Rappels sur les suites

Dans ce cours on rappelle les principales propriétés des suites nécessaires au cours.
Dans tout ce qui suit $\mathbb{N}$ désignera les entiers naturels positifs $0, 1, 2, ...$, $\mathbb{Z}$ tous les entiers naturels $..., -2, -1, 0, 1, 2, 3?..$ et $\mathbb{Q}$ les nombres rationnels.
Enfin $\mathbb{R}$ désignera les réels, et $\mathbb{C}$ les complexes.

1 Suites réelles et complexes

Définition 1.1. *Une suite réelle (u_n) est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, c'est à dire la donnée d'une famille de réels $u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$.*

Exemples

- la suite (u_n) telle que $u_n = n$ pour tout n;
- la suite (u_n) telle que $u_n = 2^n$ pour tout n.
- lLa suite (u_n) telle que $u_n = \alpha^n$ pour tout n, où α est un réel donné.
- Une suite est dite constante si il existe un réel x tel que $u_n = x$ pour tout n. On parle aussi de suites constantes à partir d'un certain rang.
- Une suite est dite récurrente quand le terme u_{n+1} est donné sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, dans ce cas on peut calculer tous les terme sde la suite à partir du moment où on connait u_0; par exemple si on suppose que $u_0 = 0$ et que $u_{n+1} = u_n + 1$ (dans ce cas $f(x) = x + 1$) alors $u_n = n$ pour tout n.
- si $u_{n+1} = \alpha u_n$ et $u_0 = 1$ ($f(x) = \alpha x$) alors $u_n = \alpha^n$.
- On peut généraliser la notion précédente en supposant que pour tout $n \geq 2$ $u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2})$, dans ce cas on peut calculer tous les termes de la suite dès que u_0 et u_1 sont connus, par exemple si $u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2}$, et $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ on vérifie que $u_n = n$;.
- On a par exemple des suites récurrentes linéaires du type

  $$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$$

  dans ce cas on se demande quand une suite de la forme α^n satisfait à une équation de ce type : on voit que l'on a nécessairement $\alpha^2 - a\alpha - b = 0$. Cette dernière équation est appelée l'équation caractéristique. Supposons qu'il y ait 2 racines distinctes α_1, α_2 (réelles ou complexes) alors toute suite de la forme

  $$u_n = s\alpha_1^n + t\alpha_2^n$$

  s, t réels ou complexes quelconques est une suite du type considéré.

Un autre exemple de suite est celui des uites récurrentes homographiques données sous la forme :

$$u_n = \frac{au_{n-1} + b}{cu_{n-1} + d}$$

2 Limites de suites réelles et complexes

Définition 2.1. *On dit qu'une suite (réelle ou complexe) (u_n) tend vers une limite ℓ (réelle ou complexe) quand n tend vers l'infini si pour tout réel $\epsilon > 0$ on peut trouver un entier $N(\epsilon)$ (dépendant de ϵ tel que pour tout $n \geq N(\epsilon)$ on a $|u_n - \ell| \leq \epsilon$. Ici $|u_n - \ell|$ dsésigne la valeur absolue si on parle de suites réelles, le module si on parle de suites complexes.*

Pour paraphraser cette définition "sans ϵ" on veut que si n est assez grand (pour tout n assez grand) u_n ne puisse s'éloigner de ℓ au delà d'une distance pescrite à l'avance. Et on veut pouvoir faire cela pour une distance arbitrairement petite.

Si on considére maintenant ce que veut dire l'affirmation "(u_n) ne tend pas vers ℓ quand n tend vers l'infini" cela veut dire que l'on peut trouver un $\epsilon > 0$ tel que l'on peut trouver des valeurs aritrairement grandes de n telle que $|u_n - \ell| > \epsilon$, c.a.d pour que pour tout k entier on peut trouver une valeur $n \geq k$ telle que $|u_n - \ell| > \epsilon$.

Dire qu'une suite n' a pas de limite veut dire qu'il n'existe aucun ℓ qui soit limite de la suite, soit que la propriété précédente est vraie pour tout ℓ.

Par exemple la suite $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite. En effet si on prend un $\ell > 0$, $\ell \neq 1$ pour tout entier n on a $|u_n - \ell| \geq |\ell - 1|$; si $\ell = 1$ pour tous les entiers impairs $2k + 1$ on a $u_{2k+1} = -1$ et donc $|u_{2k+1} - 1| = 2$, donc la différence $|u_n - 1|$ ne peut dans les deux cas être rendue arbtrairement petite pour tout entier assez grand. On laisse le cas $\ell \leq 0$ en exercice. On pourra aussi considérer le cas de $u_n = i^n$.

Définition 2.2. *On dit qu'une suite réelle (u_n) tend vers "plus l'infini" $(+\infty)$ quand n tend vers l'infini si pour tout réel μ on peut trouver un entier $N(\mu)$ (dépendant de μ) tel que pour tout $n \geq N(\mu)$ on a $u_n \geq \mu$.*

Pour paraphraser cette définition "sans μ" on veut que si n est assez grand (pour tout n assez grand) u_n est plus grand qu'une valeur quelconque pescrite à l'avance.

Dire qu'une suite ne tend pas vers "plus l'infini" $(+\infty)$ quand n tend vers l'infini veut dire qu'il existe μ réel tel que l'on peut trouver des entiers n arbitrairement grands tels que $u_n \leq \mu$.

On a évidemment les définitions analogues pour une suite tendant vers $-\infty$.

Le théoréme suivant est fondamental

Théoréme 2.3. *Soit (u_n) une suite réelle croissante ($u_n \leq u_{n+1}$ pour tout n) et majorée ($u_n \leq M$ pour un certain réel M et tous les entiers n). Alors la suite admet une limite ℓ. Le résultat analogue a lieu pour les suites décroissantes minorées.*

Remarque 2.4. *On peut se contenter de supposer que la suite est croissante (ou décroissante) à partir d'un certain rang. C'est à dire que $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \geq n_0$.*
Par ailleurs une suite croissante pour laquelle il n'existe pas de majorant, soit de réel M tel que $u_n < M$ pour tout n) tend vers $+\infty$ (résultat analogue pour les suites décroissantes).

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite tende vers une limite.

Théoréme 2.5. *(Critére de Cauchy) Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite réelle ou complexe admette une limite est que pour tout $\epsilon > 0$ on puisse trouver un entier N_ϵ tel que pour tous les entiers $m, n \geq N_\epsilon$ on ait $|u_m - u_n| \leq \epsilon$.*

On notera que la limite ℓ n'apparait pas dans l'énoncé.

Considérons pour finir le cas des suites récurrentes homographiques.

$$u_n = \frac{au_{n-1} + b}{cu_{n-1} + d}$$

On a d'abord

Lemme 2.6. *Soit u_n une suite récurrente donnée par $u_n = f(u_{n-1})$. Où on suppose que f est une fonction continue. Alors si la suite ℓ admet une limite ℓ on a $f(\ell) = \ell$.*

Ceci s'applique au cas des récurrences homographiques, on a donc si ℓ est une limite

$$\ell = \frac{a\ell + b}{c\ell + d}$$

notons α et β les deux racines (éventuellement complexes) de cette équation. Si elles sont distinctes on montre que :

$$\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = k\frac{u_{n-1} - \alpha}{u_{n-1} - \beta}$$

soit

$$\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = k^n\frac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$$

si $\alpha = \beta$ on a

$$\frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{1}{u_{n-1} - \alpha} + k$$

soit

$$\frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{1}{u_0 - \alpha} + nk$$

On a

$$k = \frac{a - c\alpha}{a - c\beta}$$

(premier cas) et

$$k = \frac{c}{a - c\alpha}$$

(second cas) dans ces formules.

Ces relations permettent, en fonction du module de k de décider de la limite de la suite de la suite. Dans le premier cas si $|k| < 1$ (resp. $|k| > 1$) la suite tend vers α (resp. β) (si toutefois $u_1 \neq \beta$ (resp. α). Si $|k| = 1$ il n'y a pas en général de limite. On laisse au lecteur le soin de vérifier tous les cas particuliers et le second cas.
On notera cependant que dans le cas ou les coefficients sont réels et les solutions de l'équation donnant ℓ sont complexes conjuguées alors la constante k est de module 1. Donc alors, sauf si u_0 est une des racines il n'y a pas convergence.
On rappellera aussi :

Théoréme 2.7. *Soit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f(\ell) = \ell$ pour un certain réel ℓ. Supposons que f est dérivable et que $|f'(x)|$ soit inférieur à une constante $c < 1$ pour tout x assez proche de ℓ ($x \in]\ell-\delta, \ell+\delta[$ pour un certain $\delta > 0$). Alors si $u_0 \in\in]\ell-\delta, \ell+\delta[$ la suite récurrente $u_n = f(u_{n-1})$ admet pour limite ℓ.*
Par contre si $|f'(x)|$ soit supérieur à une constante $c > 1$ pour tout x assez proche de ℓ ($x \in]\ell - \delta, \ell + \delta[$ pour un certain $\delta > 0$. Alors si $u_0 \in]\ell - \delta, \ell + \delta[$ la suite récurrente $u_n = f(u_{n-1})$ n'admet pas ℓ pour limite.

Exemples Si on prend $f(x) = \sin(cx)$ avec $0 \leq c < 1$ on peut appliquer le résultat précédent avec $\delta = +\infty$.

Voici un exemple moins trivial.
Si on prend $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a^2}{x})$, $a > 0$. Les limites possibles sont a et $-a$. Supposons que la valeut initiale soit positive, il en sera de même des suivantes. La dérivée en a vaut 0. Considérant les valeurs prises par la dérivée on constate qu'on peut appliquer le théoréme avec $\delta = a(1 - \frac{1}{\sqrt{3}})$. En fait on peut montrer qu'il y a toujours convergence.