Triangularisation, jordanisation, exponentielle de matrices

1 Triangularisation

Soient E un espace vectoriel de dimension n et φ un endomorphisme de E de matrice A dans une base donnée. On suppose que le polynôme caractéristique est scindé et soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres (non nécessairement 2 à 2 distinctes).

Théorème 1.1. *Il existe une base telle que P étant la matrice de changement de base la matrice $P^{-1}AP$ estr triangulmère supérieure.*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & & & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \dots & & * \\ & \dots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i & * & * \\ & \dots & & \dots & & \\ 0 & \dots & & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

La démonstration fournit une méthode de triangularisation. On va donc en donner les grandes lignes. Elle est basée sur une méthode de récurrence.

On suppose donc que l'on sait démontrer le théorème à l'ordre $n-1$. Puis on cherche une valeur propre λ et un vecteur propre e de l'endomorphisme associé (ou ce qui est équivalent de la matrice A).

On complète en une base de E : $(e, v_2, \dots, v_n)$. La matrice de φ est dans cette base de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Soit si P est la matrice de passage

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

On applique à la matrice B $(n-1, n-1)$ l'hypothèse de récurrence. C'es-à-dire que l'on peut trouver des vecteurs $w_2, \dots, w_n$ (qui forment une base du sous-espace engendré par $v_2, \dots, v_n$) tels que si on note P' la matrice de passage de $(v_2, \dots, v_n)$ à $(w_2, \dots, w_n)$ la matrice $P'^{-1}BP'$ est triangulère.

Donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P'^{-1} \end{pmatrix} P^{-1}AP \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P'^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix}$$

Soit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P'^{-1} \end{pmatrix} P^{-1}AP \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & LP' \\ 0 & P'^{-1}BP' \end{pmatrix}$$

qui a les propriétés requises.

2 Réduction de Jordan en dimension 2 et 3

On va donner une autre manière de procéder dans des cas particuliers. D'abord :

Définition 2.1. *On appelle réduite de Jordan $J_k(\lambda)$ la matrice (k,k) :*

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & \dots \\ 0 & \lambda & 1 & & \dots \\ \dots & & \dots & \dots & \dots \\ \dots & & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Une matrice A $(2,2)$, ou un endomorphisme φ, dont le polynôme caractéristique est scindé et qui n'est pas diagonalisable a une valeur propre double λ.

Proposition 2.2. *Sous l'hypothèse précédente il existe P telle que $P^{-1}AP = J_2(\lambda)$. On dira qu'on a jordanisé la matrice. Une base de Jordanisation est obtenue de la manière suivante. On choisit un vecteur v telle que $w = (\varphi - \lambda \mathrm{Id})(v)$ soit non nul. Alors (w,v) (dans l'ordre) est une telle base. On notera que w est un vecteur propre.*

On notera que comme on a supposé A non diagonalisable on a éliminé le cas $A = \lambda I_2$ qui a une valeur propre double.
Pour une matrice A $(3,3)$, ou un endomorphisme φ, dont le polynôme caractéristique est scindé et qui n'est pas diagonalisable on a deux situations possibles :

- Une valeur propre triple λ.
- Une valeur propre double λ et une valeur propre simple μ.

Proposition 2.3. *Sous l'hypothèse précédente :*
Dans le premier cas on a toujours $(\varphi - \lambda \mathrm{Id})^3 = 0$, par Caley Hamilton et par hypothèse $\varphi \neq \lambda \mathrm{Id}$.

- *Si* $\dim(E_\lambda) = 1$ *il existe P telle que*

$$P^{-1}AP = J_3(\lambda)$$

  $\dim(E_\lambda) = 1$ *ceci a lieu si et seulement si* $(\varphi - \lambda \mathrm{Id})^2 \neq 0$.

- *Si* $\dim(E_\lambda) = 2$ *il existe P tel que*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_2(\lambda) & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

  ceci a lieu si et seulement si $(\varphi - \lambda \mathrm{Id})^2 = 0$.

  Pour le premier sous cas une base de Jordanisation est obtenue de la manière suivante. On choisit un vecteur w tel que $u = (\varphi - \lambda \mathrm{Id})^2(w)$ soit non nul. Alors (u,v,w), avec $v = (\varphi - \lambda \mathrm{Id})(w)$, (dans l'ordre) est une telle base. On notera que w est un vecteur propre.

  Pour le second sous cas une base de Jordanisation est obtenue de la manière suivante. On choisit un vecteur v tel que $u = (\varphi - \lambda \mathrm{Id})(v)$ soit non nul. Alors u est un vecteur propre. On complète u en une base de E_λ par w, (u,v,w), (dans l'ordre) est la (une) base had oc.

- *Dans le second cas on peut trouver P telle que*

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_2(\lambda) & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

On cherche un vecteur w propre associé à μ. Puis on cherche une base de $\bar{E}_\lambda = \ker(\varphi - \lambda \mathrm{Id})^2$. Par hypothèse ce sous-espace est de dimension 2 et $\dim(E_\lambda) = 1$. On cherche un vecteur v de $\bar{E}_\lambda$ tel que $u = (\varphi - \lambda \mathrm{Id})(v) \neq 0$, (u, v, w) fournit la base cherchée.

Voici un exemple, soit la matrice A :

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2 est valeur propre triple, le sous espace propre est de dimension 1, $(1, 1, -1)$ est vecteur propre.
On cherche un vecteur $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $(A - 2I_3)^2(\vec{w}) \neq 0$. On peut prendre le vecteur $u_3 = (0, 0, 1)$. Auquel cas on pose $u_2 = (A - 2I_3)(u_3) = (2, 2, 0)$ et $u_1 = (A - 2I_3)(u_2) = (-4, 4, 4)$ et (u_1, u_2, u_3) forment une base de jordanisation.
Comme application on peut calculer A^n pour tout entier n, $n \geq 0$. On pose $N = A - 2I_3$. On sait que $N^3 = 0$ (Caley Hamilton ou on fait un calcul direct). On écrit

$$A^n = (2I_3 + N)^n = 2^n I_3 + n2^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} N^2$$

par application de la formule de Newton, en utilisant $N^3 = 0$. Comme N^2 est égale à

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

on laisse au lecteur le soin d'écrire les formules finales.

Voici un autre exemple, soit la matrice A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1 est valeur propre double, 2 est valeur propre simple.
Le vecteur $e_3 = (1, 0, 1)$ est vecteur propre associé à 2. Le vecteur $e_3 = (1, 1, 0)$ est vecteur propre associé à 2, E_1 est de dimension 1.
On cherche une base du sous-espace $\bar{E}_2 = \ker(\varphi - 2\mathrm{Id})^2$. On constate que $e_1 = (0, 0, 1)$ et $e_2 = (1, 0, 1)$ forment une telel base et que $(\varphi - 2\mathrm{Id})(e_2) = e_1$.
On a la base souhaitée.

3 Sous-espaces caractéristiques

Si φ est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n dont le polynôme caractéeistique est scindé :

$$c_\varphi(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_r)^{\alpha_r}$$

avec les λ_i 2 à 2 distincts on définit le sous-espace caractérisqtique associé à λ_i par

$$\bar{E}_{\lambda_i} = \ker(\varphi - \lambda_i \mathrm{Id})^{\alpha_i}$$

Il est clair que

$$E_{\lambda_i} \subset \bar{E}_{\lambda_i}$$

On admettra

$$E = \bar{E}_{\lambda_i} \oplus \bar{E}_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus \bar{E}_{\lambda_r}$$

4 Jordanisation en dimension 4

Cet exemple sera juste abordé, voici un descriptif des situations possibles avec une valeur propre d'ordre 4. D'abord on remarque que $(\varphi - \lambda \mathrm{Id})^4 = 0$.

- La matrice I_4.
- Si $\dim(E_\lambda) = 1$ alors il existe P telle que $P^{-1}AP = J_4(\lambda)$. On trouve une base de Jordanisation en cherchant u tel que $(\varphi - \lambda \mathrm{Id})^3(u) \neq 0$.
- Si $\dim(E_\lambda) = 2$ alors il y a deux sous cas,

  soit $(\varphi - \lambda \mathrm{Id})^2 = 0$. existe P telle que

  $$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_2(\lambda) & 0 \\ 0 & J_2(\lambda) \end{pmatrix}$$

  On trouve une base de Jordanisation en cherchant deux vecteurs indépendants x et v tel que $u = (\varphi - \lambda \mathrm{Id})(x) \neq 0$ et $w = (\varphi - \lambda \mathrm{Id})(v) \neq 0$, (w, v, u, x) est la base cherchée.

  soit $(\varphi - \lambda \mathrm{Id})^2 \neq 0$; alors il existe P telle que

  $$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_3(\lambda) & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

  On trouve une base de Jordanisation en cherchant un vecteur u tel que $w = (\varphi - \lambda \mathrm{Id})^2(u) \neq 0$, on pose $v = (\varphi - \lambda \mathrm{Id})(v)$, on complète la base du sous-espace propre par x, (w, v, u, x) est la base cherchée.
- Enfin si $\dim(E_\lambda) = 3$ alors il existe P telle que

  $$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_2(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

  On se reportera au cas $(3, 3)$.

5 Classification des matrices réelles et complexes $(2,2)$ récapitulatif

Faire le récapitulatif au tableau.

6 Exponentielle de matrices

Cette section est rajoutée ici en complément en fin de l'algèbre linéaire. Etant donnée une matrice carrée A (n,n) on pose $A^k = (a_{i,j}^{(k)}$

Proposition 6.1. *Pour toute matrice A et tout (i,j) la série numérique de terme général (indexé par k) $\frac{a_{i,j}^{(k)}}{k!}$ converge absolument.*

Définition 6.2. *La matrice $e^A = \exp(A)$ est donnée par*

$$\exp(A) = (\sum_{k \geq 0} \frac{a_{i,j}^{(k)}}{k!})$$

- $$\exp(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ \dots & & & \dots \\ \dots & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 & \dots \\ \dots & & & \dots \\ \dots & & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

- Si $AB = BA$ alors
$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$$

- $$(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$$

- $$\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$$

- $$\frac{d}{dt}(\exp(tA)) = A\exp(tA)$$

- Calculer $\exp(N_k)$.

- Montrer que

$$\exp J_k(t\lambda) = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^i}{i!} & \dots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & & & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \\ 0 & \dots & & \dots & & \dots & \dots \\ & \dots & & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & \dots & & & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & & & \dots & \dots & 1 & t \\ 0 & \dots & & \dots & & \dots & 1 \end{pmatrix}$$