Dual d'un espace vectoriel et formes linéaires

1 Espace vectoriel

Dans ce cours on ne consid/'ere que des d'espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{R}$.

Définition 1.1. *Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est un ensemble E muni de deux opérations. D'abord d'une addition, c'est à dire qu'à tout couple $v, w \in E$ on peut associer $v + w \in E$ tel que les règles de calcul ordinaires dans $\mathbb{R}^n$ aient lieu. A savoir*

- $(u + v) + w = u + (v + w)$ *pour tous* $u, v, w \in E$;
- $u + v = v + u$ *pour tous* $u, v \in E$;
- $u + v = v + u$ *pour tous* $u, v \in E$;
- *il existe un élément noté* 0_E *tel que* $u + 0_E = u$ *pour tout* $u \in E$; *pour tout* $u \in E$ *il existe un élément* $v \in E$ *tel que* $u + v = 0_E$.

De plus il existe une application de $\mathbb{R} \times E \longrightarrow E$ *notée* $(\lambda, v) \longrightarrow \lambda.v$, *telle que pour tout* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *(resp.* $\mathbb{C}$*) et* $v, w \in E$ *on ait*

- $1.v = v$;
- $(\lambda + \mu).v = \lambda.v + \mu.v$;
- $\lambda.(\mu.v) = (\lambda\mu).v$;
- $\lambda.(v + w) = \lambda.v + \lambda.w$.

Dans la suite $\lambda.v$ sera noté λv pour simplifier.
Les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés les scalaires, les éléments de E les vecteurs. La seconde opération est la multiplication par les scalaires.
Le vecteur 0_E est appelé le vecteur nul, il sera noté 0 simplement, on fera attention à ne pas le confondre avec $0 \in \mathbb{R}$. On a $0_E.v = 0_E$ ($0v = 0$ avec les notations allégées). On le montre en observant que $v = 1.v = (1 + 0).v = 1.v + 0.v = v + 0.v$, soit $v = v + 0.v$ puis en simplifiant.
le vecteur v tel que $u + v = 0$ est appelé l'opposé il est noté $-u$ car il est égal à $(-1)u$.
Voici des exemples.

1. Si on considère $\mathbb{R}^n$ en prenant pour addition l'addition terme à terme : $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ et pour multiplication par les scalaires $\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$ on constate qu'on a un espace vectoriel.
2. L'ensemble des fonctions $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ d'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$).

3. L'ensemble des fonctions continues $\mathcal{C}(]a,b[,\mathbb{R})$ d'un intervalle $]a,b[$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

4. L'ensemble des fonctions dérivables $\mathcal{D}(]a,b[,\mathbb{R})$ d'un intervalle $]a,b[$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

5. L'ensemble des fonctions infiniment dérivables $\mathcal{D}^\infty(]a,b[,\mathbb{R})$ d'un intervalle $]a,b[$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

6. On peut évidemment considérer dans les exemples précédents des intervalles fermés à gauche ou à droite.

7. L'ensemble des fonctions polynômes sur $\mathbb{R}$.

8. Ceux de degré inférieur ou égal à un entier donné n.

9. En particulier on peut considérer l'ensemble des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 1. On les apellera fonctions affines, on peut aussi considérer le sous-ensemble de celles qui sont nulles en l'origine : on les appellera formes linéaires (voir plus loin).

Définition 1.2. *Un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E est un sous-ensemble F non-vide de E tel que :*

- *si $u, v \in F$ alors $u + v \in F$;*
- *si $\lambda \in \mathbb{R}$, (resp $\mathbb{C}$) alors $\lambda u \in F$.*

- L'exemple 7 ci dessus est un sous-espace vectoriel de l'exemple 6 qui est lui même un sous-espace de l'exemple 5.
- $\mathbb{R}^{n-1}$ est un sous espace de $\mathbb{R}^n$, identifiant $\mathbb{R}^{n-1}$ aux n-uplets avec $x_n = 0$.
- Si on considère le plan $\mathbb{R}^2$ avec son système de coordonnées standard toute droite distincte passant par l'origine est un sous-espace (une droite qui ne passe pas par l'origine n'est pas un sous-espace).

On rappelle que l'intersection d'une famille quelconque de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
On notera que le sous-ensemble réduit au vecteur nul 0 est un sous-espace noté $\{0\}$, on l'appelle le sous-espace trivial.

Définition 1.3. *(Somme de deux sous-espaces) Etant donnés deux sous-espaces F et G d'un espace E (on abrège sous-espace vectoriel eu sous-espace et espace vectoriel en espace) leur somme notée $F + G$ est le sous-espace constitué par les vecteurs de la forme $u + v$ pour tout $u \in F$, $v \in G$.*
Si $F \cap G = \{0\}$ la somme est dite directe, et dans ce cas on note $F \oplus G$. On dit aussi que F et G sont en somme directe et le sous-espace $F \oplus G$ est appelé la somme directe de F et G.

Proposition 1.4. *Etant donnée une famille de sous-espaces F_i et $i = 1, \ldots, n$ d'un espace E leur somme est directe si et seulement si l'une des deux conditions suivantes a lieu :*

- *L'équation $x_1 + \ldots + x_n = 0$ avec $x_1 \in F_1, \ldots, x_n \in F_n$ a pour seule solution $x_1 = \ldots = x_n = 0$.*

- *Pour tout i, $1 \leq i \leq n$, on a*

$$(F_1 + \ldots + F_{i-1}) \cap F_i = \{0\}$$

Définition 1.5. *Si F et G sont des sous-espaces de E, si ils sont en somme directe et si $F \oplus G = E$ on dit que G est un supplémentaire de F (et F un supplémentaire de G).*

Un sous-espace a toujours un supplémentaire. Mais ce supplémentaire n'est pas unique. Par exemple si on considère le plan $\mathbb{R}^2$ avec son système de coordonnées standard pour E et l'axe des abscices pour F, toute droite distincte passant par l'origine est un supplémentaire pour F.
Si on considère l'espace $\mathbb{R}^3$ avec son système de coordonnées standard pour E et le plan des x, y pour F, toute droite non contenue dans ce plan et passant par l'origine est un supplémentaire pour F.

2 Systèmes de vecteurs et dimension

Soit E un espace vectoriel. Un système de vecteurs de E est une famille $(v_1, \ldots, v_n)$ de vecteurs de E.

Définition 2.1. *Un système $(v_1, \ldots, v_n)$ est lié si il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$. Si le système n'est pas lié il est libre.*
Un système $(v_i)_{i \in I}$ est lié si il existe λ_i, $i \in I$ presque tous nuls (nuls sauf un nombre fini d'entre eux) tels que $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i = 0$. Si le système n'est pas lié il est libre.

- Un système qui contient le vecteur nul est lié.
- Un système qui contient deux fois le même vecteur est lié.
- Un système qui contient un sous-système lié est lié.
- Un système qui est contenu dans un sous-système libre est libre.
- Parmi les polynômes de degré inférieur ou égal à n le système $1, X, X^2, \ldots, X^n$ est libre.
- Soit P_i un polynôme de la forme $X^i + a_{-1}X^{i-1} + \ldots + a_0$, parmi les polynômes de degré inférieur ou égal à n le système $P_0, P_2, \ldots, P_n$ est libre.
- Parmi les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ le système $1, e^x, \ldots, e^{nx}$ est libre.

Etant donné un sytème $(v_1, \ldots, v_n)$ une combinaison linéaire de ces vecteurs est un vecteur de la forme $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$. L'ensemble des combinaisons linéaires d'un système de vecteurs est un sous-espace vectoriel appelé le sous-espace engendré par le système.

Définition 2.2. *Un système $(v_1, \ldots, v_n)$ (resp. $(v_i)_{i \in I}$) est générateur pour un espace vectoriel E si tout vecteur de E est combinaison linéaire des v_i.*

Définition 2.3. *Un système $(v_1, \ldots, v_n)$ (resp. $(v_i)_{i \in I}$) est une base d'un espace vectoriel E si il est générateur et libre.*

Soit l'espace $\mathbb{R}^n$, et soit $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ où le terme 1 est en position i. Le système $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ appelé la base standard.
On appelle espace vectoriel de dimension finie tout espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Le théorème suivant est fondamental.

Théorème 2.4. *Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie on le même nombre d'éléments appelé dimension de l'espace.*

Ce théorème s'étend aux espaces vectoriels de dimension infinie. Mais on n'en parlera pas ici, donc dans toute la suite, E est un espace vectoriel de dimension finie.

- Le système $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est une base des polynômes de degré inférieur ou égal à n, l'espace est de dimension $n+1$.
- Soit P_i un polynôme de la forme $X^i + a_{-1}X^{i-1} + \ldots + a_0$, $0 \leq i \leq n$. le système $P_0, P_2, \ldots, P_n$ est une base des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
- L'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre n sans second membre est de dimension n.
- L'espace des suites linéaires récurrentes satisfaisant à une relation du type :

  $$u_k = a_{k-1}u_{k-1} + \ldots + a_{k-n}u_{k-n}$$

  est de dimension n.

Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. Alors, F est de dimension finie, et

$$\dim(F) \leq \dim(E)$$

De plus, on a $\dim(F) = \dim(E) \iff F = E$.

Définition 2.5. *On appelle rang d'un système de vecteurs d'un espace E la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ce système.*

Le rang est toujours inférieur au nombre de vecteurs du système et à la dimension de l'espace ambiant E.

3 Sous espaces et sommes directes

Proposition 3.1. *Soient* **1.** *F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a*

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

2. *F et G sont en somme directe si et seulement si*
$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$.
3. *On a équivalence entre:*
(i) $E = F \oplus G$
(ii) $E = F + G$ *et* $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$
(iii) $F \cap G = \{0\}$ *et* $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$

A titre d'exemple et de contre exemple on regardera la somme de deux plans distincts de $\mathbb{R}^3$.

Définition 3.2. *Si F et G sont des sous-espaces de E, si ils sont en somme directe et si $F \oplus G = E$ on dit que G est un supplémentaire de F et F un supplémentaire de G.*

La troisième partie de la proposition précédente se généralise en

Proposition 3.3. *Soient*
3. *On a équivalence entre:*
(i)

$$E = \oplus_{i=1,\ldots,n} F_i$$

(ii)

$$E = \sum_{i=1,\ldots,n} F_i$$

et $\dim(E) = \Sigma_{i=1,\ldots,n} \dim(F_i)$

La proposition suivante explique comment construire une base d'un espace vectoriel E qui est somme directe de deux sous-espaces F et G.

Proposition 3.4. *La réunion d'une base quelconque de F et d'une base quelconque de G est une base de E. autrement dit si $(v_1, \ldots, v_k)$ est une base de F, $(w_1, \ldots, w_\ell)$ une base de G $(v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_\ell)$ est une base de E.*

Le résxultat s'étend à une somme directe de n sous-espaces.

4 Application linéaire, rang, projecteurs

Dans tout ce qui suit, E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie.

Définition 4.1. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, on, dit que c'est une application linéaire si les deux conditions sont satisfaites pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $v, w \in E$:*

- $f(\lambda v) = \lambda f(v)$
- $f(v + w) = f(v) + f(w)$.

La somme de deux applications linéaires est linéaire. Si on multiplie une application linéaire par un scalaire on obtient encore une application linéaire. L'ensemble des applications linéaires de E dans F forme un espace vectoriel noté $\mathcal{L}(E, F)$. Sa dimension est $\dim(E)\dim(F)$.
Si f est une application linéaire de E dans F, et g une application linéaire de F dans G alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Le noyau de f est l'ensemble des $v \in E$ tels que $f(v) = 0$. C'est un sous-espace vectoriel de E noté $\mathrm{Ker}(f)$.

L'image de f est l'ensemble des $f(v)$, $v \in E$. C'est un sous-espace vectoriel de E noté $\mathrm{Im}(f)$.

Définition 4.2. *On appelle rang de f la dimension de l'image de f.*

Définition 4.3. *Le rang d'un système de vecteurs $(v_1, \ldots, v_n)$ est la dimension du sous-espace qu'il engendre.*

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, le rang de f est le rang du système de vecteurs $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.

Proposition 4.4. *(théorème du rang) On a*

$$\mathrm{rang}(f) = \dim(E) - \dim(\ker f)$$

Soit E' un supplémentaire dans E de $\ker f$. L'application f restreinte à E' induit un isomorphisme sur E'. On a donc $\mathrm{rang}(f) = \dim(\mathrm{Im} f) = \dim(E) - \dim(\ker f)$.

Proposition 4.5. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, et supposons que* $\dim E = \dim F$ *et qu'elle est finie. On a alors équivalence entre*
(i) f est injective
(ii) f est surjective
(iii) f est bijective

On va maintenant considérer des applications linéaires particulières les projecteurs. Soit $E = F \oplus G$ une décomposition en somme directe. Tout vecteur $x \in E$ s'écrit $x = x_F + x_G$, $x_F \in F$, $x_G \in G$. Le projecteur parallèlement à G sur F est l'application de E dans E qui a x associe x_F, on le notera p. En voici les propriétés :

- p est linéaire;
- $\mathrm{Ker}(p) = G$;
- $\mathrm{Im}(p) = F$;
- $p^2 = p$.

En fait

Théorème 4.6. *Une application linéaire p est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$. Dans ce cas c'est le projecteur parallèlement à* $\mathrm{Ker}(p)$ *sur* $\mathrm{Im}(p)$.

Si E est un espace vectoriel l'ensemble des applications linéaires de E dans lui même est noté $\mathcal{L}(E)$.
On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des aplications linéaires inversibles de E dans E. La composée de deux applications inversibles est inversible.

5 Hyperplans et formes linéaires, dual

Soit E un espace de dimension n. On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel H de E de dimension $n - 1$.

Supposons que E est de dimension n.
On a équivalence entre:
(i) H est un hyperplan de E;
(ii) Pour tout vecteur $v \in E$, $v \notin H$ E est somme directe de H et de $\mathbb{R}v$.

Une frorme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) . Si ϕ une forme linéaire non nulle. D'après le théorème du rang, son noyau est un hyperplan de E.

Soit H un hyperplan de E. Il existe une forme linéaire non nulle ϕ sur E telle que $H = \ker \phi$. On dit que ϕ est une équation de H.
Soit $v \in E$ tel que $E = H \oplus \mathbb{R}v$. Soit p la projection sur $\mathbb{R}v$ parallèlement à H. Il suffit alors de prendre pour ϕ l'application de E dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in E$, $p(x) = \phi(x)v$.
Par exemple dans $\mathbb{R}^3$, les hyperplans sont les plans passant par l'origine. Ils ont une équation du type $ax + by + cz = 0$; $\phi(x, y, z) = ax + by + cz$ est la forme linéaire correspondante.

Définition 5.1. *L'ensemble des formes linéaires est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ qu'on appelle le dual de E et que l'on note E^*.*

Théorème 5.2. *Soit un espace vectoriel E de dimension n et de base $B = (e_1, \ldots, e_n)$. L'espace vectoriel E^* est de dimension n et admet pour base (en particulier) le système de formes linéaires $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$, où e_i^* est défini par $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$, avec $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$, 0 sinon. Cette base de E^* est appelée base duale de la base B.*

Note : $\delta_{i,j}$ est appelé le symbole de Kronecker.
Quelques détails sur la démonstration.
D'abord une forme linéaire ϕ est déterminée par ses valeurs sur la base. En efftet si $v \in E$ est donné par $v = x_1 E_1 + \cdots + x_n e_n$ on a (par linéarité) $\phi(v) = x_1\phi(e_1) + \cdots + x_n\phi(e_n)$.
Donc la forme est déterminée dés que l'on connait les valeurs $\phi(e_i)$ pour tout i.
Ensuite l'application qui à v associe sa coordonnée x_i dans la base B est la forme linéaire e_i^*. Donc la formule ci dessus devient

$$\phi = \phi(e_1)e_1^* + \cdots + \phi(e_n)e_n^*$$

Le fait que la famille des e_i^* soit libre résulte de ce qui suit. Si on a $a_1 e_1^* + \cdots + a_n e_n^* = 0$, en appliquant cette identité au vecteur e_i on obtient $a_i = 0$.
Le résultat suit : la famille est libre et génératrice, donc est une base (on la note souvent B^*).