Séries numériques

Exercice 1 Déterminer la nature des séries de termes généraux :

1. $\dfrac{n!}{n^n}$, $(\mathrm{ch}\sqrt{\ln n})^{-2}$, $n^{-(1+(1/n))}$
2. $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})$, $\dfrac{\ln n}{\ln(e^n-1)}$, $n^{\ln n}e^{-\sqrt{n}}$

Exercice 2 Etudier les séries de termes généraux

1. $$u_n = \frac{(-1)^n}{(\ln n)(n^{1/n})}$$
2. $$v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} \text{ où } \alpha > 0$$
3. $$w_n = \ln(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}) \text{ où } \alpha > 0$$

Exercice 3 En justifiant votre réponse, classer les dix séries $\sum u_n$ suivantes en 4 catégories
– GD : celles telles que u_n ne tend pas vers 0 ;
– ZD : celles qui divergent et telles que $\lim u_n = 0$;
– AC : celles qui convergent absolument ;
– SC : celles qui convergent, mais non absolument.
(Attention : pour pouvoir répondre, certaines séries demandent deux démonstrations : par exemple pour montrer que $\sum u_n$ est SC, il faut montrer que $\sum u_n$ converge *et* que $\sum |u_n|$ diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\,;\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\,;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^2\,;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\log(1+\frac{1}{n})\right]\,;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n};\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-(1-\frac{1}{n})^n\right)\,;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1000}{3^n+1};\ \sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{\pi}{n});\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi n)\sin(\frac{\pi}{n});\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\frac{1}{3^{n-k}}\right).$$

Exercice 4 Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs, on suppose que $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ et que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^\beta}) \text{ , où } \alpha > 0 \ \ \beta > 1.$$

On pose $v_n = n^\alpha u_n$. Étudier $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, montrer que (v_n) a une limite finie et en déduire la nature de la série de terme général v_n.
Application : Étudier la série de terme général

$$u_n = \sqrt{n!}\sin 1 \sin\frac{1}{\sqrt{2}}\cdots\sin\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 5 Étudier la nature des séries de termes généraux

$$\tan\frac{\pi}{4n+1} - \cos\frac{\pi}{n}, \quad \sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln n},$$
$$\exp\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - 1 \quad \frac{(-1)^n}{(-1)^n + n}, \quad \sin\left(\frac{(n^2+1)^2}{n^3}\pi\right).$$

Exercice 6 (Utilisation d'une série) Le but de cet exercice est de montrer la convergence de l'intégrale généralisée suivante $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^4\sin^2 x}$.
Pour cela, on considère la série de terme général

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{1 + x^4\sin^2 x}.$$

Par un changement de variable, transformer u_n en

$$u_n = \int_0^\pi \frac{dx}{1 + (n\pi + x)^4\sin^2 x}$$

Encadrer ensuite u_n par les termes de la suite v_n où

$$v_n = \int_0^\pi \frac{dx}{1 + (n\pi)^4\sin^2 x}$$

Calculer explicitement l'intégrale v_n et en déduire un équivalent de u_n. Conclure.