ([33])**.** *Soit k un corps, soit G un k-groupe lisse, et soit E un G-torseur sur $\mathbb{P}^1_k$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $E|_P$ est trivial pour un certain k-point $P \in \mathbb{A}^1_k(k)$,

(2) $E|_P$ est trivial pour tout k-point $P \in \mathbb{A}^1_k(k)$,

(3) E est génériquement trivial,

(4) E est trivial localement pour la topologie de Zariski,

(5) $E|_{\mathbb{A}^1_k}$ est trivial.

De plus, si G est quasi-réductif, ces conditions sont équivalentes à

(6) il existe un cocaractère $\lambda\colon \mathbb{G}_m \to G$ tel que $E \cong \lambda_*\mathcal{O}(1)$, c'est-à-dire que E est induit du $\mathbb{G}_m$-torseur correspondant à $\mathcal{O}(1)$ via λ,

et l'envoi d'un cocaractère $\lambda\colon \mathbb{G}_m \to G$ sur $\lambda_*\mathcal{O}(1)$ donne des bijections

$$H^1_{\mathrm{Zar}}(\mathbb{P}^1_k, G) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, G)/G(k) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, S)/N_G(S)(k),$$

où $S \subset G$ est un tore k-déployé maximal, $N_G(S)$ est son normalisateur, et $G(k)$ et $N_G(S)(k)$ agissent par conjugaison.

L'équivalence de (1)–(5) avec (6) échoue si G n'est pas quasi-réductif, comme le montre l'exemple $G = \mathbb{G}_a \rtimes \mathbb{G}_m$, où $\mathbb{G}_m$ agit sur $\mathbb{G}_a$ par multiplication par scalaires.

Lorsque G est réductif, le théorème 3.5 est connu sous le nom de théorème de Grothendieck–Harder, et peut être réduit au cas où $G = \mathrm{GL}_n$ par des arguments qui utilisent la réductivité de façon cruciale, par exemple, qui reposent sur le théorème d'Haboush. Lorsque G est quasi-réductif, cette réduction n'est plus disponible. Au lieu de cela, nous introduisons un argument géométrique basé sur le théorème d'extension 3.4 et l'invariance des G-torseurs par rapport aux couples henséliens des champs.

Plus précisément, on considère le diagramme

$$\mathbb{P}^1_k \overset{j}{\hookrightarrow} [\mathbb{A}^2_k/\mathbb{G}_m] \overset{i}{\hookleftarrow} B\mathbb{G}_m,$$

où i est l'immersion fermé induite par $\{0\} \hookrightarrow \mathbb{A}^2_k$ et j est l'immersion ouverte complémentaire de $\mathbb{P}^1_k = (\mathbb{A}^2_k \setminus \{0\})/\mathbb{G}_m$. On obtient des bijections

$$H^1(\mathbb{P}^1_k, G) \xleftarrow{\sim} H^1([\mathbb{A}^2_k/\mathbb{G}_m], G) \xrightarrow{\sim} H^1(B\mathbb{G}_m, G).$$

La bijection de gauche suit du théorème 3.4, avec un argument de descente étale pour se réduire au cas de l'immersion ouverte $\mathbb{A}^2_k \setminus \{0\} \hookrightarrow \mathbb{A}^2_k$. Ici on utilise le fait que G est quasi-réductif. La bijection de droite vaut pour tout k-groupe lisse G, et suit de l'invariance des G-torseurs par rapport au couple hensélien des champs $B\mathbb{G}_m \hookrightarrow [\mathbb{A}^2_k/\mathbb{G}_m]$, comme démontré par Alper–Hall–Rydh [AHR19] et Wedhorn [Wed23]. On conclut en observant que les G-torseurs sur $B\mathbb{G}_m$ correspondent aux morphismes $B\mathbb{G}_m \to BG$, et donc aux couples (P, λ), où P est un G-torseur sur k et $\lambda \colon \mathbb{G}_m \to \underline{\mathrm{Aut}}(P)$ est un homomorphisme. Les torseurs triviaux en un k-point correspondent aux couples (P, λ) où P est trivial, et donc aux cocaractères $\lambda \colon \mathbb{G}_m \to G$. Ceci conclut notre esquisse de preuve du théorème 3.5 si G est quasi-réductif. Par dévissage au cas quasi-réductif, on obtient l'équivalence entre (1)-(5) pour G lisse quelconque.

3.3 Groupe de Whitehead et fin de preuve

Il nous reste à esquisser la preuve du théorème 3.2. Pour simplifier, on considère le cas où la k-algèbre semi-locale A est locale, avec idéal maximal $\mathfrak{m}$ tel que $A/\mathfrak{m} = k$.

Supposons donné un G-torseur $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{P}^1_A$ tel que $\mathcal{F}|_{t=\infty}$ et $\mathcal{F}|_{\mathbb{P}^1_k}$ sont triviaux et $\mathcal{F}|_{\mathbb{A}^1_A} \cong \mathcal{E}|_{\mathbb{A}^1_A}$. Autrement dit, $\mathcal{F}$ est obtenu à partir de $\mathcal{E}$ en tordant à l'infini et sa fibre spéciale est triviale. Comme l'application $BG \to \mathrm{Bun}_G(\mathbb{P}^1_k)$ induite par le foncteur d'image réciproque est une immersion ouverte, ceci entraîne que le G-torseur $\mathcal{F}$ est trivial et donc en particulier $\mathcal{E}|_{t=0} \cong \mathcal{F}|_{t=0}$ est trivial. (En fait, dans ce cas, même $\mathcal{E}|_{\mathbb{A}^1_A}$ est trivial. Pour l'instant, nous n'avons pas prouvé cette version plus forte du théorème 3.2, sauf si la k-algèbre A est locale et $A/\mathfrak{m} = k$.)

Soit $s = t^{-1}$. Les recollements de $\mathcal{E}|_{\mathbb{A}^1_A}$ avec le torseur trivial à l'infini sont paramétrés par $G(A(\!(s)\!))/G(A[\![s]\!])$, et ceux de $\mathcal{E}|_{\mathbb{A}^1_k}$ avec le torseur trivial à l'infini par $G(k(\!(s)\!))/G(k[\![s]\!])$. On obtient un carré commutatif d'ensembles

$$\begin{tikzcd} G(A(\!(s)\!))/G(A[\![s]\!]) \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \{\mathcal{F} : \mathcal{F}|_{\mathbb{A}^1_A} \cong \mathcal{E}|_{\mathbb{A}^1_A},\ \mathcal{F}|_{t=\infty} \text{ trivial}\} \arrow[d] \\ G(k(\!(s)\!))/G(k[\![s]\!]) \arrow[r, two heads] & \{\overline{\mathcal{F}} : \overline{\mathcal{F}}|_{\mathbb{A}^1_k} \cong \mathcal{E}|_{\mathbb{A}^1_k},\ \overline{\mathcal{F}}|_{t=\infty} \text{ trivial}\}. \end{tikzcd}$$

Comme $\mathcal{E}|_{\mathbb{P}^1_k}$ est trivial à l'infini, d'après le théorème 3.5 il est trivial sur $\mathbb{A}^1_k$. Par conséquent, l'ensemble en bas à droite contient le G-torseur trivial. On veut relever le G-torseur trivial en un élément de l'ensemble en haut à droite. Pour cela, il suffit de montrer la surjectivité de la flèche verticale gauche.

On définit le *groupe de Whitehead*

$$W(k, G) \coloneqq G(k)/G(k)^+,$$

où $G(k)^+$ est le sous-groupe de $G(k)$ engendré par les $U(k)$, où U parcourt les sous-groupes unipotents déployés de G. Le groupe de Whitehead est un invariant de nature K-théorique qui est centrale dans la théorie des groupes réductifs ; voir [Gil09]. Par exemple, on a $\varinjlim_n W(k, \mathrm{GL}_n) \cong K_1(k)$.

Comme l'application de réduction $R(\!(s)\!) \to k(\!(s)\!)$ est surjective, l'application induite $U(R(\!(s)\!)) \to U(k(\!(s)\!))$ est surjective pour tout k-groupe unipotent déployé U. Par conséquent, la preuve du théorème 3.2 serait complète si nous savions que $W(k(\!(s)\!), G)$ était engendré par $G(k[\![s]\!])$.

Théorème 3.6 ([33]). *Soit G un k-groupe quasi-simple (c'est-à-dire quasi-réductif et parfait) et simplement connexe (c'est-à-dire que $G_{\overline{k}}/R_u(G_{\overline{k}})$ est simplement connexe) et pseudo-déployé (c'est-à-dire que G admet un k-tore maximale déployé), alors $W(k(\!(s)\!), G)$ est engendré par $G(k[\![s]\!])$.*

Si G est réductif (donc semi-simple), ce théorème est dû à Borel–Tits [BT73]. (En fait, dans ce cas il suffit de supposer que chacun des facteurs simples de G possède un sous-groupe parabolique propre.) La preuve du théorème 3.6 se fait par réduction au cas quasi-simple. Dans ce cas, on s'appuie sur certains résultats techniques concernant les groupes quasi-réductifs, en particulier la théorie des revêtements simplement connexes des k-groupes quasi-simples, due à Conrad–Prasad [CP16, Theorem 5.1.3], et des sous-groupes de Levi des groupes quasi-réductifs, développée par Conrad–Gabber–Prasad [CGP15, Appendix C].

3.4 Décompositions des groupes de lacets

Les théorèmes 3.1 et 3.5 nous permettent d'établir les décompositions de Birkhoff et Cartan pour les groupe de lacets $G(k(\!(t)\!))$ lorsque G est quasi-réductif.

Théorème 3.7 ([33])**.** *Soit k un corps, soit G un k-groupe quasi-réductif, et soit S un tore k-déployé maximal.*

(Décomposition de Birkhoff) On a

$$G(k(\!(t)\!)) = \coprod_{\lambda \in X_*(S)^+} G(k[t^{-1}])t^\lambda G(k[\![t]\!]).$$

(Décomposition de Cartan) On a

$$G(k(\!(t)\!)) = \coprod_{\lambda \in X_*(S)^+} G(k[\![t]\!])t^\lambda G(k[\![t]\!]).$$

(Décomposition d'Iwasawa) Pour tout sous-groupe pseudo-parabolique P de G, on a

$$G(k(\!(t)\!)) = P(k(\!(t)\!))G(k[\![t]\!]).$$

Ici $X_*(S)^+ \coloneqq \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, S)/N_G(S)(k)$ est l'ensemble qui apparaît déjà dans l'énoncé du théorème 3.5.

Pour montrer le théorème 3.7, on remplace la théorie de Bruhat–Tits par des arguments géométriques utilisant le théorème 3.5 et les champs algébriques. Notre argument pour la décomposition de Birkhoff est nouveau, géométrique et plus simple déjà dans le cas réductif. Il est inspiré par la preuve de Alper–Heinloth–Halpern-Leistner [AHHL21] de la décomposition de Cartan dans le cas réductif. En gros, la méthode de Alper–Heinloth–Halpern-Leistner est fondée sur la géométrie du champ quotient $[\mathrm{Spec}(k[\![t]\!][u,v]/(uv-t))/\mathbb{G}_m]$, où l'action de $\mathbb{G}_m$ est triviale sur t, de poids 1 sur u et de poids -1 sur v. L'ouvert complémentaire du point fermé (t, u, v) est la réunion de deux copies de $\mathrm{Spec}(k[\![t]\!])$ recollées au point générique $\mathrm{Spec}(k(\!(t)\!))$ (un schéma non-séparé). De façon similaire, nous démontrons la décomposition de Birkhoff à partir de la géométrie du champ quotient $[\mathbb{A}^2/\mathbb{G}_m]$, où l'action de $\mathbb{G}_m$ a poids $(1, 1)$. Dans ce cas, l'ouvert complémentaire de l'origine est $\mathbb{P}^1_k$, et c'est ici que le théorème 3.5 intervient. La décomposition d'Iwasawa est une conséquence du théorème 3.1 et du fait que l'espace homogène G/P est pseudo-complet (en fait, même pseudo-propre, comme l'on montre dans [33, Theorem 3.3.1]).

4. Classes de Brauer et courbes de genre 1

La question suivante a été posée indépendamment par Clark [Cla07] et Saltman [RV11]. On appelle *courbe* un schéma projective lisse et géométriquement connexe de dimension 1 sur un corps.

Question 4.1 (Clark, Saltman). *Soit F un corps et soit $\alpha \in \mathrm{Br}(F)$ une classe de Brauer. Existe-t-il une courbe de genre 1 sur F telle que $\alpha_{F(C)} = 0$ dans $\mathrm{Br}(F(C))$?*

Cette question est équivalente à se demander si toute variété de Severi–Brauer admet un morphisme depuis une courbe de genre 1. Si C est une courbe de genre g, alors le fibré canonique sur C est de degré $2g-2$, et en particulier C possède un zéro-cycle de degré $2g-2$. Il s'ensuit que si une classe de Brauer α est déployée par une courbe de genre g, alors l'indice de α divise $2g-2$. Par conséquent, la classe des courbes de genre 1 est la seule qui puisse éventuellement déployer toutes les classes de Brauer.

L'une des motivations initiales de la question 4.1 est l'exemple suivant dû à M. Artin, qui fournit des indices en faveur d'une réponse affirmative pour les classes de Brauer cycliques. Supposons que α soit la classe de Brauer d'une algèbre à division cyclique A de degré n inversible dans F. Soit L/F une extension galoisienne cyclique de degré n qui déploie A, soit $G \coloneqq \mathrm{Gal}(L/F)$ et soit $\sigma \in G$ un générateur. En notant X la variété de Severi–Brauer de A, on dispose d'un isomorphisme G-équivariant $X_L \cong \mathbb{P}^{n-1}_L$, où σ agit sur $\mathbb{P}^{n-1}_L$ par $(a_1 : a_2 : \ldots : a_n) \mapsto (\lambda a_n : a_1 : \ldots : a_{n-1})$ pour un certain $\lambda \in F^\times$. En particulier, si pour $i = 1, \ldots, n$ on désigne $e_i \in \mathbb{P}^{n-1}_L$ le L-point dont la i-ème coordonnée vaut 1 et toutes les autres sont nulles, alors la réunion des n droites projectives de $\mathbb{P}^{n-1}_L$ reliant e_i à e_{i+1} pour $i = 1, \ldots, n-1$, ainsi que celle reliant e_n à e_1, est G-invariante ; elle se descend donc en un sous-schéma fermé $Z \subset X$ géométriquement réduit et géométriquement connexe de dimension 1 et genre arithmétique 1. Si l'on pouvait déformer Z en un sous-schéma lisse C de X, alors C serait une courbe de genre 1 munie d'un morphisme vers X. Cette stratégie peut être mise en œuvre si le corps F est fertile.

La question 4.1 admet une réponse positive dans plusieurs cas. Swets [Swe95], de Jong–Ho [dJH12], Auel (non publié) et Antieau–Auel [AA21] ont répondu affirmativement à la question pour les classes dans $\mathrm{Br}(F)$ d'indice au plus 6 et, sous des hypothèses supplémentaires sur F, pour les classes d'algèbres cycliques. Soulignant encore davantage la subtilité de la question, Ho et Lieblich [HL21] ont démontré que toute classe de Brauer sur F peut être déployée par un torseur sous une variété abélienne sur F. (On rappelle que toute courbe de genre 1 est un torseur sous sa jacobienne, qui est une courbe elliptique.)

4.1 Les contrexemples

Dans un travail en commun avec Zinovy Reichstein, nous avons répondu négativement à la question 4.1. En fait, pour tout entier positif g, nous construisons des classes de Brauer qui ne sont déployées par aucun torseur sous une variété abélienne de dimension g.

Théorème 4.2 ([37]). *Soient p un nombre premier, k un corps contenant une racine primitive p-ième de l'unité et r un entier positif. Soit $F_r := k(\!(t_1)\!)(\!(t_2)\!)\dots(\!(t_{2r})\!)$ le corps des séries de Laurent itérées en les variables $t_1, \dots, t_{2r}$, et considérons la classe de Brauer $\alpha_r \in \mathrm{Br}(F_r)$ du produit tensoriel $D_r := (t_1, t_2)_p \otimes \dots \otimes (t_{2r-1}, t_{2r})_p$. Si*

$$r \geq \begin{cases} 5g^2 + 2g & (p > 2,\ g \geqslant 2), \\ 9g^2 + 2g - 1 & (p = 2,\ g \geqslant 2), \\ 6 & (p > 2,\ g = 1), \\ 7 & (p = 2,\ g = 1), \end{cases}$$

alors α_r ne peut être déployée par aucun torseur sous une variété abélienne de dimension g sur F_r.

Le *p-rang* d'un groupe fini G est le plus grand entier positif m tel que G contient un sous-groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^m$. L'idée la preuve du théorème 4.2 est la suivante : tout torseur sous une variété abélienne de dimension g sur F_r, après une extension finie F'/F_r de degré premier à p, est déployée par une extension galoisienne de p-rang majoré en termes de g, tandis que α_r ne peut être déployée que par des extensions galoisiennes de p-rang au moins r, même après une extension finie préliminaire F'/F_r de degré premier à p. Si r est suffisamment gros par rapport à g, on obtient une contradiction.

La démonstration du théorème 4.2 repose sur les trois faits ci-dessous. Pour fixer les idées, on ne considère que le cas où p est impair et $g = 1$.

Proposition 4.3. *Soient n un entier positif, F un corps qui contient une racine n-ième de l'unité et C une courbe de genre 1 sur F de période n en tant que torseur sous sa jacobienne. Alors il existe une extension galoisienne finie L/F telle que $\mathrm{Gal}(L/F)$ est une extension d'un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ par un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$ et $C(L) \neq \emptyset$.*

Proposition 4.4. *Soit p un nombre premier impair. Pour tout entier positif e, le p-rang de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z})$ est au plus 3.*

Proposition 4.5 (Tignol–Wadsworth [TW87])**.** *Soit F'/F_r une extension finie de degré premier à p et soit L/F' une extension galoisienne finie telle que $(\alpha_r)_L = 0$ dans* $\mathrm{Br}(L)$*. Alors le p-rang de* $\mathrm{Gal}(L/F')$ *est au moins r.*

On esquisse la preuve la proposition 4.3. Pour un F-schéma étale fini Y, le *corps de décomposition* de Y est par définition la plus petite extension finie $F \subset L \subset F_s$ telle que P_L soit discret, c'est-à-dire une réunion disjointe de copies de $\mathrm{Spec}(L)$. Si $Y = \mathrm{Spec}(F[x]/(f(x)))$, où $f(x) \in F[x]$ est un polynôme séparable, alors le corps de décomposition de Y est le sous-corps de F_s engendré par F et les racines de $f(x)$.

Soit E la jacobienne de C. La suite exacte courte

$$0 \longrightarrow E[p^e] \longrightarrow E \xrightarrow{\times n} E \longrightarrow 0$$

montre que l'E-torseur C est induit par un $E[n]$-torseur P sur F. Soit $F \subset L \subset F_s$ le corps de décomposition de P et soit $F \subset K \subset F_s$ le corps de décomposition de $E[n]$. L'application $E[n]_L \times_L P_L \to P_L \times_L P_L$ donnée par $(g,p) \mapsto (p, gp)$ étant un isomorphisme et P_L étant discret, $E[n]_L$ est aussi discret. Donc $K \subset L$ et on obtient une suite exacte courte de groupes finis

$$1 \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/F) \longrightarrow \mathrm{Gal}(K/F) \longrightarrow 1.$$

La proposition 4.3 suit alors des faits suivants.

- Comme le K-schéma P_K est un torseur sous $E[n]_K \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$, le groupe $\mathrm{Gal}(L/K)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$.
- Comme $E[n]$ est une forme de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$, le groupe $\mathrm{Gal}(K/F)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. En utilisant la Galois-équivariance de l'accouplement de Weil, on voit que $\mathrm{Gal}(K/F)$ est même un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

La preuve de la proposition 4.4 est un argument élémentaire de théorie des groupes. Le point clé est que, pour tout $e \geq 2$, tout élément d'ordre p dans le noyau de la projection $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ appartient au noyau de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^{e-1}\mathbb{Z})$, qui est isomorphe à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{F}_p) \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^3$.

On passe à la preuve du théorème 4.2, dans le cas p impair et $g = 1$. Supposons par contradiction que α_r est déployée par une courbe de C genre 1 sur le corps F_r. Soit E la jacobienne de C. En considérant une p-clôture de F_r, on trouve une extension finie de corps F'/F_r de degré premier à p et un entier positif e tels que $C_{F'}$ soit d'ordre p^e en tant qu'élément de $H^1(F', E)$. Les propositions 4.3 et 4.4 donnent une extension galoisienne finie L/F' telle que $C(L) \neq \emptyset$ et telle que le p-rang de $\mathrm{Gal}(L/F')$ est au plus $3 + 2 = 5$. D'autre côté, comme $C(L) \neq \emptyset$, on a $(\alpha_r)_L = 0$ dans $\mathrm{Br}(L)$ et donc, d'après la proposition 4.5, le p-rang de $\mathrm{Gal}(L/F')$ est au moins r. Pour $r \geq 6$, cela produit la contradiction voulue.

Bibliographie

[AA21] B. Antieau et A. Auel. Explicit descent on elliptic curves and splitting Brauer classes. *arXiv:2106.04291*, 2021.

[AHHL21] J. Alper, J. Heinloth et D. Halpern-Leistner. Cartan-Iwahori-Matsumoto decompositions for reductive groups. *Pure Appl. Math. Q.*, 17(2):593–604, 2021.

[AHR19] J. Alper, J. Hall et D. Rydh. The étale local structure of algebraic stacks. *arxiv:1912.06162v4*.

[Ami91] S. A. Amitsur. Galois splitting fields of a universal division algebra. *J. Algebra*, 143(1):236–245, 1991.

[Art24] E. Artin. Kennzeichnung des Körpers der reellen algebraischen Zahlen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 3(1):319–323, 1924.

[AS27] E. Artin et O. Schreier. Eine Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 5(1):225–231, 1927.

[BS26] M. Brion et S. Schröer. The inverse Galois problem for connected algebraic groups. *Transform. Groups* 31 (2026), no. 1, 113–135.

[BT73] A. Borel et J. Tits. Homomorphismes “abstraits” de groupes algébriques simples. *Ann. of Math. (2)*, 97:499–571, 1973.

[BT78] A. Borel et J. Tits. Théorèmes de structure et de conjugaison pour les groupes algébriques linéaires. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 287(2):A55–A57, 1978.

[CGP15] B. Conrad, O. Gabber et G. Prasad. *Pseudo-reductive groups*, volume 26 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, deuxième édition, 2015.

[Cla07] P. Clark. Some open problems. https://web.archive.org/web/20070709154246/http://www.math.uga.edu/~pete/openquestions.html, 2007.

[CK01] H. Chu et M. Kang. Rationality of p-group actions. *J. Algebra*, 237(2):673–690, 2001.

[CP16] B. Conrad et G. Prasad. *Classification of pseudo-reductive groups*, volume 191 des *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2016.

[CTHK97] J.-L. Colliot-Thélène, R. T. Hoobler et B. Kahn. The Bloch-Ogus-Gabber theorem. Dans *Algebraic K-theory (Toronto, ON, 1996)*, volume 16 of *Fields Inst. Commun.*, pp. 31–94. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[CTO92] J.-L. Colliot-Thélène et M. Ojanguren. Espaces principaux homogènes localement triviaux. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (75):97–122, 1992.

[CTS79] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc. Fibrés quadratiques et composantes connexes réelles. *Math. Ann.*, 244(2):105–134, 1979.

[dJH12] A. Johan de Jong et W. Ho. Genus one curves and Brauer-Severi varieties. *Math. Res. Lett.*, 19(6):1357–1359, 2012.

[Dwy75] W. G. Dwyer. Homology, Massey products and maps between groups. *J. Pure Appl. Algebra*, 6(2):177–190, 1975.

[EM17] I. Efrat et E. Matzri. Triple Massey products and absolute Galois groups. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 19(12):3629–3640, 2017.

[FG21] M. Florence et P. Gille. Residues on affine Grassmannians. *J. Reine Angew. Math.*, 776:119–150, 2021.

[Flo20] M. Florence. Smooth profinite groups, II: the uplifting theorem. *arXiv:2009.11140*, 2020.

[Flo25] M. Florence. Realisation of linear algebraic groups as automorphism groups. *Doc. Math.*, 30(5):1201–1230, 2025.

[FP15] R. Fedorov et I. Panin. A proof of the Grothendieck-Serre conjecture on principal bundles over regular local rings containing infinite fields. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 122:169–193, 2015.

[Gil09] P. Gille. Le problème de Kneser-Tits. No. 326, Exp. No. 983, vii, 39–81 (2010). 2009. Séminaire Bourbaki. Vol. 2007/2008.

[GM22] M. Gherman et A. Merkurjev. Negligible degree two cohomology of finite groups. *J. Algebra*, 611:82–93, 2022.

[GMT18] P. Guillot, J. Mináč et A. Topaz. Four-fold Massey products in Galois cohomology. *Compos. Math.*, 154(9):1921–1959, 2018. Avec un appendice par O. Wittenberg.

[Gro58] A. Grothendieck. Torsion homologique et sections rationnelles. *Séminaire Claude Chevalley*, 3(5):1–29, 1958.

[HL21] W. Ho et M. Lieblich. Splitting Brauer classes using the universal Albanese. *Enseign. Math.*, 67(1-2):209–224, 2021.

[HW15] M. J. Hopkins et K. G. Wickelgren. Splitting varieties for triple Massey products. *J. Pure Appl. Algebra*, 219(5):1304–1319, 2015.

[HW23] Y. Harpaz et O. Wittenberg. The Massey vanishing conjecture for number fields. *Duke Math. J.*, 172(1):1–41, 2023.

[Kha97] C. Khare. Base change, lifting, and Serre's conjecture. *J. Number Theory*, 63(2):387–395, 1997.

[Mat18] E. Matzri. Triple Massey products of weight $(1, n, 1)$ in Galois cohomology. *J. Algebra*, 499:272–280, 2018.

[MT16] J. Mináč et N. D. Tân. Triple Massey products vanish over all fields. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 94(3):909–932, 2016.

[MT17] J. Mináč et N. D. Tân. Triple Massey products and Galois theory. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 19(1):255–284, 2017.

[Pos17] L. Positselski. Koszulity of cohomology = $K(\pi, 1)$-ness + quasi-formality. *J. Algebra*, 483:188–229, 2017.

[Pan20] I. A. Panin. Proof of the Grothendieck–Serre conjecture on principal bundles over regular local rings containing a field. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, 84(4):169–186, 2020.

[Rag94] M. S. Raghunathan. Principal bundles admitting a rational section. *Invent. Math.*, 116(1–3):409–423, 1994.

[Rag95] M. S. Raghunathan. Erratum: "Principal bundles admitting a rational section" *Invent. Math.*, 121(1):223, 1995.

[RV11] Anthony Ruozzi et Uzi Vishne. Conférence "Ramification in Algebra and Geometry at Emory". https://web.archive.org/web/20110525171036/http://www.mathcs.emory.edu/RAGE/RAGE-open-problems.pdf, 2011.

[Ser58] J.-P. Serre. Espaces fibrés algébriques. *Séminaire Claude Chevalley*, 3(1):1–37, 1958.

[SP] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. https://stacks.math.columbia.edu.

[Swe95] P. K. Swets. *Global sections of higher powers of the twisting sheaf on a Brauer-Severi variety*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1995. Thesis (Ph.D.)–The University of Texas at Austin.

[TA85] J.-P. Tignol et S. A. Amitsur. Kummer subfields of Mal'cev–Neumann division algebras. *Israel J. Math.*, 50(1-2):114–144, 1985.

[TA86] J.-P. Tignol et S. A. Amitsur. Symplectic modules. *Israel J. Math.*, 54(3):266–290, 1986.

[Tot13] B. Totaro. Pseudo-abelian varieties. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 46(5):693–721, 2013.

[TW87] J.-P. Tignol et A. R. Wadsworth. Totally ramified valuations on finite-dimensional division algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 302(1):223–250, 1987.

[Voe03] V. Voevodsky. Motivic cohomology with $\mathbb{Z}/2$-coefficients. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (98):59–104, 2003.

[Voe11] V. Voevodsky. On motivic cohomology with $\mathbb{Z}/l$-coefficients. *Ann. of Math. (2)*, 174(1):401–438, 2011.

[Wed23] T. Wedhorn. Extension and lifting of G-bundles on stacks. *arxiv:2311.05151v2*.

[Wei09] C. Weibel. The norm residue isomorphism theorem. *J. Topol.*, 2(2):346–372, 2009.