Dual d'un espace vectoriel, applications duales, changement de bases

1 Forme bilinéaire canonique, orthogonalité

On ne considère que des d'espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{R}$, cependant tous les résultats ci dessous s'appliqueraient pour des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$

Définition 1.1. *Soit E espace vectoriel et $E*$ son dual. On appelle dans ce contexte forme bilinéaire canonique l'application de $E \times E^* \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à un couple (v, ϕ) associe $\phi(x)$. On note $< v, \phi >$.*

Voici ses propriétés.

1. Soient $v_1, v_2 \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $\phi \in E^*$ alors

$$< v_1 + v_2, \phi >=< v_1, \phi > + < v_2, \phi >, \;\; < \alpha v_1, \phi >= \alpha < v_1; \phi >$$

2. Soient $\phi_1, \phi_2 \in E^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $v \in E$ alors

$$< v, \phi_1 + \phi_2 >=< v, \phi_1 > + < v, \phi_2 > \;\; < v, \alpha\phi_1 >= \alpha < v\phi_1 >$$

Définition 1.2. *(Orthogonal d'un sous espace) Etant donné un sous-espace F d'un espace E on appelle orthogonal de F et on note $F^\perp$ le sous -espace de E^* constitué par les $\phi \in E^*$ tels que $< v, \phi >= 0$ pour tout $v \in F$.*

En fait il faut montrer que c'est un sous espace.

Proposition 1.3. *Etant donnée une famille deux sous-espaces F et G de E on a*

$$F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp \subset E^*$$

et

$$F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp \subset E^*$$

Corollaire 1.4. *Si F et G sont en somme directe alors i $F^\perp \cap G^\perp = \{0\}$.).*

On remarquera que $E^\perp = \{0\}$ et $E = \{0\}^\perp$.

Proposition 1.5. *Soit F un sous-espace de E, alors*

$$\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$$

2 Transposition

Soit $f\colon E \longrightarrow F$ une application linéaire. On définit son application transposée (ou parfois appelée adjointe) ${}^t f\colon F^* \longrightarrow E^*$ par $\phi \in F^* \mapsto \phi \circ f \in E^*$. C'est une application linéaire.

Proposition 2.1. *On a pour tout $v \in E$, $\phi \in E^*$*

$$< f(v), \phi >=< v, {}^t f \phi) >$$

De plus soient $f\colon E \longrightarrow F$ et $g\colon F \longrightarrow G$ des applications linéaires, alors

$${}^t(g \circ f) = {}^t f \circ {}^t g$$

On remarquera que la transposée de l'identité de E est l'identité de E^*.
Le théorème suivant est très important :

Théorème 2.2. *Le rang d'une application linéaire et de sa transposée sont lse mêmes.*

Ceci résulte de

Théorème 2.3. *On a*

$$(\mathrm{Im}(f)^{\perp} = \mathrm{Ker}^t f$$

$$(\mathrm{Im}^t)^{\perp} = \mathrm{Ker}(f)$$

3 Un exemple important

On considère les polynômes de degré inférieur ou égal à n, soit P_n. Rappelons que

- Le système $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est une base des polynômes de degré inférieur ou égal à n, l'espace est de dimension $n+1$.
- Soit P_i un polynôme de la forme $X^i + a_{-1}X^{i-1} + \ldots + a_0$, $0 \leq i \leq n$. le système $P_0, P_2, \ldots, P_n$ est une base des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Si on choisit un réel a arbitraire. L'application de ev_a P_n dans $\mathbb{R}$ qui à un polynôme P associe $P(a)$ est une forme linéaire.

- Si $a_0, \ldots, a_n$ sont des réels deux à deux distincts les formes linéaires $ev_{a_0}, \ldots, ev_{a_n}$ forment une base de P_n^*.
- Cette base est la duale de la base donnée par les plynômes suivants (dits polynômes d'interpolation de Lagrange) :

$$\frac{(X-a_0)\cdots(X-a_{i-1})(X-a_{i+1})\cdots(X-a_n)}{(a_i-a_0)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)}, \quad i = 0, \ldots, n$$

Ceci sera démontrée en exercice.

4 Matrices et transposition

Dans tout ce qui suit, E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie respectives n et p, on suppose données des bases B et B'.

Proposition 4.1. *Soient φ une application linéaire de E dans F, sa matrice (dans B et B') $A = (a_{i,j})$ a p lignes et n colonnes. La matrice $(b_{i,j})$ de son application transposée ${}^t\varphi \colon F^* \longrightarrow E^*$ (dans les bases duales) a n lignes et p colonnes est la matrice, est notée ${}^tA$ et est telle que $b_{i,j} = a_{j,i}$.*

En effet, notons e_i les vecteurs de B, f_j ceux de B', et e_i^*, f_j^* ceux des bases duales. par définition de A

$$\varphi(e_i) = \sum_{\ell=1,\ldots,p} a_{\ell,i} f_\ell$$

et

$${}^t\varphi(f_j^*) = \sum_{h=1,\ldots,n} b_{h,j} e_h$$

On applique alors la relation

$$< \varphi(e_i), f_j^* >=< e_i, {}^t\varphi(f_j^*) >$$

Le premier membre est par définition égal à $a_{j,i}$ le second à $b_{i,j}$. Le résultat suit.
On notera que si A a a q lignes et p colonnes et B a p lignes et n colonnes, on a

$${}^t(AB) = {}^t(B){}^t(A)$$

qui a a q lignes et n colonnes. 'De plus si A est une matrice carrée on a :

$$\det(A) = \det({}^tA)$$

Voici enfin la formule de changement de bases. Soient B et B' deux bases d'un même espace vectoriel. Soit P la matrice de passage définie par

$$f_j = \sum_{\ell=1,\ldots,n} p_{\ell,j} e_\ell$$

Soit Q la matrice de passage dans le dual définie par

$$f_i^* = \sum_{h=1,\ldots,n} q_{h,i} e_h^*$$

On calcule à partir de cette dernire formule la quantité

$$\delta_{i,j} =< f_j, f_i^* >=< f_j, \sum_{h=1,\ldots,n} q_{h,i} e_h^* >= \sum_{h=1,\ldots,n} q_{h,i} < f_j, e_h^* >= \sum_{h=1,\ldots,n} q_{h,i} p_{h,j}$$

Cette relation dit exactement que :

$$Q = {}^t(P^{-1}) = ({}^tP)^{-1}$$

5 Formes bilinéaires, et application canonique

Soient E et F des espaces vectoriels.

Définition 5.1. *Une forme bilinéaire $\varphi\colon E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application vérifiant les conditions 1 et 2 de la proposition 1.1. La plupart du temps on supposera que $E = F$.*

On notera souvent $< x, y >$ pour $\varphi(x, y)$.
La donnée d'une forme bilinéaire $\varphi\colon E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ permet de définir une application linéaire $\hat{\varphi}\colon E \longrightarrow E^*$:

Proposition 5.2. *La forme bilinéaire $\varphi\colon E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ détermine une application linéaire $x \mapsto \hat{\varphi}(x) \in E^*$ par la formule*

$$\hat{\varphi}(x)(y) = \varphi(x, y)$$

Définition 5.3. *La forme bilinéaire $\varphi\colon E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est non dégénérée si $\hat{\varphi}$ est un isomorphisme.*

Exemple : sur $\mathbb{R}^n$ le produit scalaire $< v, w >= \sum_i v_i w_i$ est une forme bilinéaire non dégénérée. Les v_i, w_j sont les coordonnées de v et w dans la base standard.
Si on considre l'espace vectoriel des fonctions intégrables sur un intervalle I

$$(f; g) \mapsto \int_I f(t)g(t)dt$$

est une forme bilinéaire. Si on se restreint à P_n elle est non dégénérée.

6 Bidual

Soient E un espace vectoriel. Le dual de E^* est appelé le bidual de E et noté E^{**}. La forme bilnéaire canonique de la section 1 détermine une application linéaire $E \longrightarrow E^{**}$.
On se contentera d'énoncer :

Proposition 6.1. *Cette application est injective. Elle est surjective si et seulement si E est de dimension finie. Dans ce cas $E \cong E^{**}$.*