Représentations du groupe de Klein

3 Mai 2006

On notera $V_4 = \mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}/2$ pour le groupe de Klein. L'objectif de cet exercice est de classifier les représentations indécomposables du groupe de Klein en caractéristique 2. Dans la suite k désignera une clôture algébrique de $\mathbf{F}_2$.

1. Le seul module simple sur $k[V_4]$ est le module trivial k. Soient x et y deux générateurs de V_4 et a et b pour les éléments $[x] - 1$ et $[y] - 1$ dans l'agèbre du groupe. L'algbre $k[V_4]$ est donc isomorphe $k[a, b]/(a^2, b)$.

2. Le groupe $\mathrm{Ext}^1_{k[V_4]}(k, k)$ est par definition le groupe $H^1(V_4; k) \cong H_1(V_4; k)^* \cong V_4^*$. En terme d'extensions les gnrateurs sont

$$\{0\} \to k \to k[V_4]/(b, ab) \to k \to \{0\}$$

$$\{0\} \to k \to k[V_4]/(a, ab) \to k \to \{0\}$$

avec les actions et les applications videntes.

3. Le Ext-carquois de $k[V_4]$ comporte des laets puisque le $\mathrm{Ext}^1_{k[V_4]}(k, k)$ est non trivial . Son algèbre n'est donc pas de dimension finie

4. Le $\mathrm{Soc}(k[V_4])$ est isomorphe au module trivial k, il est engendr par l'lment $1+a+b+ab$, clairement c'est un idéal bilatère. Soit Λ pour l'algèbre quotient de $k[V_4]$ par son socle, décrire son Ext-carquois qui sera noté Q.

5. Comparer les modules sur Λ et $k[V_4]$, montrer qu'un module sur $k[V_4]$ est canoniquement somme directe d'un module sur Λ et de copies de $k[V_4]$.

6.1. Décrire les réprésentations irréductibles de Q et leurs extensions.

6.2. A un Λ-module M on associe la représentation du carquois donnée par $V_1 = M/\mathrm{Im}(a) + \mathrm{Im}(b)$ et $V_2 = \mathrm{Im}(a) + \mathrm{Im}(b)$. Montrer que ceci est bien défini.

6.3. Inversement à une représentation du carquois on associe un Λ-module $M \cong V_1 \oplus V_2$ avec x agissant comme $1 + a$ et y agissant comme $1 + b$. Montrer que ceci est bien défini.
6.4. Montrer qu'il y a une correspondance bi-univoque entre les représentations de Λ et celles du carquois Q pour lesquelles $V_2 = \mathrm{Im}(a) + \mathrm{Im}(b)$.
Quelle représenation de Q ne satisfait pas la condition précédente?

7. Théorème de Kronecker Soients $a, b : V_1 \to V_2$ une paire d'applications linéaires déterminant une represénattion indécomposable du carquois de Kronecker. Alors on a soit

- Les espaces vectoriels V_1 et V_2 sont de même dimension et le déterminant de $a + \lambda b$ est non nul dans $k[\lambda]$. Une description plus précise est donnée plus bas.
- $\dim_k(V_2) = \dim_k(V_1) + 1$, et une base peut être choisie de telle manière que a et b aient pour matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\dim_k(V_2) = \dim_k(V_1) - 1$, et une base peut être choisie de telle manière que a et b aient pour matrices les transposées des précédentes.

7.1 On se place dans le premier cas et on suppose que $\det(a) \neq 0$. Montrer que l'on peut supposer que a est représenté par la matrice identité et que b est sous forme indécomposable de Jordan (précisez la détermination de b).

7.2 On se place dans le premier cas mais on suppose que $\det(a) = 0$ et $\det(a + \lambda b) \neq 0$. Montrer que l'on peut supposer que $\det(\alpha a + \mu b) \neq 0$ pour certains éléments du corps k se ramener au cas précédent. Décrire le cas obtenu en faisant apparaître une forme indécomposable de Jordan de valeur propre 0.

On suppose maintenant que $\det(a + \lambda b) = 0$ en tant que polynôme ou que les dimensions de V_1 et V_2 sont distinctes.

8. Montrer que l'on peut supposer l'existence d'un vecteur non nul $v(\lambda) = \sum_{i=0,\dots,n} (-1)^i v_i \lambda^i$ tel que

$$(a + \lambda b)v(\lambda) = 0$$

On choisit n minimal, on veut montrer que $\dim_k(V_2) - 1 = \dim_k(V_1) = n$ et que $a + \lambda b$ s'écrit

$$E_n(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & . & . & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & . & 0 \\ . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

dans des bases appropriées.

- Montrer que $av_1, \cdots, av_n$ sont linéairement indépendants : chercher une contradiction avec la minimalité de n en considérant une relation linéaire

$$\alpha_1 av_1 + \alpha_2 av_2 + \ldots = 0$$

puis

$$v'_j = \sum_i \alpha_i v_{i-n+j}$$

- Supposons que la base de V_1 commence par $v_0, \cdots, v_n$, celle de V_2 par $av_1, \cdots, av_n$. Si bien que la matrice de $a + \lambda b$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} E_n(\lambda) & C + \lambda D \\ 0 & A' + \lambda B' \end{pmatrix}$$

avec A', B' $(m, m-1)$, C, D $(n, m-1)$.

- Montrer qu'il suffit de trouver des matrices (n, m) X et (m, m) Y telles que

$$\begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n(\lambda) & C + \lambda D \\ 0 & A' + \lambda B' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n(\lambda) & 0 \\ 0 & A' + \lambda B' \end{pmatrix}$$

Soit résoudre le système

- $XA' + C + Y' = 0$
- $XB' + D + Y" = 0$

avec des notations évidentes pour Y' et $Y"$.

9. Eliminer Y' et $Y"$ pour obtenir une équation en X dont on montrera qu'elle a une solution en utilisant la minimalité de n. Cette équation sera de la forme

$$(x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{2,1}, \ldots, x_{n,m}) \begin{pmatrix} A' & & & 0 \\ -B' & A' & & \\ 0 & -B' & A' & \\ & & & \\ 0 & & & -B' \end{pmatrix} = (\ldots)$$

Montrer que si le systme n'est pas de déterminant non nul on peut en déduire l'existence d'un vecteur ligne $w(\lambda)$ de degré $n-1$ dans $k[\lambda]^{\oplus m}$ annulé par $A' + \lambda B'$. Puis comme $(0, w(\lambda)$ est annul par

$$\begin{pmatrix} E_n(\lambda) & C + \lambda D \\ 0 & A' + \lambda B' \end{pmatrix}$$

en dduire l'existence d'un vecteur collonne de même dgré annulé par $A\lambda b$.

10 . Théorème de Basev, Heller, Reiner Un ensemble complet de représenations indécomposables de du groupe de Klein (k algébriquement clos de car 2) est donné par :

- L'algèbre du groupe.
- en chaque dimension paire $2n$ et chaque classe de conjugaison indécomposable J la représentation

$$x \mapsto \begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$y \mapsto \begin{pmatrix} I & J \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

où J est une forme de Jordan indécomposable.

et

$$x \mapsto \begin{pmatrix} I & J_0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$y \mapsto \begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

où J_0 est une forme de Jordan indécomposable de valeur propre nulle.

- en chaque dimension impaire $2n+1$ il y a deux représentations indécomposables :

$$x \mapsto \begin{pmatrix} I & \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$y \mapsto \begin{pmatrix} I & \begin{pmatrix} 0 & 1 & . & . & . \\ 0 & 0 & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

et

$$x \mapsto \begin{pmatrix} I & \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . \\ 0 & 1 & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & 1 \\ . & . & . & 0 \end{pmatrix} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$y \mapsto \begin{pmatrix} I & \begin{pmatrix} 0 & . & . & . \\ 1 & 0 & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & 0 \\ . & . & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$