Mémoire de master

Les zéros de combinaisons linéaires de fonctions L

Notes sur un article de Bombieri et Hejhal

Martin Scotti

Juin 2020

Sommaire

1 Introduction et notations

L'objet du présent mémoire est d'étudier la répartition des zéros de combinaisons linéaires de fonctions L. Il convient, pour commencer, d'évoquer certaines propriétés simples desdites fonctions.

On sait depuis le XIX^e siècle que l'étude de certaines fonctions analytiques du plan complexe est une approche fructueuse dans bien des problèmes de théorie des nombres (notamment en ce qui concerne la répartition des nombres premiers).

La fonction zêta

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

(cette série converge pour $Re(s) > 1$) est la plus connue d'entre elles. Elle peut s'écrire également sous la forme d'un produit eulérien

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$$

Riemann, dans son article fondateur de 1859, montre que ζ vérifie l'équation fonctionnelle

$$\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\frac{1}{2}s)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1}{2}(1-s)}\Gamma(\frac{1}{2}(1-s))\zeta(1-s) \tag{1.1}$$

Cette équation fonctionnelle, ainsi que d'autres méthodes, permettent de prolonger ζ à tout le plan complexe, où elle est alors une fonction méromorphe possédant un unique pôle en $s = 1$, ainsi que des zéros aux entiers négatifs pairs (que l'on déduit aisément de l'équation fonctionnelle et des pôles de Γ) et dans la région $Re(s) \in [0; 1]$ (nommée "bande critique").

De la répartition des zéros non triviaux de ζ on peut déduire des résultats sur la répartition des nombres premiers. Citons par exemple le théorème des nombres premiers, étabi en 1896 indépendamment par Hadamard et de la Vallée Poussin, qui implique

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$$

et que l'on peut déduire de l'absence de zéro sur $Re(s) = 1$.

Pour sa démonstration du théorème de la progression arithmétique, Dirichlet introduit en 1837 les fonctions L d'un caractère :

$$L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}$$

où $\chi : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ est une fonction multiplicative et périodique. Ces fonctions vérifient un produit eulérien similaire à celui de ζ :

$$L(\chi, s) = \prod_p (1 - \frac{\chi(p)}{p^s})^{-1}$$

Plus que de montrer l'infinité des nombres premiers dans une suite arithmétique, il s'agit de montrer que

$$\sum_{p=a(mod.m)} p^{-1}$$

diverge. De l'identité

$$\frac{1}{\phi(m)}\sum_{\chi}\overline{\chi(a)}\log L(\chi,s)=\sum_{p^r=a(mod.m)}r^{-1}p^{-rs} \tag{1.2}$$

où χ parcourt les caractères modulo m, on déduit (en prenant $a=1$ et en passant au logarithme) qu'il suffit de montrer que

$$L(\chi,1)\neq 0$$

quand $\chi\neq\chi_0$ (χ_0 désigne le caractère principal modulo m). Nous ne donerons pas le reste de la démponstration ici, principalement puisqu'on peut en trouver diverses versions dans la littérature, par exemple [2]. Les fonctions L de Dirichlet vérifient une équation fonctionnelle similaire à celle de ζ, et se prolongent comme elle à l'ensemble du plan complexe.

La fonction de Tchebycheff

$$\psi(x)=\sum_{n\leq x}\Lambda(n)$$

(en notant $\Lambda(n)$ la fonction de von Mangoldt, qui vaut $\log(p)$ si $n=p^r$ et 0 sinon) vérifie $\psi(x)\sim x$ si et seulement si $\pi(x)\sim\frac{x}{\log(x)}$, et vérifie également l'identité

$$\psi(x)=x-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}-\sum_{\rho}\frac{x^\rho}{\rho} \tag{1.3}$$

où ρ parcourt les zéros de ζ, et la somme se se calcule en considérant ensemble les zéros conjugés (cette identité s'établit par un procédé de "décalage de droite d'intégration dans la transformée inverse de Mellin" similaire à notre lemme 1).

Puisque l'équation fonctionnelle de ζ implique que les zéros non triviaux (dans la bande critique) sont disposés sytmétriquement par rapport à $Re(s)=\frac{1}{2}$, on obtiendrait le plus petit terme d'erreur pour ψ si tous les zéros non triviaux étaient sur la droite critique. L'hypothèse de Riemann, selon laquelle tous les zéros seraient bien sur la droite critique, est donc la conjecture la plus forte possible sur la répartition des zéros.

Des équations fonctionnelles des fonctions L de Dirichlet on peut déduire également que leurs zéros non triviaux sont dans la bande critique (et qu'ils sont placés symétriquement par rapport à la droite critique). L'hypothèse de Riemann généralisée affirme que tous ces zéros sont également sur la droite critique. A l'heure actuelle, rien ne permet d'infirmer (ou de confirmer) cette hypothèse.

Notre sujet dans ce mémoire est de considérer des combinaisons linéaires de fonctions L (prises ici dans un sens encore plus général que simplement les fonctions L de Dirichlet), et de nous intéresser à la répartition des zéros de ces combinaisons linéaires dans la bande critique. Pour ce travail nous nous appuyons principalement sur [1], en tentant d'éclairer les passages méritant de plus amples justifications. Les fonctions que nous considérons sont de la forme

$$L(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^s}=e^{i\omega}\prod_p\prod_{k=1}^{d}\frac{1}{1-\alpha_{k,p}p^{-s}} \tag{1.4}$$

avec $\alpha_{k,p} \in \mathbb{C}$, $\omega \in \mathbb{R}$, et d fixé. On pose alors

$$f(s) = \sum_{j=1}^{N} b_j L_j(s)$$

où les b_j sont des réels quelconques. On suppose par ailleurs que les L_j vérifient tous l'équation fonctionnelle

$$G(s)L_j(s) = \bar{G}(1-s)\bar{L_j}(1-s) \tag{1.5}$$

où l'on note

$$G(s) = Q^s \prod_{h=1}^{m} \Gamma(\lambda_h s + \mu_h) \tag{1.6}$$

avec $\lambda_h \geq 0$ et $Re(\mu_h) \geq 0$ et $\bar{f}(s) = \overline{f(\bar{s})}$ (qui est bien entendu holomorphe quand f l'est aussi).

2 Hypothèses

Hypothèse 2.1 *Il existe un $\theta \in [0, \frac{1}{2}[$ tel que pour chacune des fonctions L_j, les $\alpha_{k,p}$ vérifient tous*

$$|\alpha_{k,p}| \leq p^{\theta}$$

Hypothèse 2.2 *On a*

$$\sum_{p \leq X} \sum_{i=1}^{d} |\alpha_{i,p}|^2 = O(X^{1+\epsilon})$$

pour tout $\epsilon > 0$.

Hypothèse 2.3 *Chacune des fonctions L_j se prolonge en une fonction méromorphe d'ordre fini sur le plan complexe tout entier, avec un nombre fini de pôles éventuels, tous de partie réelle 0 ou 1.*

Hypothèse 2.4 *On a*

$$\sum_{p \leq X} \frac{a_j(p)\overline{a_k(p)}}{p} = \delta_{jk} n_j \log(\log(X)) + c_{j,k} + O(\frac{1}{\log(X)})$$

avec n_j des constantes positives et les $c_{j,k}$ des complexes quelconques.

Ces quatres hypothèses ont quelques conséquences élémentaires sur le comportement des fonctions L_j, que nous établirons dans cette section.

Proposition 2.5 *Chacune des fonctions L_J converge absolument dans le demi-plan $Re(s) > 1$.*

Preuve. Le produit eulérien définissant la fonction converge pour $s \in \mathbb{C}$ si

$$\sum_{p} \sum_{k=1}^{d} \alpha_{k,p} p^{-s}$$

converge (ce que l'on peut par exemple voir en prenant le logarithme du produit eulérien). On a alors

$$
\begin{aligned}
\sum_p \sum_{k=1}^d \alpha_{k,p} p^{-s} &\leq \sum_p \sum_{k=1}^d |\alpha_{k,p}| p^{-\sigma} \\
&\leq \sum_p \sum_{k=1}^d |\alpha_{k,p}| p^{-\frac{\sigma}{2}} p^{-\frac{\sigma}{2}} \\
&\leq \sqrt{\sum_p p^{\sigma} \sum_p \sum_{k=1}^d |\alpha_{k,p}|^2 p^{-\sigma}} \qquad (2.1)
\end{aligned}
$$

La première somme converge quand $\sigma = Re(s) > 1$, et il est alors possible d'utiliser l'hypothèse 2.2 pour évaluer l'autre somme par sommation par partie. Notons $S(X) = \sum_{p \leq X} \sum_{k=1}^d |\alpha_{k,p}|^2$

$$
\begin{aligned}
\sum_{p \leq X} \sum_{k=1}^d |\alpha_{k,p}|^2 p^{-\sigma} &= S(X) X^{-\sigma} + \int_2^X S(t) t^{-\sigma-1} dt \\
&\ll X^{1+\epsilon-\sigma} + \sigma \int_2^X t^{\epsilon-\sigma} dt \\
&\ll X^{1+\epsilon-\sigma}\left(1 + \frac{\sigma}{1+\epsilon-\sigma}\right) - \frac{\sigma}{1+\epsilon-\sigma} 2^{1+\epsilon-\sigma}
\end{aligned}
$$

En prenant $\epsilon = \frac{\sigma-1}{2}$, la puissance de X est négative, et la série converge donc, tout comme la fonction. □

Proposition 2.6 *$L_j(s) \neq 0$ dans le demi plan $Re(s) > 1$.*

Preuve. Nous avons établi à la proposition précédente que le produit eulérien de L_j convergeait dans cette région du plan. Si $\prod(1 + a_n)$ converge absolument (i.e. $\prod(1 + |a_n|)$ converge) alors $z = \prod(1+a_n) = 0$ si et seulement si l'un des termes du produit est nul. On a prouvé à la proposition précédente que le produit convergeait absolument (puisque $(1 + |a_n|) \leq e^{|a_n|}$, et on conclut avec les mêmes calculs), et aucun des termes ne peut évidemment être nul d'après l'hypothèse 2.1. □

Proposition 2.7 *Chaque L_j vérifie, pour $Re(s) \in [a, b]$, et une constante C (qui dépend de a et b)*

$$L_j(s) = O((1 + |s|)^C) \qquad (2.2)$$

Preuve. Notons pour commencer que cela équivaut à montrer $L_j(\sigma + it) = O((1 + |t|)^C)$. Nous montrerons que la propriété est vérifiée le long de $Re(s) = a$ puis $Re(s) = b$ (avec a et $-b$ deux grands réels positifs). On utilisera alors le principe de Phragmén-Lindelöf pour conclure.

Soit $\sigma > 1$.

D'après (2.1), L_j est bornée par une constante (que l'on notera K dans la suite) dans la région $Re(s) \geq \sigma > 1$.

Bornons à présent $L_j(\sigma + it)$ le long de $Re(s) = 1 - \sigma$. D'après l'équation fonctionnelle on a

$$\bar{L}_j(1-s) = L_j(s)\frac{G(s)}{\bar{G}(1-s)}$$

et par conséquent le long de $Re(s) = 1 - \sigma$

$$\begin{aligned} |\bar{L}_j(1-\sigma+it)| &= |L_j(\sigma+it)|\frac{|G(\sigma+it)|}{|G(1-\sigma+it)|} \\ &\leq KQ^{2\sigma-1}\prod_{h=1}^{m}\frac{|\Gamma(\mu_h+\lambda_h\sigma+i\lambda_h t)|}{|\Gamma(\lambda_h+\mu_h-\lambda_h\sigma+i\lambda_h t)|} \end{aligned}$$

Le terme $KQ^{2\sigma-1}$ est une constante, nous pouvons donc l'ignorer pour la suite. Si l'on peut montrer qu'il existe un C tel que

$$\frac{|\Gamma(\mu_h+\lambda_h\sigma+i\lambda_h t)|}{|\Gamma(\lambda_h+\mu_h-\lambda_h\sigma+i\lambda_h t)|} = O((1+|t|)^C)$$

alors notre borne suivra en itérant l'argument h fois.

Posons donc $\alpha = \mu_h$ et $\beta = \mu_h + \lambda_h$. On cherche à borner

$$\frac{|\Gamma(\alpha+\lambda\sigma+i\lambda t)|}{|\Gamma(\beta-\lambda\sigma+i\lambda t)|}$$

En utilisant $\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{z}{\Gamma(z+1)}$ n fois, on obtient (quand n est choisi tel que $\frac{|\Gamma(\alpha+\lambda\sigma+i\lambda t)|}{|\Gamma(\beta-\lambda\sigma+n+i\lambda t)|} = 1$)

$$\frac{|\Gamma(\alpha+\lambda\sigma+i\lambda t)|}{|\Gamma(\beta-\lambda\sigma+i\lambda t)|} \leq |P(t)|\frac{|\Gamma(\alpha+\lambda\sigma+i\lambda t)|}{|\Gamma(\beta-\lambda\sigma+n+i\lambda t)|} \leq |P(t)|$$

où P est un polynôme de degré n.

Il faut alors simplement montrer qu'un tel n existe bien. Il suffit pour cela d'ajuster σ de manière à ce que $\lambda(2\sigma - 1)$ soit un entier. On obtient donc $L_j(s) = O((1+|s|)^C)$ sur les frontières de la bande verticale $Re(s) \in [1-\sigma; \sigma]$.

En posant $f(s) = \frac{L_j(s)}{K'(1+|s|)^C}$ (avec K' bien choisi), on a $|f(s)| \leq 1$ pour $Re(s) = \sigma$ et $Re(s) = 1-\sigma$. Puisque L_j est d'ordre fini, d'après le principe de Phragmén-Lindelöf on a également $f(s) \leq 1$ dans l'intérieur de la bande, et par conséquent montre que L_j a une croissance au plus polynomiale dans toute bande verticale. $\square$

D'après l'hypothèse 2.3, $G(s)L_j(s)$ sera holomorphe sur $\mathbb{C}$ excepté pour un nombre fini de pôles placés symétriquement sur l'axe $Re(s) = 0$ et $Re(s) = 1$. Puisque les pôles de la fonction gamma sont aux entiers négatifs, les pôles de G sont situés aux valeurs s vérifiant

$$\lambda_h s + \mu_h = -k$$

ce qui implique $Im(s) = \frac{-Im(\mu_h)}{\lambda_h}$. Par conséquent, en posant

$$\Delta = 2 + \max\{\frac{|Im(\mu_h)|}{\lambda_h}, 1 \leq h \leq m\} \tag{2.3}$$

on voit que $G(s)L_j(s)$ et $L_j(s)$ ont les mêmes zéros dès que

$$|Im(s)| \geq \Delta$$

En écrivant

$$L_j(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_j(n) n^{-s}$$

$$\frac{L_j'}{L_j}(s) = -\sum_{n=2}^{\infty} c_j(n)\Lambda(n) n^{-s} \tag{2.4}$$

$$\log L_j(s) = i\omega_j + \sum_{n=2}^{\infty} c_j(n)\Lambda_1(n) n^{-s} \tag{2.5}$$

et en utilisant l'expression de L_j sous forme de produit eulérien, on obtient

$$c_j(p^r) = \sum_{k=1}^{d} \alpha_{k,p}^r \tag{2.6}$$

ainsi que

$$a(p) = e^{i\omega_j} c_j(p) \tag{2.7}$$

Proposition 2.8

$$\forall \epsilon > 0 \quad a_j(n) = O(n^{\theta+\epsilon})$$

Preuve.

$$\begin{aligned} a_j(p^r) &= \sum_{t_1+\cdots+t_d=r} \prod_{k=1}^{d} \alpha_{k,p}^{t_k} \\ &\leq p^{r\theta} \binom{d+r-1}{d-1} \\ &\leq p^{r\theta} \frac{1}{(d-1)!} \prod_{i=0}^{d-2} (d+r-1-i) \end{aligned}$$

Puisque a_j est arithmétique, $b(n) = a_j(n)n^{-\theta}$ l'est également, et il faut simplement traiter le cas $\theta = 0$. En notant

$$Q(r) = \frac{1}{(d-1)!} \prod_{i=0}^{d-2} (d+r-1-i)$$

on voit qu'il existe $C > 0$ et $k \geq 0$ tels que $\forall r \in \mathbb{N} \quad Q(r) \leq Cr^k$ (on notera que Q est un polynôme qui ne dépend pas de r).

Si $n = p^r$,

$$r = \frac{\log p^r}{\log p} \leq \frac{1}{\log 2} \log p^r$$

donc

$$|b(n)| \leq Ck^d \leq \frac{C}{(\log 2)^d}(\log n)^d$$

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N_0 > 0$ tel que pour $n = p^r \geq N_0$, on ait

$$|b(n)| \leq n^\epsilon$$

Soit maintenant n un entier quelconque. On écrit $n = n_1 n_2$ où n_1 est le produit des facteurs premiers (avec leur puissance) plus grands que N_0, et n_2 est le produit des autres facteurs premiers. On a alors, puisque n_1 et n_2 sont premiers entre eux et que b est une fonction arithmétique

$$|b(n)| \leq n_1^\epsilon |b(n_2)|$$

Enfin, on remarque qu'il n'y a qu'un nombre fini de tels n_2, et que par conséquent on obtient bien $\forall n \in \mathbb{N} \quad |b(n)| \ll n^\epsilon$, ce qui implique bien la borne $a_j(n) = O(n^{\theta+\epsilon})$ voulue. $\square$

Les trois propositions suivantes seront également très utiles par la suite.

Proposition 2.9 *Pour tout j*

$$\sum_{r\geq 3} \sum_p \frac{|c_j(p^r)|}{p^{\frac{r}{2}}} < \infty \tag{2.8}$$

Preuve. On commence par écrire $\theta = \frac{1}{2} - \delta$, avec $\delta > 0$. Nous allons prouver que la double somme est finie en traitant deux cas séparément (selon que $r > \delta^{-1}$ ou que $r \leq \delta^{-1}$).

On a tout d'abord d'après (2.6) et l'hypothèse 2.1

$$|c_j(p^r)| p^{-\frac{r}{2}} \leq dp^{-r\delta}$$

Ce dernier terme étant sommable sur les p premiers dès que $r\delta > 1$, on écrit

$$\sum_p p^{-r\delta} \leq \sum_{n\geq 2} n^{-r\delta} \leq 2\int_2^\infty t^{-r\delta} dt = \frac{2}{r\delta - 1} 2^{-r\delta}$$

Le membre de droite est à son tour sommable sur les $r > \delta^{-1}$. Par conséquent

$$\sum_{r>\delta^{-1}} \sum_p |c_j(p^r)| p^{-\frac{r}{2}}$$

est fini.

Il faut alors évaluer

$$\sum_{r=2}^{\delta^{-1}} \sum_p |c_j(p^r)| p^{-\frac{r}{2}}$$

On remarque que

$$|c_j(p^r)| \leq \sum_{k=1}^d |\alpha_{k,p}|^r \leq p^{(\frac{1}{2}-\delta)(r-2)} \sum_{k=1}^d |\alpha_{k,p}|^2$$

En notant que $r \geq 3$, on a $p^{(\frac{1}{2}-\delta)(r-2)}p^{-\frac{r}{2}} = p^{-1-(r-2)\delta} \leq p^{-1-\delta}$, et on peut alors écrire

$$\sum_p \frac{|c_j(p^r)|}{p^{\frac{r}{2}}} \leq \sum_p p^{-1-\delta} \sum_{k=1}^{d} |\alpha_{k,p}|^2$$

Ce dernier terme converge d'après la même sommation par partie que celle de la proposition 2.5 Puisque l'on répète cette étape seulement un nombre fini de fois (une pour chaque r), (2.8) est bien finie. □

Proposition 2.10 *Pour tout j*

$$\sum_{r\geq 2} \sum_p \frac{|c_j(p^r)|^2}{p^r} \tag{2.9}$$

Preuve. Puisque la somme des carrés d'une suite sommable est également sommable, d'après la proposition précédente il suffit de traiter le cas $r = 2$. On a d'abord, en reprenant les mêmes notations qu'à la démonstration précédente

$$|c_j(p^2)| \leq dp^{1-2\delta}$$

On peut alors évaluer la somme

$$\sum_p |c_j(p^2)|^2 p^{-2} \leq d \sum_p |c_j(p^2)| p^{-1-\delta} \leq d \sum_p \sum_{k=1}^{d} |\alpha_{k,p}|^2 p^{-1-\delta}$$

Cette somme converge donc par la même sommation par partie que celle de la preuve de la Proposition 2.5 puisque $\delta > 0$. □

Proposition 2.11 *Pour tout j*

$$\sum_p \frac{|c_j(p)|^4}{p^2} < \infty \tag{2.10}$$

Preuve. En reprenant encore la même défénition de δ, et en exploitant $2ab \leq a^2 + b^2$ on obtient la majoration

$$|c_j(p)|^2 \leq d \sum_{k=1}^{d} |\alpha_{k,p}|^2 \leq d^2 p^{1-2\delta}$$

On peut alors écrire

$$\sum_p |c_j(p)|^4 p^{-2} \leq d^2 \sum_p |c_j(p)|^2 p^{-1-2\delta} \leq d^3 \sum_p \sum_{k=1}^{d} |\alpha_{k,p}|^2 p^{-1-2\delta}$$

Cette dernière somme converge encore une fois par la même sommation par partie que celle de la preuve de la Proposition 2.5 puisque $2\delta > 0$. □

Il est désormais possible de prouver également la proposition suivante, qui sera également utile par la suite.

Proposition 2.12 *Pour tout j, on a uniformément pour $\lambda \in [0; (\log\log X)^{-1}]$*

$$\sum_{p\leq X} \frac{|a_j(p)|^2}{p} \sin^2(\lambda \log(p)) = \frac{n_j}{2} \log^+(\lambda \log X) + O(1) \tag{2.11}$$

où l'on note $\log(x)^+ = \max(\log(x), 0)$.

Preuve. Posons

$$S(x) = \sum_{p\leq X} \frac{|a_j(p)|^2}{p}$$

On a alors par sommation par partie

$$\begin{aligned}
&\sum_{p\leq X} \frac{|a_j(p)|^2}{p} \sin^2(\lambda \log p) \\
&= S(X)\sin^2(\lambda\log X) - \int_2^X S(t) 2\frac{\lambda}{t}\cos(\lambda\log t)\sin(\lambda\log t)dt \\
&= n_j \log(\log X)\sin^2(\lambda\log X) - \int_2^X n_j\log(\log t) 2\frac{\lambda}{t}\cos(\lambda\log t)\sin(\lambda\log t)dt + O(1) \\
&= n_j \log(\log X)\sin^2(\lambda\log X) - \int_{\log 2}^{\log X} n_j \log(u) 2\lambda\cos(\lambda u)\sin(\lambda u)du + O(1) \\
&= n_j \log(\log X)\sin^2(\lambda\log X) - [n_j\log(u)\sin^2(\lambda u)]_{\log 2}^{\log X} + \int_{\log 2}^{\log X} n_j \frac{\sin^2(\lambda u)}{u}du + O(1) \\
&= \int_{\log 2}^{\log X} n_j \frac{\sin^2(\lambda u)}{u}du + O(1) \\
&= n_j \int_{\lambda\log 2}^{\lambda\log X} \frac{\sin^2(x)}{x}dx + O(1)
\end{aligned}$$

où la constante implicite dans le terme d'erreur ne dépend pas de λ. Il s'agit à présent de borner le terme principal uniformément. Pour cela nous distinguons deux cas, selon la valeur de λ.

Si $\lambda \in [0; (\log(X))^{-1}]$, alors $\lambda\log(X) \leq 1$ et on a alors

$$\int_{\lambda\log 2}^{\lambda\log X} \frac{\sin^2(x)}{x}dx \leq \int_0^1 \frac{x^2}{x}dx = \frac{1}{2} = O(1)$$

D'autre part on vérifie bien que

$$\log^+(\lambda\log(X)) = 0$$

D'autre part, si $\lambda \in [\frac{1}{\log(X)}; (\log(\log(X)))^{-1}]$, alors on écrit

$$\begin{aligned}
n_j \int_{\lambda \log 2}^{\lambda \log X} \frac{\sin^2(x)}{x} dx + O(1) &= n_j \int_{\lambda \log 2}^{1} \frac{\sin^2(x)}{x} dx + n_j \int_{1}^{\lambda \log X} \frac{\sin^2(x)}{x} dx + O(1) \\
&= n_j \int_{1}^{\lambda \log X} \frac{1 - \cos(2x)}{2} \frac{1}{x} dx + O(1) \\
&= \frac{n_j}{2} \int_{1}^{\lambda \log X} \frac{1}{x} dx - \frac{n_j}{2} \int_{1}^{\lambda \log X} \frac{\cos 2x}{x} dx + O(1) \\
&= \frac{n_j}{2} \log(\lambda \log(X)) + O(1) \\
&= \frac{n_j}{2} \log^+(\lambda \log(X)) + O(1)
\end{aligned}$$

On notera que le second terme

$$\int_{1}^{\lambda \log X} \frac{\cos 2x}{x} dx$$

est fini (et donc $O(1)$) uniformément selon λ par intégration par parties.

$\square$

Un des intérêts de l'hypothèse 2.4 est que les L_j sont linéairement indépendants, ce qui sera utile dans la suite où on pourra traiter les $L_j(\frac{1}{2} + it)$ comme des variables aléatoires indépendantes.

Proposition 2.13 *Les fonctions L_j sont linéairement indépendantes.*

Preuve. Supposons

$$\sum_{j=1}^{N} u_j L_j(s) = 0$$

avec les u_j des complexes quelconques. Cette somme est encore une série de Dirichlet, et elle est nulle seulement si tous les $\sum_{j=1}^{N} u_j a_j(n)$ sont nuls égalements. Alors

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{p \leq X} \frac{1}{p} |\sum_{j=1}^{N} u_j a_j(p)|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{N} |u_j|^2 \sum_{p \leq X} \frac{|a_j(p)|^2}{p} + \sum_{i \neq j} u_i \overline{u_j} \sum_{p \leq X} \frac{a_i(p)\overline{a_j(p)}}{p} \\
&= \sum_{j=1}^{N} |u_j|^2 n_j \log(\log(X)) + O(1)
\end{aligned}$$

Par conséquent, chacun des u_j est également nul (on rappelle que les n_j sont des réels positifs), ce qui entraine l'indépendance linéaire des L_j. $\square$

Il conviendra également de faire l'hypothèse suivante, même si le reste de la preuve l'utilise très peu.

Hypothèse 2.14 (Hypothèse de Riemann généralisée) *Toutes les fonctions L_j ont leurs zéros non triviaux sur la droite $Re(s) = \frac{1}{2}$.*

Avant d'aborder le coeur de l'article, il reste encore à évaluer le nombre de zéros de

$$f(s) = \sum_{n_0}^{\infty} a_n n^{-s} = a_{n_0} n_0^{-s} g(s)$$

Pour cela nous allons appliquer le principe de l'argument à $f(s)G(s)$ (qui a, rappelons-le, les mêmes zéros que $f(s)$ pour $Im(s) > \Delta$). Il faut donc commencer par définir correctement $\arg f(s)$ et $\arg G(s)$. En choisissant $c \in \mathbb{R}$ tel que $|g(s) - 1| \leq \frac{1}{2}$ pour $Re(s) \geq c$, et en prolongeant $\arg f(s)$ par continuité le long du segment $[c + it; \sigma + it]$ (avec bien sûr $t \geq \Delta$), puisque $\arg g(s)$ et $\arg a_{n_0}$ sont bien définis, on définit bien $\arg f(s)$ de manière unique. Quand t est la partie imaginaire d'un zéro, il suffit pour notre utilisation du principe de l'argument de prolonger $\arg f(s)$ par continuité à droite selon la variable t.

On pose alors

$$\theta(T) = \frac{1}{\pi} \arg G(\frac{1}{2} + iT) = \frac{T}{\pi} \log Q + \sum_{h=1}^{m} \frac{1}{\pi} \arg \Gamma(\lambda_h(\frac{1}{2} + iT) + \mu_h) \tag{2.12}$$

$$S(T; f) = \frac{1}{\pi} \arg f(\frac{1}{2} + iT) \tag{2.13}$$

et l'on a la proposition suivante.

Proposition 2.15 *Le nombre de zéros (avec multiplicités) de f de partie imaginaire comprise entre Δ et T est*

$$N(T; f) = \theta(T) - \theta(\Delta) + S(T; f) - S(\Delta; f) \tag{2.14}$$

Preuve. Ce nombre est égal à

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{\Lambda'(s)}{\Lambda(s)} ds$$

où l'on note $\Lambda(s) = G(s)f(s) = \bar{G}(1-s)\bar{f}(1-s)$, et C le contour du rectangle formé par les points $1 - c + i\Delta$, $c + i\Delta$, $c + iT$, et $1 - c + iT$, parcouru dans le sens positif. On notera que d'après la définition de g et de c, tous les zéros de f sont de partie réelle inférieure à c (et donc, grâce à l'équation fonctionnelle, de partie réelle comprise entre $1 - c$ et c).

Nous commencerons par montrer une propriété utile de la fonction Λ, puis nous évaluerons l'intégrale curviligne directement.

Montrons, pour commencer, que la fonction $h(s) = \frac{\Lambda'(s)}{\Lambda(s)}$ vérifie $h(s) = -\overline{h(\overline{1-s})}$. Cette égalité forcera la fonction $\frac{\Lambda'(s)}{\Lambda(s)}$ à avoir des propriétés de symétrie selon l'axe $Re(s) = \frac{1}{2}$ qui seront utiles pour le calcul de l'intégrale curviligne.

En notant $k(s) = \bar{f}(s)\bar{G}(s)$, on peut écrire l'équation fonctionnelle sous la forme

$$\Lambda(s) = k(1 - s)$$

En calculant la dérivée logarithmique, on obtient

$$\frac{\Lambda'(s)}{\Lambda(s)} = -\frac{k'(1-s)}{k(1-s)}$$

et puisque

$$k'(1-s) = \overline{\Lambda'(\overline{1-s})}$$

(ce qui se vérifie aisément en développant k et Λ en séries entières), on obtient bien

$$\begin{aligned} h(s) &= \frac{\Lambda'(s)}{\Lambda(s)} \\ &= -\frac{k'(1-s)}{k(1-s)} \\ &= -\frac{k'(1-s)}{\overline{\Lambda(\overline{1-s})}} \\ &= -\frac{\overline{\Lambda'(\overline{1-s})}}{\overline{\Lambda(\overline{1-s})}} \\ &= -\overline{(\frac{\Lambda'}{\Lambda})(\overline{1-s})} \\ &= -\overline{h(\overline{1-s})} \end{aligned}$$

Il s'agit désormais de calculer l'intégrale curviligne par segmants individuels, en gardant évidemment la définition de h pour plus de simplicité. On notera également $h(s) = a(s) + ib(s)$ avec a et b des fonctions réelles.

$$\begin{aligned} \int_{1-c}^{\frac{1}{2}} h(i\Delta + t)dt &= -\int_{1-c}^{\frac{1}{2}} a(i\Delta + 1 - t)dt + i\int_{1-c}^{\frac{1}{2}} b(i\Delta + 1 - t)dt \\ &= -\int_{\frac{1}{2}}^{c} a(i\Delta + t)dt + i\int_{\frac{1}{2}}^{c} b(i\Delta + t)dt \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\int_{1-c}^{c} h(i\Delta + t)dt = 2i\int_{\frac{1}{2}}^{c} b(i\Delta + t)dt$$

On obtient évidemment le même résultat sur le segment de hauteur T (à un changement de signe près lié à la direction d'intégration les calculs sont les mêmes).

$$\int_{c}^{1-c} h(iT + t)dt = 2i\int_{c}^{\frac{1}{2}} b(iT + t)dt$$

Sur le segmant vertical, on obtient d'une part (le long du segment $[c+i\Delta; c+iT]$)

$$\begin{aligned}
\int_\Delta^T h(c+it)dt &= \int_\Delta^T a(c+it)dt + i\int_\Delta^T b(c+it)dt \\
&= \int_\Delta^T -\overline{h(1-c+it)}dt \\
&= -\int_\Delta^T a(1-c+it)dt + i\int_\Delta^T b(1-c+it)dt
\end{aligned}$$

et d'autre part (le long du segment $[1-c+iT; 1-c+i\Delta]$, que l'on parcourt vers l'axe des réels pour respecter le chemin de l'intégrale curviligne)

$$\begin{aligned}
\int_T^\Delta h(1-c+it)(-dt) &= \int_\Delta^T h(1-c+it)dt \\
&= \int_\Delta^T a(1-c+it)dt + i\int_\Delta^T b(1-c+it)dt
\end{aligned}$$

et par conséquent la somme de ces deux intégrales fait exactement

$$\int_\Delta^T h(c+it)dt + \int_T^\Delta h(1-c+it)(-dt) = 2i\int_\Delta^T b(1-c+it)dt$$

En faisant la somme de toutes ces intégrales on obtient

$$\frac{1}{2i\pi}\oint_C \frac{\Lambda'(s)}{\Lambda(s)}ds = \frac{1}{\pi}\int_{C^+} Im(\frac{\Lambda'(s)}{\Lambda(s)})ds$$

où C^+ désigne la partie de C à droite de $Re(s) = \frac{1}{2}$. Puisque $\log\Lambda(s)$ est la primitive de $\frac{\Lambda'(s)}{\Lambda(s)}$, et puisque $\arg\Lambda(s)$ est la partie imaginaire de $\log\Lambda(s)$ (et par conséquent également la "primitive" de $Im(\frac{\Lambda'(s)}{\Lambda(s)})$, du moins le long des segments considérés ici), il s'ensuit que

$$\frac{1}{2i\pi}\oint_C \frac{\Lambda'(s)}{\Lambda(s)}ds = \frac{1}{\pi}(\arg\Lambda(\frac{1}{2}+iT) - \arg\Lambda(\frac{1}{2}+i\Delta))$$

ce qui (en développant Λ) est bien le résultat attendu. □

En faisant un développement asymptotique de θ et de S, on peut évaluer combien de zéros il y a de partie imaginaire comprise entre Δ et T.

Proposition 2.16

$$\theta(T) = \frac{T}{\pi}\log(Q) + \frac{1}{\pi}\sum_{h=1}^{m}\lambda_h T\log(T) + T\lambda_h(\log(\lambda_h)-1) + Im(\mu_h)\log(T) + O(1)$$

Preuve. Le terme $T\log(Q)$ vient de (1.6). D'après la formule de Stirling pour $\log\Gamma$, on peut écrire

$$\log\Gamma(z) = z\log(z) - z - \frac{1}{2}\log(z) + O(1)$$

En posant $\alpha = \frac{\gamma}{2} + Re(\mu_h)$ et $\beta = i\lambda_h T$, on obtient

$$\begin{aligned}
\arg\Gamma(\alpha + i\beta) &= Im(\log\Gamma(\alpha + i\beta)) \\
&= \beta\log(\beta) - \beta + O(1) \\
&= (\lambda_h T + Im(\mu_h))\log(\lambda_h T + Im(\mu_h)) - (\lambda_h T + Im(\mu_h)) + O(1) \\
&= \lambda_h T\log(T) + T\lambda_h(\log(\lambda_h) - 1) + Im(\mu_h)\log(T) + O(1)
\end{aligned}$$

□

En notant

$$\Lambda = \sum_{h=1}^{m} \lambda_h \tag{2.15}$$

et

$$C = \sum_{h=1}^{m} \lambda_h(\log(\lambda_h) - 1)$$

on peut encore écrire

$$\theta(T) = \frac{\Lambda}{\pi} T\log(T) + CT + O(\log(T)) \tag{2.16}$$

L'estimation asymptotique de S est plus aisée. Puisque dans (2.14), $\arg(a_{n_0})$ s'annule, il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}
\arg f(\frac{1}{2} + iT) &= Im(-s\log n_0) + Im(\log(g(\frac{1}{2} + iT))) \\
&= -\log(n_0)T + O(\log(T))
\end{aligned}$$

la borne pour $\log(g)$ venant du fait que f a une croissance au plus polynomiale dans toute bande verticale, et par conséquent g aussi. Il suffit alors d'écrire $g(\frac{1}{2} + iT) \leq K(1 + |T|)^D$ pour obtenir la majoration voulue. On a alors

$$S(T; f) = \frac{-\log(n_0)}{\pi} T + O(\log(T)) \tag{2.17}$$

En combinant ces estimations on obtient

$$N(T; f) = \frac{\Lambda}{\pi} T\log(T) + C(f)T + O(\log(T)) \tag{2.18}$$

où $C(f) = -\log(n_0) + C$

On obtient également

$$N(T + 1; f) - N(T; f) = O(\log(T)) \tag{2.19}$$

Dans le cas particulier de $S(T, L_j)$ on obtient alors (puisque $a_1 \neq 0$)

$$S_j(T) = S(T; L_j) = O(\log(T)) \tag{2.20}$$

Proposition 2.17 *Tous les $L = L_j$ vérifient, dans toute bande verticale $Re(s) \in [a; b]$ (en notant η les pôles de L)*

$$\frac{L'}{L}(s) = \sum_{|\rho - s| < 1} \frac{1}{s-\rho} - \sum_{\eta} \frac{1}{s-\eta} + O(\log(|s|+2)) \tag{2.21}$$

Preuve. Nous commençons par montrer que

$$\xi(s) = \prod_{\eta} (s-\eta) G(s) L(s)$$

est d'ordre 1 dans notre bande verticale.

On a

$$|\prod_{\eta} (s-\eta) Q^s| \leq e^{C|s|}$$

avec $C > 0$ une constante.

On rappelle les formules de Stirling (valables uniformément pour $|\arg s| \leq \pi - \epsilon$ à ϵ fixé)

$$\log \Gamma(s) = (s - \frac{1}{2}) \log(s) - s + \frac{\log(2\pi)}{2} + O(|s|^{-1}) \tag{2.22}$$

et

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) = \log(s) + O(|s|^{-1}) \tag{2.23}$$

D'après (2.23) on a pour tout indice $0 \leq h \leq m$

$$|\Gamma(\lambda_h s + \mu_h)| \leq e^{C'|s||\log(s)|}$$

avec $C' > 0$ une constante.

Enfin, puisqu'on se place dans une bande verticale $Re(s) \in [a; b]$ d'après (2.2) on obtient

$$|L(s)| \leq e^{C''|s|}$$

avec $C'' > 0$ une constante.

En combinant ces inégalités, on montre bien que ξ est d'ordre 1. Par conséquent, d'après le théorème de factorisation de Weierstrass, on peut écrire

$$\xi(s) = e^{A+Bs} \prod_{\rho} (1 - \frac{s}{\rho}) e^{\frac{s}{\rho}}$$

où A et B sont des constantes (dont la valeur exacte est sans importance ici).

En prenant la dérivée logarithmique de cette expression on obtient

$$\frac{\xi'}{\xi}(s) = B + \sum_{\rho} (\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho})$$

alors qu'avec la définition de ξ on obtient

$$\frac{\xi'}{\xi}(s) = \frac{L'}{L}(s) + \log(Q) + \sum_\eta \frac{1}{s-\eta} + \sum_{h=1}^m \frac{\Gamma'}{\Gamma}(\lambda_h s + \mu_h)$$

Par conséquent on a

$$\frac{L'}{L}(s) = B - \log(Q) - \sum_\eta \frac{1}{s-\eta} - \sum_{h=1}^m \frac{\Gamma'}{\Gamma}(\lambda_h s + \mu_h) + \sum_\rho (\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho})$$

En écrivant $s = \sigma + it$, on veut pouvoir retrancher $\frac{L'}{L}(c+it)$ à $\frac{L'}{L}(s)$ avec c assez grand pour que $\frac{L'}{L}(c+it) = O(1)$ uniformément selon t. Montrons donc qu'un tel c existe bien. D'après la preuve de la proposition 2.5, $\frac{1}{L(c+it)} = O(1)$ pour c assez grand (ou, de manière équivalente, $\lim_{\sigma\to\infty} L(\sigma+it) = 1$) uniformément selon t. Enfin, si $\theta + \epsilon - c < 0$ d'après la proposition 2.8 on a

$$\begin{aligned}
|L'(c+it)| &= |\sum_{n=1}^\infty a(n)\Lambda(n)n^{-c-it}| \\
&\leq \sum_{n=1}^\infty |a(n)| \log(n) |n^{-c}| \\
&\ll \sum_{n=1}^\infty \log(n) |n^{\theta+\epsilon-c}| \\
&= O(1)
\end{aligned}$$

Nos conditions sont donc vérifiées, et on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{L'}{L}(s) - \frac{L'}{L}(c+it) &= \sum_\eta \frac{1}{c+it-\eta} - \frac{1}{s-\eta} + \sum_{h=1}^m \frac{\Gamma'}{\Gamma}(\lambda_h(c+it)+\mu_h) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(\lambda_h s + \mu_h) \sum_\rho (\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{c+it-\rho}) \\
\frac{L'}{L}(s) &= -\sum_\eta \frac{1}{s-\eta} - \sum_{h=1}^m \frac{\Gamma'}{\Gamma}(\lambda_h s + \mu_h) + \sum_\rho (\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{c+it-\rho}) + O(1)
\end{aligned}$$

D'après (2.22) pour tout h on a $\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\lambda_h s + \mu_h) = O(\log(|s|+2))$.
D'après (2.19) $\sum_{|\rho-s|<1} \frac{1}{c+it-\rho} = O(\log(|s|+2))$.

Il suffit donc juste de montrer que

$$\sum_{|\rho-s|\geq 1} (\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{c+it-\rho}) = O(\log(|s|+2))$$

Puisque σ est borné (par hypothèse) on a (en écrivant $\rho = \beta + i\gamma$)

$$\Big|\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{c+it-\rho}\Big| = \Big|\frac{c-\sigma}{(s-\rho)(c+it-\rho)}\Big| \ll |t-\gamma|^{-2}$$

D'après (2.19) il y a au plus $O(\log(|s|+2))$ cas où $|t-\gamma|<1$ et $|\rho-s|\geq 1$. Par conséquent, modulo le terme d'erreur il s'agit de montrer simplement

$$\sum_{|\gamma-t|\geq 1}|t-\gamma|^{-2}=O(\log(|s|+2))=O(\log(|t|+2)) \tag{2.24}$$

Examinons d'abord le cas $1\leq|\gamma-t|\leq 2t$. Dans la région $|\gamma-t|\in[n;n+1]$ il y a au plus $O(\log(|t|+2))$ zéros d'après (2.19), et chaque terme de la somme vaut au plus $\frac{1}{n^2}$. Par conséquent

$$\sum_{1\leq|\gamma-t|\leq 2t}|\gamma-t|^{-2}\leq\zeta(2)O(\log(|t|+2))=O(\log(|t|+2))$$

D'autre part, si $|\gamma-t|\geq 2t$, on a $|\gamma|\geq|t|$ et

$$\begin{aligned}\sum_{|\gamma-t|\geq 2t}|\gamma-t|^{-2} &\ll \sum_{|\gamma|\geq|t|}|\gamma|^{-2}\\ &\ll\sum_{n\geq|t|}\frac{\log(n)}{n^2}\end{aligned}$$

qui converge, ce qui achève notre preuve. □

La dernière hypothèse force les zéros des fonctions L_j à être bien espacés. Cette hypothèse est en fait cruciale, ce que l'on peut voir par exemple en considérant le cas où on mettrait les L_j, G et les b_j au carré. Alors tout ce qui précède reste identique, mis à part Λ qui est multiplié par 4 et les n_j par 2. Mais alors pour que les zéros de f soient presque tous sur la droite $Re(s)=\frac{1}{2}$, ils doivent être communs à tous les L_j (hypothèse hautement improbable et en pratique inutilisable) puisque

$$\exp(2i\arg G(\frac{1}{2}+it))L_j(\frac{1}{2}+it)^2\geq 0$$

Hypothèse 2.18 (Hypothèse H_0) *Pour tout L_j, on suppose*

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\{\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{\#(T\leq\gamma\leq 2T:\gamma'-\gamma\leq\frac{\epsilon}{\log(T)})}{T\log(T)}\}=0$$

où γ et γ' sont deux zéros distincts de L_j (notons que γ et γ' peuvent être égaux si le zéro est double).

3 Théorèmes principaux

On définit $N(T_1,T_2,f)=N(T_2,f)-N(T_1,f)$ le nombre de zéros de f de partie imaginaire comprise entre T_1 et T_2.

Similairement, on note $N_0(T_1,T_2)$, $N_{0k}(T_1,T_2)$ et $N_D(T_1,T_2)$ respectivement le nombre de zéros sur la droite critique, le nombre de zéros d'ordre k sur la droite critique, et le nombre de zéros sur la droite critique de multiplicité impaire, entre les hauteurs T_1 et T_2.

Pour la suite, on définit également $N(\alpha,T_1,T_2,f)$ le nombre de zéros ρ de f vérifiant $Re(\rho)\geq\alpha$ et $T_1\leq Im(\rho)\leq T_2$.

Il est à présent possible d'énoncer les théorèmes principaux.

Théorème 3.1 (Théorème A) *Supposons que tous les L_j vérifient les hypothèses 2.1 à 2.4, ainsi que l'hypothèse de Riemann généralisée, et l'hypothèse H_0. Alors*

$$N_{01}(T,f) \sim N(T,f) \tag{3.1}$$

Cela implique que presque tous les zéros de f sont simples, et sur la droite critique. On a alors également le même équivalent que (2.18)

$$N_{01} \sim \frac{\Lambda}{\pi} T \log(T) \tag{3.2}$$

On peut également simplifier le théorème 1 grâce à la proposition suivante.

Proposition 3.2 *Le théorème A est équivalent à l'assertion*

$$N_D(T,f) \sim \frac{\Lambda}{\pi} T \log(T) \tag{3.3}$$

Preuve. On commence par voir qu'on a trivialement

$$N_D(T,f) \geq N_{01}(T,f)$$

Par conséquent on a d'une part

$$N(T,f) - N_D(T,f) \leq N(T,f) - N_{01}(T,f)$$

D'autre part

$$\begin{aligned} 3N_D(T,f) - 2N_{01}(T,f) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) N_{0,2k-1}(T,f) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} k N_{0k}(T,f) \\ &\leq N_0(T,f) \\ &\leq N(T,f) = (3-2)N(T,f) \end{aligned}$$

ce qui implique

$$2(N(T,f) - N_{01}(T,f)) \leq 3(N(T,f) - N_D(T,f))$$

et finalement on a d'autre part

$$\frac{2}{3}(N(T,f) - N_{01}(T,f)) \leq N(T,f) - N_D(T,f)$$

Ces deux inégalités impliquent que $N(T,f) - N_{01}(T,f) = o(N(T,f))$ si et seulement si $N(T,f) - N_D(T,f) = o(N(T,f))$, ce qui achève la preuve. $\square$

Le deuxième théorème est le résultat utile suivant dû à Selberg.

Théorème 3.3 (Théorème B) *Supposons que $L = L_j$ vérifie les conditions 2.1 à 2.4, ainsi que l'hypothèse de Riemann généralisée ou bien la condition plus faible*

$$N(\sigma, T, L) = O(T^{1-a(\sigma-\frac{1}{2})}) \tag{3.4}$$

uniformément pour $\sigma \geq \frac{1}{2}$, avec $a > 0$.

Alors, en notant $n = n_j$, quand $t \to \infty$, les fonctions

$$\frac{\log |L(\frac{1}{2}+it)|}{\sqrt{\pi n \log(\log(t))}}$$

et

$$\frac{\arg L(\frac{1}{2}+it)}{\sqrt{\pi n \log(\log(t))}}$$

tendent vers des variables aléatoires gaussiennes de fonction de densité

$$e^{-\pi u^2}$$

4 Preuve du théorème B

La démonstration du théorème B se fera en deux étapes. Il s'agira d'abord de trouver une bonne approximation L^1 des fonctions L_j par des polynomes de Dirichlet, puis de démontrer le théorème avec ces approximations.

Avant de commencer par le premier lemme, pour plus de clarté dans sa démonstration, nous montrerons plusieurs résultats intermédiaires sous forme de propositions.

Proposition 4.1 *Soit $s \in \mathbb{C}$, et $m \in \mathbb{N}$ tels que $m - \frac{1}{2} \leq |s| \leq m + \frac{1}{2}$. Alors pour tout réel $l \geq 0$ on a*

$$|s + l| \geq |l - m| - \frac{1}{2}$$

Preuve. Remarquons que si s est réel, cette inégalité est simple à établir. Si $s \geq 0$, c'est une trivialité. Sinon, on pose $s = -m + r$ avec $|r| \leq \frac{1}{2}$ et l'inégalité devient

$$|(l - m) + r| + \frac{1}{2} \geq |l - m|$$

ce qui découle simplement de $|r| \leq \frac{1}{2}$ et de la 1-lipschitziannité de la valeur absolue.

En notant donc $s = \sigma + it$ avec $t \neq 0$ on a

$$|s + l| = \sqrt{(\sigma + l)^2 + t^2} = \sqrt{\sigma^2 + t^2 + 2\sigma l + l^2} = \sqrt{b + al + l^2}$$

avec $a = 2\sigma$ et $b = \sigma^2 + t^2$. Notons que grâce à la condition sur t la racine carée est toujours strictement positive.

Supposons que $l \geq m$. Posons

$$f(x) = \sqrt{x^2 + ax + b} + \frac{1}{2} + m - x$$

L'inégalité est vraie si et seulement si $\forall x \geq m \quad f(x) \geq 0$. Clairement, $f(m)$ et $\lim_{x\to\infty} f(x)$ sont positifs, donc il suffit de voir que f est monotone.

$$f'(x) = -1 + \frac{2x+a}{2\sqrt{x^2+ax+b}}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
2\sqrt{x^2+ax+b} &= 2x+a \\
4(x^2+ax+b) &= 4x^2+4ax+a^2 \\
4b &= a^2 \\
4(\sigma^2+t^2) &= 4\sigma^2
\end{aligned}$$

ce qui est impossible puisque $t \neq 0$. f est donc monotone, et positive aux extrémités de son intervalle de définition, elle est donc positive sur tout l'intervalle.

D'autre part, si $l \leq m$, on pose

$$g(x) = \sqrt{x^2+ax+b} + \frac{1}{2} + x - m$$

et il faut alors vérifier que g est positive sur $[0; m]$. Puisque l'inégalité est vraie en 0 et en m, il suffit ici encore vérifier que g est monotone. Les calculs sont les mêmes que pour f (à un signe près, qui sera annulé lors du passage au carré). $\square$

Proposition 4.2 *Soit $m < k$ deux entiers, et $\sigma \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\int_1^e x^{k-m-1} \int_1^x u^{\sigma+m-1} du\, dx \leq e^{\max(\sigma,0)+k}$$

Preuve. Cela se prouve en considérant séparément 4 cas, selon le signe de σ et celui de $m-1$.

Commençons par $\sigma \geq 0$ et $m-1 \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_1^e x^{k-m-1} \int_1^x u^{\sigma+m-1} du\, dx &\leq \int_1^e x^{k-m-1} x^{\sigma+m-1} x dx \\
&= \int_1^e x^{k+\sigma-1} dx \\
&= \frac{1}{k+\sigma}(e^{k+\sigma}-1) \\
&\leq \frac{1}{k+\sigma} e^k e^\sigma \\
&\leq e^k e^\sigma = e^{\max(\sigma,0)+k}
\end{aligned}$$

Poursuivons par le cas $\sigma \leq 0$ et $m-1 \geq 0$.

$$\begin{aligned}
\int_1^e x^{k-m-1} \int_1^x u^{\sigma+m-1} du\, dx &\leq \int_1^e x^{k-m-1} \int_1^x u^{m-1} du\, dx \\
&\leq \int_1^e x^{k-m-1} x^{m-1} x dx \\
&= \int_1^e x^{k-1} dx \\
&= \frac{1}{k}(e^k - 1) \\
&\leq \frac{1}{k} e^k \\
&\leq e^k = e^{\max(\sigma,0)+k}
\end{aligned}$$

Il faut également traiter le cas $m = 0$ et $\sigma \leq 0$.

$$\begin{aligned}
\int_1^e x^{k-1} \int_1^x u^{\sigma-1} du\, dx &\leq \int_1^e x^{k-1} \int_1^x u^{-1} du\, dx \\
&= \int_1^e x^{k-1} \log(x) dx \\
&\leq \int_1^e x^{k-1} dx \\
&= \frac{1}{k}(e^k - 1) \\
&\leq \frac{1}{k} e^k \\
&\leq e^k = e^{\max(\sigma,0)+k}
\end{aligned}$$

Il reste le cas $m = 0$ et $\sigma \geq 0$. Ici, on procède en deux temps. D'abord on montre

$$\forall x \in [1; e] \quad \int_1^x u^{\sigma-1} du \leq e^\sigma$$

Pour cela il suffit de montrer

$$\begin{aligned}
\int_1^e u^{\sigma-1} du &\leq e^\sigma \\
\frac{1}{\sigma}(e^\sigma - 1) &\leq e^\sigma \\
e^\sigma - 1 &\leq \sigma e^\sigma \\
(1-\sigma) e^\sigma &\leq 1 \\
1 - \sigma &\leq e^{-\sigma}
\end{aligned}$$

ce qui est vrai par convexité de la fonction exponentielle. On a alors

$$\begin{aligned}\int_1^e x^{k-1}\int_1^x u^{\sigma-1}du\,dx &\leq \int_1^e x^{k-1}e^{\sigma}dx\\ &\leq e^{\sigma}\frac{e^k-1}{k}\\ &\leq e^{\sigma}e^k\\ &\leq e^{\max(\sigma,0)+k}\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de notre proposition. □

Lemme 4.3 (Lemme 1) *Soit $u(x)$ une fonction réelle C^∞ à support compact contenu dans $[1,e]$ telle que $\int_0^\infty u(t)dt = 1$, et soit $\tilde{u}(s)$ sa transformée de Mellin.*

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$|\tilde{u}^{(k)}(s)| \leq \tilde{u}(\sigma)$$

et

$$|\tilde{u}(s)| \leq \max_x |u^{(k)}(x)| e^{\max(\sigma,0)} e^{4k}(1+|s|)^{-k} \tag{4.1}$$

D'autre part, en notant

$$v(x) = \int_x^\infty u(t)dt$$

et $L = L_j$, et pour $\sigma \geq 0$, $|t| \geq \Delta$, $X \in [2, t^2]$, $K \in \mathbb{N}^*$ et s ni un zéro ni un pôle de L on a

$$-\frac{L'}{L}(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c(n)\Lambda(n)}{n^s}v(e^{\frac{\log n}{\log X}}) + \sum_{\rho}\frac{1}{\rho - s}\tilde{u}(1+(\rho-s)\log X) + O((|s|+1)^{-K}) \tag{4.2}$$

où ρ parcourt les zéros de L sur la bande critique.

Preuve. Par définition on a

$$\tilde{u}(s) = \int_0^\infty u(x)x^{s-1}dx$$

En dérivant k fois selon s on obtient donc

$$\begin{aligned}|\tilde{u}^{(k)}(s)| &= |\int_0^\infty u(x)\log(x)^k x^{s-1}dx|\\ &= |\int_1^e u(x)\log(x)^k x^{s-1}dx|\\ &\leq \int_1^e |u(x)\log(x)^k x^{s-1}|dx\\ &\leq \int_1^e u(x)x^{\sigma-1}dx = \tilde{u}(\sigma)\end{aligned}$$

Pour la seconde inégalité, on commence par remarquer qu si $k=0$, alors elle découle simplement de l'inégalité triangulaire :

$$|\tilde{u}(s)| \leq \max_x(u(x))\int_1^e x^{\sigma-1}dx$$

Il suffit alors de montrer
$$\int_1^e x^{\sigma-1}dx \leq e^{\max(\sigma,0)}$$
Si $\sigma \neq 0$, puisque $e^\sigma \leq e^{\max(\sigma,0)}$ et $\int_1^e x^{\sigma-1}dx = \frac{e^\sigma-1}{\sigma}$ il suffit de montrer
$$\frac{e^\sigma - 1}{\sigma} \leq e^\sigma$$
ce qui (après quelques manipulations élémentaires) est équivalent à montrer que
$$e^{-\sigma} \geq 1 - \sigma$$
ce qui découle de la convexité de la fonction exponentielle.

Si $\sigma = 0$, on a simplement
$$\int_1^e x^{\sigma-1}dx = \int_1^e x^{-1}dx = \log(e) - \log(1) = 1 = e^0$$

Dans la suite de la preuve, on pourra donc supposer $k \geq 1$.

Puisque $u(1) = u(e) = 0$ car $u(x)$ est de classe C^∞ et nulle en dehors de $[1; e]$, après k intégration par parties on obtient (quand cette quantité est bien définie, i.e. $s + l \neq 0$ pour $0 \leq l \leq k-1$ un entier)
$$\tilde{u}^{(k)}(s) = \frac{(-1)^k}{s(s+1)\cdots(s+k-1)} \int_1^e u^{(k)}(x)x^{s+k-1}dx$$
Par intégrations par parties successives, pour tout entier $0 \leq m \leq k-1$, on a également
$$\int_1^e u^{(k)}(x)x^{k-m-1}dx = 0$$
puisque $u^{(m)}(1) = u^{(m)}(e) = 0$. On a ainsi pour $0 \leq m \leq k-1$
$$\tilde{u}^{(k)}(s) = \frac{(-1)^k}{s(s+1)\cdots(s+k-1)} \int_1^e u^{(k)}(x)(x^{s+k-1} - x^{k-m-1})dx$$

Nous allons supposer dans un premier moment que $|s| \leq k - \frac{1}{2}$. Alors il existe un entier $0 \leq m \leq k-1$ tel que $m - \frac{1}{2} \leq |s| \leq m + \frac{1}{2}$. D'après la proposition 3.1, on a alors pour tout réel $l \geq 0$
$$|s + l| \geq |l - m| - \frac{1}{2}$$

Reprenant l'égalité
$$\tilde{u}^{(k)}(s) = \frac{(-1)^k}{s(s+1)\cdots(s+k-1)} \int_1^e u^{(k)}(x)(x^{s+k-1} - x^{k-m-1})dx$$
il s'agit à présent de la majorer.

Mis à part le terme $\frac{1}{s+m}$ (qui peut être très grand si s est très proche de m), on peut utiliser l'inégalité que nous venons de prouver pour majorer les termes $\frac{1}{s+l}$. On a

$$\begin{aligned}
|s| &\geq m - \frac{1}{2} \\
|s+1| &\geq (m-1) - \frac{1}{2} \\
&\dots \\
|s+m-1| &\geq 1 - \frac{1}{2} \\
|s+m+1| &\geq 1 - \frac{1}{2} \\
&\dots \\
|s+k-1| &\geq k-m-1-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

si bien que

$$\frac{1}{s(s+1)\cdots(s+k-1)} \leq \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{j-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{k-1-m} \frac{1}{j-\frac{1}{2}}$$

On a ensuite

$$|\frac{1}{s+m}\int_1^e u^{(k)}(x)(x^{s+k-1} - x^{k-m-1})dx| \leq \max_x |u^{(k)}| |\int_1^e \frac{1}{s+m}(x^{s+k-1} - x^{k-m-1})dx|$$

et nous voulons majorer l'intégrale dans le membre de droite par $e^{\max(\sigma,0)+k}$. Il suffit de réécrire l'intégrale :

$$\begin{aligned}
|\int_1^e \frac{1}{s+m}(x^{s+k-1} - x^{k-m-1})dx| &= |\int_1^e x^{k-m-1}\frac{(x^{s+m}-1)}{s+m}dx| \\
&= |\int_1^e x^{k-m-1}\int_1^x u^{s+m-1}du\, dx| \\
&= \int_1^e x^{k-m-1}\int_1^x u^{\sigma+m-1}du\, dx \qquad \leq e^{\max(\sigma,0)+k}
\end{aligned}$$

d'après la proposition 3.2.

On a donc

$$\begin{aligned}
|\tilde{u}^{(k)}(s)| &= |\frac{(-1)^k}{s(s+1)\cdots(s+k-1)}\int_1^e u^{(k)}(x)(x^{s+k-1} - x^{k-m-1})dx| \\
&\leq \prod_{j=1}^{m}\frac{1}{j-\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{k-1-m}\frac{1}{j-\frac{1}{2}}\max_x |u^{(k)}| e^{\max(\sigma,0)+k}
\end{aligned}$$

On a d'autre part $(k+1)! > (k+1)^{k+1}e^{-(k+1)}$ (ce qui se prouve aisément avec la formule de

Stirling) et $j-\frac{1}{2}\geq\frac{j}{2}$ pour $j\geq 1$. Cela implique alors

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{j-\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{k-1-m}\frac{1}{j-\frac{1}{2}} &\leq \frac{2^{k-1}}{m!(k-1-m)!}\\ &= \frac{2^{k-1}}{(k-1)!}\binom{k-1}{m}\\ &\leq \frac{4^{k-1}}{(k-1)!}\\ &< k\frac{4^{k-1}e^{k+1}}{(k+1)^k}\\ &< k\frac{(4e)^k}{(k+1)^k}\end{aligned}$$

On a alors $|s|+1\leq m+\frac{1}{2}+1\leq k+\frac{1}{2}$ et donc $\frac{1}{(k+1)^k}\leq(1+|s|)^{-k}$. Il reste alors à montrer l'inégalité suivante (le second terme e^k vient de $e^{\max(\sigma,0)+k}$) :

$$k(4e)^ke^k\leq e^{4k}$$

Cela est équivalent à montrer

$$\forall k\in\mathbb{N}^*\quad k\leq(\frac{e^2}{4})^k$$

Pour cela on peut procéder en notant que pour passer de l'inégalité pour k à celle pour $k+1$, on multiplie par $\frac{k+1}{k}$ à gauche, et par $\frac{e^2}{4}\geq\frac{3}{2}$ à droite. Il suffit donc de vérifier l'inégalite pour $k=1$, $k=2$ et $k=3$. Notre minorant $\frac{3}{2}$ suffit pour les calculs puisque $(\frac{3}{2})\geq 1$, $(\frac{3}{2})^2\geq 2$ et $(\frac{3}{2})^3\geq 3$.

Cela achève la preuve de la seconde inégalité pour le cas $|s|\leq k-\frac{1}{2}$.

Supposons donc à présent $|s|\geq k-\frac{1}{2}$.

On note $\alpha>0$ le réel tel que $|s|+1=(1+\alpha)k$. Alors pour $0\leq l\leq k-2$, $(1+\alpha)(k-l-1)=|s|+1-(l+1)(1+\alpha)\leq|s|-l$. Cela implique, en notant que $|s-l|\geq|s|-l$

$$\begin{aligned}|s||s-1|\cdots|s-k+1| &\geq |s|(|s|-1)\cdots(|s|-k+1)\\ &\geq (1+\alpha)^{k-1}(k-1)!(|s|-k+1)\\ &= (1+|s|)^{k-1}k^{-(k-1)}(k-1)!(|s|-k+1)\\ &= (1+|s|)^k\frac{k!}{k^k}\frac{|s|-k+1}{|s|+1}\end{aligned}$$

Alors le majorant du cas précédent

$$\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{j-\frac{1}{2}}\prod_{j=1}^{k-1-m}\frac{1}{j-\frac{1}{2}}\max_x|u^{(k)}|e^{\max(\sigma,0)+k}$$

est remplacé ici par (on utilise ici encore l'inégalité $k!\geq k^ke^{-k}$)

$$(1+|s|)^{-k}e^k\frac{1+|s|}{|s|-k+1}\max_x|u^{(k)}|e^k\int_1^e x^{\sigma-1}dx$$

et il s'agit simplement de montrer que

$$\frac{1+|s|}{|s|-k+1}\int_1^e x^{\sigma-1}dx \leq e^{\max(\sigma,0)}e^{2k}$$

Montrons d'abord qu'on a

$$\int_1^e x^{\sigma-1}dx \leq e^{\max(\sigma,0)}$$

Si $\sigma > 0$, on a $\int_1^e x^{\sigma-1}dx = \frac{e^\sigma-1}{\sigma} \leq e^\sigma$ par convexité. Si $\sigma \leq 0$, on a $\int_1^e x^{\sigma-1}dx \leq \int_1^e x^{-1}dx = 1 = e^0$.

Il suffit pour finir juste de montrer que pour tout réel $|s|+1 = x \geq k+\frac{1}{2}$ on a

$$\frac{x}{x-k} \leq e^{2k}$$

Puisque $x-k \geq \frac{1}{2}$, $\frac{1}{x-k} \leq 2$ et on a

$$\frac{x}{x-k} = 1+\frac{k}{x-k} \leq 1+2k \leq e^{2k}$$

également par convexité.

Pour terminer d'établir

$$|\tilde{u}(s)| \leq \max_x |u^{(k)}(x)|e^{\max(\sigma,0)}e^{4k}(1+|s|)^{-k}$$

il faut examiner ce qui se passe quand $s=-l$ (avec $0 \leq l \leq k-1$ un entier), car alors le dénominateur de $\frac{(-1)^k}{s(s+1)\cdots(s+k-1)}$ n'est pas défini. Un simple argument topologique (de continuité) suffira, puisque le terme de droite et le terme de gauche sont clairement des fonctions continues définies sur tout le plan complexe, et que l'inégalité est vraie dès que s ne vaut pas l'un des entiers négatifs interdits (et le complémentaire de cet ensemble de valeurs interdites est clairement dense dans $\mathbb{C}$).

Montrons à présent la dernière assertion du lemme. Nous commençons par déterminer la transformée de Mellin de v.

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(v)(s) &= \int_0^\infty v(x)x^{s-1}dx \\ &= -\int_0^\infty v'(x)\frac{x^s}{s}dx \\ &= \frac{1}{s}\int_0^\infty u(x)x^s dx \\ &= \frac{\tilde{u}(s+1)}{s}\end{aligned}$$

En utilisant la transformée inverse de Mellin, on obtient alors (on note M un réel très grand mais fixe)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^\infty \frac{c(n)\Lambda(n)}{n^s}v(e^{\frac{\log(n)}{\log(X)}}) &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^\infty \frac{c(n)\Lambda(n)}{n^s}\int_{Re(w)=M}\frac{1}{w}\tilde{u}(w+1)(n^{\frac{-1}{\log(X)}})^w dw \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{Re(w)=M}\frac{L'}{L}(s+\frac{w}{\log(X)})\frac{1}{w}\tilde{u}(w+1)dw\end{aligned}$$

Pour justifier que cette dernière intégrale converge, on utilise la proposition 2.17. En choisissant M suffisament grand, le terme $\sum_{|\rho-s|<1}\frac{1}{\rho-s}$ est nul, et on utilise alors (4.1) avec un k suffisament grand pour garantir la convergence.

L'idée générale est de décaler la droite $Re(w)=M$ vers la gauche, et d'appliquer le théorème de Cauchy pour calculer les résidus obtenus aux pôles et aux zéros de L.

La proposition 2.17 garantit qu'il existe une suite $(T_r)_{r\in\mathbb{N}}$ tendant vers l'infini telle que

$$\forall\sigma\in[-M,M]\quad\frac{L'}{L}(\sigma+iT_r)=O(\log(T_r)^2)$$

Cela vient de l'estimation $N(T+1,L)-N(T,L)=O(\log(T))$: En choisissant T_r de sorte à ce que

$$\min_{|\sigma+iT_r-\rho|\leq 1}|\sigma+iT_r-\rho|\geq\epsilon\frac{1}{\log(T_r)}$$

avec $\epsilon>0$ fixé (ce qui est toujours possible, pourvu que T_r ne soit pas la partie imaginaire de l'un des zéros de L). Alors le terme $\sum_{|\rho-s|<1}\frac{1}{\rho-s}$ vaut au plus $O(\log(T_r)^2)$ (puisqu'il a $O(\log(T_r))$ termes qui sont tous $O(\log(T_r))$). Le même raisonnement s'applique évidément pour les valeurs négatives. Alors en utilisant la borne pour $\tilde{u}$ avec k assez grand, on peut faire tendre vers 0 la contribution des segments horizontaux de l'intégrale le long du rectangle de sommets $M-iA_r$, $M+iT_r$, $-M+iT_r$ et $-M-iA_r$ (où A_r est l'analogue des T_r pour la partie de partie imaginaire négative) : en effet, le long des segments horizontaux, en plus de notre borne pour $\frac{L'}{L}$, on a $\frac{1}{w}=O(\frac{1}{T_r})$ et d'après (4.1) $\tilde{u}\ll e^{\max(\sigma,0)}$.

Les pôles de $\frac{L'}{L}(s+\frac{w}{\log(X)})\frac{1}{w}\tilde{u}(w+1)$ sont $w=0$, de résidu $\frac{L'}{L}(s)\tilde{u}(1)=\frac{L'}{L}(s)v(0)=\frac{L'}{L}(s)$, $w=\rho$ (avec ρ un zéro de L), de résidu $\frac{1}{\rho-s}\tilde{u}(1+(\rho-s)\log(X))$, et $w=\eta$ (avec η un pôle de L), de résidu $\frac{1}{\eta-s}\tilde{u}(1+(\eta-s)\log(X))$. Le théorème des résidus donne alors

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c(n)\Lambda(n)}{n^s}v(e^{\frac{\log(n)}{\log(X)}})=&-\frac{1}{2\pi i}\int_{Re(w)=-M}\frac{L'}{L}(s+\frac{w}{\log(X)})\frac{1}{w}\tilde{u}(w+1)dw\\&-\frac{L'}{L}(s)+\sum_{\eta}\frac{1}{\eta-s}\tilde{u}(1+(\eta-s)\log(X))\\&-\sum_{\rho}\frac{1}{\rho-s}\tilde{u}(1+(\rho-s)\log(X))\end{aligned}$$

En faisant tendre M vers l'infini (séquentiellement, i.e. en prenant $M=M_r$ avec $\lim M_r=\infty$, et en choisissant M_r de manière à éviter les pôles de L), l'intégrale tend vers 0 puisque le facteur $\frac{L'}{L}$ est borné par $O(\log(2+|w|)$ et grâce à (4.1) avec $k=2$, en observant que $\lim_{M\to\infty}(1+M)^{-2}=0$.

On obtient alors

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c(n)\Lambda(n)}{n^s}v(e^{\frac{\log(n)}{\log(X)}})=-\frac{L'}{L}(s)+\sum_{\eta}\frac{1}{\eta-s}\tilde{u}(1+(\eta-s)\log(X))-\sum_{\rho}\frac{1}{\rho-s}\tilde{u}(1+(\rho-s)\log(X))$$

où η parcourt les pôles de L et ρ les zéros.

Pour terminer de montrer le lemme 1, il suffit alors de montrer que

$$\sum_{\eta} \frac{1}{\eta - s} \tilde{u}(1 + (\eta - s)\log(X)) = O((|s| + 1)^{-K})$$

et

$$\sum_{Re(\rho) \notin [0;1]} \frac{1}{\rho - s} \tilde{u}(1 + (\rho - s)\log(X)) = O((|s| + 1)^{-K})$$

En appliquant (4.1) à $\tilde{v}(s) = \frac{\tilde{u}(1+s)}{s}$ on obtient

$$|\tilde{v}((\eta - s)\log(X))\log(X)| \ll e^{\max(Re(\eta - s)\log(X), 0)}(1 + |(\eta - s)\log(X)|)^{-k} = X^{\max(Re(\eta - s), 0)} O((|s| + 1)^{-k})$$

Les pôles de L sont en nombre fini, et vérifient tous $Re(\eta) = 1$ d'après l'hypothèse 2.3. On a donc un nombre fini de fois (et en se souvenant que $\sigma \geq 0$ par hypothèse)

$$X^{\max(Re(\eta - s), 0)} = X^{\max(1 - \sigma), 0)} \leq X$$

ce qui montre la première borne.

Il s'agit alors d'établir la seconde borne. Les zéros de L hors de la bande critique sont tous des pôles de G (c'est une conséquence de l'équation fonctionnelle, et de la proposition 2.6). On borne le terme $e^{\max(Re(\rho - s)\log(X), 0)}$ de la même manière que dans le cas précédent, en considérant le zéro de plus grande partie réelle. L'expression générale des pôles de $\Gamma(\lambda s + \mu)$ est $\rho = -\frac{n+\mu}{\lambda}$, avec $n \in \mathbb{N}$. Il suffit alors de montrer

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 + |1 - (\frac{n + \mu}{\lambda} + s)\log(X)|)^{-k} = O((1 + |s|)^{-k+1})$$

(et il suffit de prendre $k + 1$ au lieu de k pour majorer $\tilde{u}$). On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} (1 + |1 - (\frac{n + \mu}{\lambda} + s)\log(X)|)^{-k} &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |1 - (\frac{n + \mu}{\lambda} + s)\log(X)|^{-k} \\
&= (\frac{\log(X)}{\lambda})^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} |\mu - \frac{1}{\lambda \log(X)} + n + \lambda s|^{-k} \\
&\leq K \sum_{n=0}^{\infty} |n + \lambda s|^{-k}
\end{aligned}$$

avec $K > 0$ une constante (on notera qu'ici aussi $\sigma \geq 0$, que $\lambda \geq 0$). Strictement parlant, la première majoration intervient trop tôt, car le dénominateur pourrait être nul pour des petites valeurs de n, mais nous ne nous en préoccuperons pas, puisque cela n'implique qu'un nombre fini de termes et donc juste de modifier la valeur de la constante K). Il ne faut plus que prouver que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n + z|^k} = O((1 + |z|)^{-k+1})$$

pour $Re(z) \geq 0$, car $O((1 + |\lambda s|)^{-k+1}) = O((1 + |s|)^{-k+1})$. Cette dernière borne se déduit aisément de la minoration $2|n + z| \geq n + |z|$ et d'une comparaison série-intégrale. $\square$

On intègre à présent (4.2) sur $\sigma \in [\frac{1}{2};\infty]$. Puisque $\lim_{\sigma\to\infty} L(s) = 1$ on a également $\lim_{\sigma\to\infty} \log L(s) = 0$. On obtient alors (en supposant toujours que $|t| \geq \Delta$ et que t n'est pas la partie imaginaire d'un zéro)

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} -\frac{L'}{L}(\sigma+it)d\sigma = \log L(\frac{1}{2}+it) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)\lambda_1(n)}{n^{\frac{1}{2}+it}} v(e^{\frac{\log(n)}{\log(X)}}) + \sum_{\rho, Re(\rho)\in[0;1]} \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{\rho - s}\tilde{u}(1+(\rho-s)\log(X))d\sigma + O(1)$$

où le terme $O(1)$ vient de l'intégrabilité de $(1+|s|)^{-K}$ pour $K \geq 2$.

Les deux lemmes qui suivent servent à contrôler les termes d'erreur dans l'approximation de $\log L(\frac{1}{2}+it)$ par un polynôme de Dirichlet.

Lemme 4.4 (Lemme 2) *Pour $|t| \geq \Delta$, $2 \leq X \leq |t|^2$, et $K > 0$ un entier, on a*

$$\begin{aligned}\log L(\frac{1}{2}+it) = &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)\Lambda_1}{n^{\frac{1}{2}+it}} v(e^{\frac{\log(n)}{\log(X)}}) \\ &+ O\left(1 + \sum_{|\gamma - t| \leq \frac{1}{\log(X)}} \log\left(1 + \frac{1}{|\gamma - t|\log(X)}\right)\right) \\ &+ O\Big(\sum_{\rho} \frac{X^{\max(\beta-\frac{1}{2},0)}}{(1+|\gamma - t|\log(X))^K}\Big)\end{aligned}$$

où $\rho = \beta + i\gamma$ parcourt les zéros de la bande critique.

Preuve. Supposons pour commencer que $|\rho - s| \leq \frac{1}{\log(X)}$. Alors, en notant $M = \max_{|z|\leq 2} |\tilde{u}(z)|$, on a

$$|\frac{1}{\rho - s}\tilde{u}(1+(\rho-s)\log(X))| \leq M\frac{1}{|\rho - s|}$$

On peut par exemple se rendre compte géométriquement que

$$2|\beta - \sigma + i(\gamma - t)| \geq |\beta - \sigma| + |\gamma - t|$$

et puisque $|\gamma - t| \neq 0$ cela donne la borne

$$\frac{M}{|\rho - s|} = O\big(\frac{1}{|\beta - \sigma| + |\gamma - t|}\big)$$

Notons que seul un nombre fini de zéros verront leur intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{\rho - s}\tilde{u}(1+(\rho-s)\log(X))d\sigma$ vérifier ce cas de figure. Pour chacun d'entre eux, il découle de notre borne que la contribution de la condition $|\rho - s| \leq \frac{1}{\log(X)}$ à l'intégrale est majorée par

$$\begin{aligned}\int_{|\beta-\sigma|\leq\frac{1}{\log(X)}} \frac{d\sigma}{|\beta - \sigma| + |\gamma - t|} &\leq 2\int_0^{\frac{1}{\log(X)}} \frac{dx}{x + |\gamma - t|} \\ &= 2\big(\log(\frac{1}{\log(X)} + |\gamma - t|) - \log(|\gamma - t|)\big) \\ &= 2\log(1 + \frac{1}{|\gamma - t|\log(X)})\end{aligned}$$

Puisque seuls les zéros vérifiant $|\gamma - t| \leq \frac{1}{\log(X)}$ peuvent vérifier la condition $|\rho - s| \leq \frac{1}{\log(X)}$, on obtient la première borne (on notera que le 1 vient du terme $O(1)$ après le calcul de l'intégrale).

Dans la région $|\rho - s| \geq \frac{1}{\log(X)}$, et pour les autres zéros, on peut utiliser (4.1)

$$\tilde{u}(1+s) = O(e^{\max(1+\sigma,0)}(1+|s|)^{-K-1}) = O(e^{\max(\sigma,0)}(1+|s|)^{-K-1})$$

ce qui donne (puisque $\frac{1}{|\rho-s|} \leq \log(X)$ par hypothèse)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho - s}\tilde{u}(1+(\rho-s)\log(X)) &= O\big(\log(X)e^{\max((\beta-\sigma)\log(X),0)}(1+|\rho-s|\log(X))^{-K-1}\big) \\
&= O(\log(X)X^{\max(\beta-\sigma,0)}(1+|\rho-s|\log(X))^{-K-1}) \\
&= O(\log(X)X^{\max(\beta-\frac{1}{2},0)}(1+|\rho-s|\log(X))^{-K-1})
\end{aligned}$$

Pour conclure, il faut alors intégrer cette borne sur $\sigma \in [\frac{1}{2};\infty]$. Pour cela, il suffit d'évaluer

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{(1+|\rho-s|\log(X))^{K+1}}d\sigma$$

Puisque $1+|\rho-s|\log(X) \geq \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log(X)(|\beta-\sigma|+|\gamma-t|)$, on a (en notant $A = 1+\log(X)|\gamma-t|$)

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{(1+|\rho-s|\log(X))^{K+1}}d\sigma &\leq 2^{K+1}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\frac{1}{(A+\log(X)|\beta-\sigma|)^{K+1}}d\sigma \\
&\leq 2^{K+2}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\frac{1}{(A+\log(X)x)^{K+1}}dx \\
&= 2^{K+2}(\log(X))^{-1}\int_{\frac{\log(X)}{2}}^{\infty}\frac{1}{(A+x)^{K+1}}dx \\
&= 2^{K+2}(\log(X))^{-1}\int_{\frac{\log(X)}{2}+A}^{\infty}\frac{1}{x^{K+1}}dx \\
&\leq 2^{K+2}(\log(X))^{-1}\int_{A}^{\infty}\frac{1}{x^{K+1}}dx \\
&= O(\frac{1}{\log(X)}\frac{1}{A^K}) \\
&= O(\frac{1}{\log(X)}\frac{1}{(1+\log(X)|\gamma-t|)^K})
\end{aligned}$$

ce qui établit la seconde borne et achève la preuve du lemme 2. □

Lemme 4.5 (Lemme 3) *Supposons qu'il existe* $a \in]0;1[$ *tel que*

$$N(\sigma,T;L) = O(T^{1-a(\sigma-\frac{1}{2})}\log(T))$$

uniformément pour $\sigma \in [\frac{1}{2};1]$*. Soit* $K \geq 3$ *un entier,* $T \geq \Delta$ *et* $X \in [2;T^{\frac{a}{2}}]$*. Alors*

$$\int_T^{2T}\sum_{\rho}\frac{X^{\max(\beta-\frac{1}{2},0)}}{(1+|\gamma-t|\log(X))^K}dt = O(T\frac{\log(T)}{\log(X)})$$

Sans supposer $K \geq 3$ et sans l'hypothèse sur la répartition des zéros, on a de plus

$$\int_T^{2T} \left(1 + \sum_{|\gamma - t| \leq \frac{1}{\log(X)}} \log\big(1 + \frac{1}{|\gamma - t|\log(X)}\big)\right) dt = O(T\frac{\log(T)}{\log(X)})$$

Preuve. Commençons par montrer la seconde assertion. De toute évidence, $\int_T^{2T} 1 dt = O(T\frac{\log(T)}{\log(X)})$. Il suffit donc d'examiner

$$\int_T^{2T} \sum_{|\gamma - t| \leq \frac{1}{\log(X)}} \log\big(1 + \frac{1}{|\gamma - t|\log(X)}\big) dt$$

Puisque $X \geq 2$, $\frac{1}{\log(X)} \leq 2$ (car $\log(2) \geq \frac{1}{2}$). Par conséquent, les zéros concernés dans la somme sont au plus ceux situés dans l'intervalle $\gamma \in [T-2; 2T+2]$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
\int_T^{2T} \sum_{|\gamma - t| \leq \frac{1}{\log(X)}} \log\big(1 + \frac{1}{|\gamma - t|\log(X)}\big) dt &\leq \sum_{\gamma \in [T-2;2T+2]} \int_{-\frac{1}{\log(X)}}^{\frac{1}{\log(X)}} \log\big(1 + \frac{1}{|x|\log(X)}\big) dx \\
&= \sum_{\gamma \in [T-2;2T+2]} \frac{1}{\log(X)} \int_{-1}^{1} \log\big(1 + \frac{1}{|x|}\big) dx \\
&= \frac{1}{\log(X)} (N(2T+2, L) - N(T-2, L)) \int_{-1}^{1} \log\big(1 + \frac{1}{|x|}\big) dx \\
&= \frac{1}{\log(X)} O(T\log(T)) \int_{-1}^{1} \log\big(1 + \frac{1}{|x|}\big) dx
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu à condition que cette dernière intégrale converge. Puisqu'on a bien

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \log(1 + \frac{1}{x}) dx &= \int_0^1 \log(x+1) - \log(x) dx \\
&= \int_0^1 \log(x+1) dx - \int_0^1 \log(x) dx \\
&= (2\log(2) - 2) - (-1)
\end{aligned}$$

(qui est fini) on obtient bien la borne voulue.

Passons à présent à la première assertion du lemme. Ici, il est pertinent de distinger deux cas.

Considérons les zéros vérifiant $\gamma \in [\frac{T}{2}; 3T]$. On a

$$\begin{aligned}
\int_T^{2T} \sum_\rho \frac{X^{\max(\beta-\frac{1}{2},0)}}{(1+|\gamma-t|\log(X))^K} dt &\leq \sum_{\frac{T}{2}\leq\gamma\leq 3T} X^{\max(\beta-\frac{1}{2},0)} \int_T^{2T} \frac{1}{(1+|\gamma-t|\log(X))^K} dt \\
&\leq \sum_{\frac{T}{2}\leq\gamma\leq 3T} X^{\max(\beta-\frac{1}{2},0)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+|\gamma-t|\log(X))^K} dt \\
&\leq \sum_{\frac{T}{2}\leq\gamma\leq 3T} X^{\max(\beta-\frac{1}{2},0)} \frac{1}{\log(X)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+|\gamma-t|)^K} dt \\
&= \sum_{\frac{T}{2}\leq\gamma\leq 3T} X^{\max(\beta-\frac{1}{2},0)} \frac{2}{K-1} \frac{1}{\log(X)} \\
&= O(\frac{1}{\log(X)}) \sum_{\frac{T}{2}\leq\gamma\leq 3T} X^{\max(\beta-\frac{1}{2},0)}
\end{aligned}$$

Par conséquent il suffit de montrer que

$$\sum_{\frac{T}{2}\leq\gamma\leq 3T} X^{\max(\beta-\frac{1}{2},0)} = O(T\log(T))$$

Si l'on suppose GRH, cela découle simplement de $N(3T,L) - N(\frac{T}{2},L) = O(T\log(T))$. Supposons simplement l'hypothèse de densité des zéros énoncée dans le lemme.

Si $\beta \leq \frac{1}{2}$, alors on peut borner chaque terme par 1 et puisque $N(3T,L) = O(T\log(T))$ on a bien la borne voulue.

Si $\beta \geq \frac{1}{2}$ on calcule directement par sommation par partie

$$\begin{aligned}
\sum_{\frac{T}{2}\leq\gamma\leq 3T} X^{\max(\beta-\frac{1}{2},0)} &= -\int_{\frac{1}{2}}^{1} X^{\sigma-\frac{1}{2}} dN(\sigma,T,L) \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{1} X^{\sigma-\frac{1}{2}} \log(T) a \log(T) T^{1-a(\sigma-\frac{1}{2})} d\sigma \\
&\leq aT(\log(T))^2 \int_0^{\frac{1}{2}} T^{\frac{a}{2}\sigma} T^{-a\sigma} d\sigma \\
&\leq aT(\log(T))^2 \int_0^{\infty} T^{-\frac{a}{2}\sigma} d\sigma \\
&\leq aT(\log(T))^2 (\frac{a}{2}\log(T))^{-1} \\
&\ll T\log(T)
\end{aligned}$$

Pour les autres zéros, on utilise

$$\int_T^{2T} \frac{1}{(1+|\gamma-t|\log(X))^K} dt = O(T(\log(X))^{-K}(T+|\gamma|)^{-K})$$

et le terme $X^{\max(\beta-\frac{1}{2},0)}$ est borné par $T+|\gamma|$, et il suffit donc de montrer que

$$\frac{T}{(\log(X))^K}\sum_{\gamma\notin[\frac{T}{2};3T]}(|\rho|+T)^{-2}=O(T\frac{\log(T)}{\log(X)})$$

Cela découle naturellement de (2.24), et termine notre preuve. □

Tout l'intérêt du travail effectué jusqu'ici réside dans le corollaire suivant, qui donne une estimation L^1 de $\log L(\frac{1}{2}+it)$.

Corollaire 4.6 *Supposons $T\geq\Delta$, $X\in[2;T^{\frac{a}{2}}]$, et*

$$N(\sigma,T;L)=O(T^{1-a(\sigma-\frac{1}{2})}\log(T))$$

uniformément pour $\sigma\in[\frac{1}{2};1]$. Alors

$$\int_T^{2T}\left|\log L(\frac{1}{2}+it)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c(n)\Lambda_1}{n^{\frac{1}{2}+it}}v(e^{\frac{\log(n)}{\log(X)}})\right|dt=O(T\frac{\log(T)}{\log(X)})$$

Preuve. En reprenant

$$\log L(\frac{1}{2}+it)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c(n)\Lambda_1(n)}{n^{\frac{1}{2}+it}}v(e^{\frac{\log(n)}{\log(X)}})=\sum_{\rho,Re(\rho)\in[0;1]}\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\frac{1}{\rho-s}\tilde{u}(1+(\rho-s)\log(X))d\sigma+O(1)$$

obtenu après le lemme 1, les lemmes 2 et 3 montrent que l'intégrale sur $[T;2T]$ du membre de droite est majorée par $O(T\frac{\log(T)}{\log(X)})$, ce qui établit le corollaire. □

Lemme 4.7 (Lemme 4) *Soit H et T des réels positifs. Alors*

$$\int_T^{T+H}(\sum a_n n^{-it})(\overline{\sum b_n n^{-it}})dt=H(\sum a_n\overline{b_n})+O\left((\sum n|a_n|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum n|b_n|^2)^{\frac{1}{2}}\right)$$

où la constante implicite dans le terme d'erreur ne dépend ni de T, ni de H.

Preuve. Nous supposerons que cela est vrai pour le cas d'égalité $a_n=b_n$, ce qui est une extension de l'inégalité de Hilbert due à Montgomery et Vaughan. On note

$$\langle a;b\rangle=\int_T^{T+H}(\sum a_n n^{-it})(\overline{\sum b_n n^{-it}})dt$$

On a alors, par l'identité de polarisation, avec $\lambda\in\mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}\langle a;b\rangle&=\langle\lambda a;\lambda^{-1}b\rangle\\&=\frac{1}{4}\big(\langle\lambda a+\lambda^{-1}b;\lambda a+\lambda^{-1}b\rangle-\langle\lambda a-\lambda^{-1}b;\lambda a-\lambda^{-1}b\rangle+i\langle\lambda a+i\lambda^{-1}b;\lambda a+i\lambda^{-1}b\rangle-i\langle\lambda a-i\lambda^{-1}b;\lambda a-i\lambda^{-1}b\rangle\big)\\&=\frac{H}{4}(\sum|\lambda a_n+\lambda^{-1}b_n|^2)+O(\sum n|\lambda a_n+\lambda^{-1}b_n|^2)+\cdots-i\frac{H}{4}(\sum|\lambda a_n-i\lambda^{-1}b_n|^2)-O(\sum n|\lambda a_n-i\lambda^{-1}b_n|^2)\\&=H(\sum a_n\overline{b_n})+O(\lambda^2\sum n|a_n|^2)+O(\lambda^{-2}\sum n|b_n|^2)+O((\sum n|a_n|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum n|b_n|^2)^{\frac{1}{2}})\end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir λ de sorte à ce que (en notant $A = \sum n|a_n|^2$ et $B = \sum n|b_n|^2$)

$$\lambda^2 A = O(\sqrt{A}\sqrt{B})$$

et

$$\lambda^{-2} B = O(\sqrt{A}\sqrt{B})$$

En choisissant $\lambda = \sqrt{\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}}}$ on obtient bien les bornes voulues. $\square$

Le lemme suivant est un résultat utile pour estimer la norme L^1 de $\log L(\frac{1}{2} + it)$.

Lemme 4.8 (Lemme 5) *Supposons que les hypothèses 2.1 à 2.4 ainsi que la borne de densité du lemme 3 soient vérifiées. Alors*

$$\int_T^{2T} |\log L(\frac{1}{2} + it)| dt = O(T\sqrt{\log(\log(T))})$$

Preuve. D'après le corollaire on a

$$\int_T^{2T} \left| \log L(\frac{1}{2} + it) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)\Lambda_1}{n^{\frac{1}{2}+it}} v(e^{\frac{\log(n)}{\log(X)}}) \right| dt = O(T\frac{\log(T)}{\log(X)})$$

En appliquant l'inégalité triangulaire, avec $X = T^b$, il suffit que $b \leq \frac{a}{2}$ et que $b \geq (\log(\log(T))^{-\frac{1}{2}}$. Cela est vérifié pour T assez grand, et b assez petit. On peut alors remplacer $\log L(\frac{1}{2} + it)$ par

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)\Lambda_1}{n^{\frac{1}{2}+it}} v(e^{\frac{\log(n)}{\log(X)}})$$

Le lemme est équivalent à ce que

$$\left(\int_T^{2T} |\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)\Lambda_1(n)}{n^{\frac{1}{2}+it}} v(e^{\frac{\log(n)}{\log(X)}}) \big| dt \right)^2 = O(T^2 \log(\log(T)))$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis le lemme 4, on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\int_T^{2T} |\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)\Lambda_1(n)}{n^{\frac{1}{2}+it}} v(e^{\frac{\log(n)}{\log(X)}}) \big| dt \right)^2 &\leq \int_T^{2T} 1\, dt \int_T^{2T} |\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)\Lambda_1(n)}{n^{\frac{1}{2}+it}} v(e^{\frac{\log(n)}{\log(X)}}) \big|^2 dt \\
&\leq T \int_T^{2T} |\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)\Lambda_1(n)}{n^{\frac{1}{2}+it}} v(e^{\frac{\log(n)}{\log(X)}}) \big|^2 dt \\
&\leq T^2 \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c(n)|^2 \Lambda_1(n)^2}{n} v(e^{\frac{\log(n)}{\log(X)}})^2 \Big) + O\Big(T \sum_{n=1}^{\infty} |c(n)|^2 \Lambda_1(n)^2 v(e^{\frac{\log(n)}{\log(X)}})^2 \Big)
\end{aligned}$$

Il s'agit donc de montrer tour à tour que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c(n)|^2 \Lambda_1(n)^2}{n} v(e^{\frac{\log(n)}{\log(X)}})^2 = O(\log(\log(T)))$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c(n)|^2\Lambda_1(n)^2 v(e^{\frac{\log(n)}{\log(X)}})^2 = O(T\log(\log(T)))$$

Commençons par la première borne. Puisque $|v(e^{\frac{\log(n)}{\log(X)}})| \leq 1$, on écrit

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|c(n)|^2\Lambda_1(n)^2}{n} v(e^{\frac{\log(n)}{\log(X)}})^2 \leq \sum_{p^r\leq X}\frac{|c(p^r)|^2}{p^r}\frac{1}{r^2} \leq \sum_{p^r\leq X}\frac{|c(p^r)|^2}{p^r}$$

et la proposition 2.10 permet de traiter le cas $r \geq 2$, tandis que le cas $r = 1$ est une conséquence naturelle de l'hypothèse 2.4 (puisque X est une puissance de T).

Similairement, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c(n)|^2\Lambda_1(n)^2 v(e^{\frac{\log(n)}{\log(X)}})^2 \leq \sum_{n\leq X}|c(n)|^2\Lambda_1(n)^2 = \sum_{p^r\leq X}|c(p^r)|^2\frac{1}{r^2}$$

En utilisant l'expression $|c(p^r)| \leq \sum_{i=1}^{d}|\alpha_i|^r \leq dp^{\frac{r}{2}}$ qui est une conséquence de l'hypothèse 2.1, on a $|c(p^r)|^2 \leq d^2p^r$, et on obtient ainsi :

$$\sum_{p^r\leq X}|c(p^r)|^2\frac{1}{r^2} \leq \sum_{p^r\leq X}(\frac{d}{r})^2p^r \leq d^2\sum_{n\leq X^{\frac{1}{r}}} n^r$$

Puisque

$$\sum_{n\leq X^{\frac{1}{r}}} n^r \leq \sum_{n\leq X} n \leq X^2 \leq T^a$$

on obtient finalement

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c(n)|^2\Lambda_1(n)^2 v(e^{\frac{\log(n)}{\log(X)}})^2 = O(T^a\log(T))$$

d'où la seconde borne, puisque $a < 1$. □

Avant d'établir le dernier lemme puis le théorème, nous devons introduire la notation

$$\Sigma_j = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_j(n)\Lambda_1(n)}{n^{\frac{1}{2}+it}} v(e^{\frac{\log(n)}{\log(X)}}) \tag{4.3}$$

Les termes de cette somme sont non nuls seulement si n est une puissances d'un nombre premier. On écrit alors $\Sigma_j = \Sigma'_j + \Sigma''_j$, avec Σ'_j la somme indexée seulement sur les nombres premiers, et Σ''_j la somme indexée sur les puissances supérieures de nombres premiers.

Pour $1 \leq j \leq N$, on note k_j et l_j des entiers, $K_j = \sum_{i\leq j} k_i$ et $L_j = \sum_{i\leq j} l_i$, $K = K_N$ et $L = L_N$. On note $\mathbf{k}$ le vecteur $(k_1, \cdots, k_N)$, et $\mathbf{l}$ le vecteur $(l_1, \cdots, l_N)$. Enfin, on écrit $\mathbf{k}! = \prod k_j!$ (et similairement pour $\mathbf{l}!$).

Lemme 4.9 (Lemme 6) *Supposons vérifiées les hypothèses 2.1 à 2.4, et que $X \leq T^{\frac{1}{K+L+1}}$. Alors*

$$\int_T^{2T}\prod_{j=1}^{N}(\Sigma_j)^{k_j}(\overline{\Sigma_j})^{l_j}dt = T\delta_{\mathbf{k},\mathbf{l}}\mathbf{k}!\prod_{j=1}^{N}(n_j\log(\log(X)))^{k_j} + O(T(\log(\log(X)))^{\frac{1}{2}(K+L)-\frac{1}{2}})$$

Preuve. Si $K = L = 0$, le résultat est trivial. On supposera donc dans la suite que $K + L \geq 1$. On écrit

$$b_j(n) = c_j(n)\Lambda_1(n)v(e^{\frac{\log(n)}{\log(X)}}) \tag{4.4}$$

puis en écrivant $\mathbf{n} = (n_1, \cdots, n_N)$,

$$b(\mathbf{n}, \mathbf{k}) = \prod_{j=1}^{N} \prod_{\kappa=K_{j-1}+1}^{K_j} b_j(n_\kappa) \tag{4.5}$$

et

$$B(n, \mathbf{k}) = \sum_{n_1 \cdots n_K = n} b(\mathbf{n}, \mathbf{k}) \tag{4.6}$$

Ainsi on a, par un argument de comptage classique,

$$\prod_{j=1}^{N} (\Sigma_j)^{k_j} = \sum_{n=1}^{\infty} B(n, \mathbf{k}) n^{-\frac{1}{2}+it} \tag{4.7}$$

L'écriture $\Sigma_j = \Sigma'_j + \Sigma''_j$ implique que l'intégrale se décompose en 2^{K+L} intégrales, dont un terme "dominant" composé seulement de facteurs de la forme Σ'_j, et un terme d'erreur, qui comporte 2^{K+L-1} termes, où chaque intégrale contient au moins un facteur Σ''_j.

Nous nous intéressons d'abord au terme d'erreur.

L'inégalité arithmético-géométrique donne (en écrivant α_r les facteurs de la forme Σ'_j, $\overline{\Sigma'_j}$, Σ''_j, $\overline{\Sigma''_j}$ - l'important étant ici qu'il y en a au plus $K + L - 1$ de la forme Σ'_j ou $\overline{\Sigma'_j}$)

$$\begin{aligned}
\prod_{r=1}^{K+L-1} \alpha_r &= \Big(\prod_{r=1}^{K+L-1} \alpha_r^{K+L-1}\Big)^{\frac{1}{K+L-1}} \\
&\leq \frac{1}{K+L-1} \sum_{r=1}^{K+L-1} \alpha_r^{K+L-1} \\
&\leq \alpha_{r_1}^{K+L-1}
\end{aligned}$$

où α_{r_1} est le facteur maximal.

On obtient alors

$$\begin{aligned}
\left| \int_T^{2T} \Sigma''_j \prod_{r=1}^{K+L-1} \alpha_r dt \right| &\leq \int_T^{2T} |\Sigma''_j||\alpha_{r_1}|^{K+L-1} dt \\
&\leq \int_T^{2T} |\Sigma''_j||\Sigma'_r|^{K+L-1} dt + \int_T^{2T} |\Sigma''_w|^{K+L} dt
\end{aligned} \tag{4.8}$$

où le second terme vient du terme avec seulement des Σ''_j (on peut ici appliquer l'inégalité arithmético-géométrique avec $K + L$ facteurs).

L'inégalité de Hölder donne alors (avec $p = \frac{K+L}{K+L-1}$ et $q = K+L$, et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

$$\int_T^{2T} |\Sigma_j''||\Sigma_r'|^{K+L-1} dt \leq \Big(\int_T^{2T} |\Sigma_r'|^{K+L} dt \Big)^{\frac{K+L-1}{K+L}} \Big(\int_T^{2T} |\Sigma_j''|^{K+L} dt \Big)^{\frac{1}{K+L}} \tag{4.9}$$

Si l'on peut montrer que les deux bornes

$$\int_T^{2T} |\Sigma_j'|^{2K+2L} dt = O(T \log(\log(X))^{K+L}) \tag{4.10}$$

et

$$\int_T^{2T} |\Sigma_j''|^{2K+2L} dt = O(T) \tag{4.11}$$

sont vérifiées, on obtient la borne

$$\int_T^{2T} \prod_{r=1}^{K+L} \alpha_r dt = O(T(\log(\log(X)))^{\frac{1}{2}(K+L)-\frac{1}{2}}) \tag{4.12}$$

Cela permettra de montrer que les termes d'erreur sont majorés par $O(T(\log(\log(X)))^{\frac{1}{2}(K+L)-\frac{1}{2}})$. Puisqu'il y a $2^{K+L-1} = O(1)$ tels termes, on aura bien borné les termes secondaires par le terme d'erreur du lemme.

Pour justifier que (4.12) suit à partir de (4.9) si l'on admet les deux bornes (4.10) et (4.11), on commence par utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\Big(\int_T^{2T} |\Sigma_r'|^{K+L} dt \Big)^2 \leq T \int_T^{2T} |\Sigma_r'|^{2K+2L} dt = O(T^2 (\log(\log(X)))^{K+L})$$

et donc

$$\Big(\int_T^{2T} |\Sigma_r'|^{K+L} dt \Big)^{\frac{K+L-1}{K+L}} = O(T^{\frac{K+L-1}{K+L}} (\log(\log(X)))^{\frac{K+L}{2} \frac{K+L-1}{K+L}}) = O(T^{\frac{K+L-1}{K+L}} (\log(\log(X)))^{\frac{1}{2}(K+L)-\frac{1}{2}})$$

L'autre borne permet de traiter à la fois le second facteur dans l'inégalité de Hölder et le second terme de la majoration.

$$\Big(\int_T^{2T} |\Sigma_j''|^{K+L} dt \Big)^2 \leq T \int_T^{2T} |\Sigma_j''|^{2K+2L} dt = O(T^2)$$

d'où

$$\int_T^{2T} |\Sigma_j''|^{K+L} dt = O(T)$$

et on obtient alors la bonne puissance de T dans l'expression de la borne de (4.9), ainsi qu'un terme $O(T)$ dans (4.8) qui est même plus petit que le terme d'erreur voulu puisque $K + L \geq 1$.

Il s'agit donc simplement de montrer les deux bornes (4.10) et (4.11).

Nous commençons par (4.10). Le lemme 4 donne

$$\int_T^{2T} |\Sigma'_j|^{2K+2L} dt = \int_T^{2T} (\Sigma'_j)^{K+L} (\overline{\Sigma'_j})^{K+L} dt$$
$$= T \sum_{n\geq 1} \frac{|B'(n)|^2}{n} + O\Big(\sum_{n\geq 1} |B'(n)|^2\Big)$$

avec

$$B'(n) = \sum_{p_1\cdots p_{K+L}=n} b_j(p_1)\cdots b_j(p_{K+L}) \tag{4.13}$$

où les p_i sont des nombres premiers. La somme est comptée avec l'ordre. B' est l'analogue de B : c'est le coefficient du polynôme de Dirichlet Σ'^{K+L}. Puisque n fixé a une décomposition unique en facteurs premiers, il y en a toujours $K+L$, et il y a $(K+L)!$ manières de les ordonner. On obtient donc, d'après l'hypothèse 2.4,

$$\begin{aligned}
T \sum_{n\geq 1} \frac{|B'(n)|^2}{n} &\leq T(K+L)!\Big(\sum_{p} \frac{|b_j(p)|^2}{p}\Big)^{K+L} \\
&\leq T(K+L)!\Big(\sum_{p\leq X} \frac{|c_j(p)|^2}{p}\Big)^{K+L} \\
&\leq T(K+L)!\Big(\sum_{p\leq X} \frac{|a_j(p)|^2}{p}\Big)^{K+L} \\
&= O(T(\log(\log(X)))^{K+L}) \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

et d'autre part, d'après l'hypothèse 2.2,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} |B'(n)|^2 &\leq (K+L)!\Big(\sum_{p} |b_j(p)|^2\Big)^{K+L} \\
&\leq (K+L)!\Big(\sum_{p\leq X} |c_j(p)|^2\Big)^{K+L} \\
&= (K+L)!\Big(\sum_{p\leq X} |a_j(p)|^2\Big)^{K+L} \\
&= O(X^{K+L+\epsilon}) \\
&= O(T^{\frac{1}{K+L+1}(K+L+\epsilon)}) \\
&= O(T) \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

ce qui montre la borne (4.10).

Pour montrer la borne (4.11), on commence par remarquer que d'après la proposition 2.9, la contribution des puissances plus grandes que les carrés est finie. Il suffit donc de s'intéresser aux termes en carrés de premiers.

On écrit alors

$$B''(n) = \sum_{p_1^2\cdots p_{K+L}^2=n} b_j(p_1^2)\cdots b_j(p_{K+L}^2)$$

et par les mêmes arguments d'unicité de décomposition en facteurs premiers, de comptage, et en utilisant simplement la proposition 2.10 au lieu de l'hypothèse 2.4 on obtient successivement

$$T\sum_{n\geq 1}\frac{|B''(n)|^2}{n}\leq T(K+L)!\Big(\sum_{p}\frac{|b_j(p^2)|^2}{p^2}\Big)=TO(1)=O(T)$$

et

$$\sum_{n\geq 1}|B''(n)|^2=O(T)$$

ce qui établit la seconde borne.

Cela montre bien que la somme des 2^{K+L-1} intégrales secondaires est bien bornée par le terme d'erreur $O(T(\log(\log(X)))^{\frac{1}{2}(K+L)-\frac{1}{2}})$.

Intéressons-nous donc au terme principal

$$\int_T^{2T}\prod_{j=1}^{N}(\Sigma'_j)^{k_j}(\overline{\Sigma'_j})^{l_j}\,dt$$

Ici on reprend

$$B'(n,\mathbf{k})=\sum_{p_1\cdots p_K=n}b(\mathbf{n},\mathbf{k}) \tag{4.16}$$

où les p_i sont premiers. Essentiellement on restreint la définition initiale des B aux seuls cas

$$\mathbf{n}=(p_1,\cdots,p_K)$$

puisque Σ'_j a des coefficients seulement aux indices premiers.

Le lemme 4 donne alors

$$\int_T^{2T}\prod_{j=1}^{N}(\Sigma'_j)^{k_j}(\overline{\Sigma'_j})^{l_j}\,dt=T\sum_{\substack{p_1\cdots p_K=n\\ q_1\cdots q_L=n}}\frac{B'(n,\mathbf{k})\overline{B'(n,\mathbf{l})}}{n}+O\Big(\Big(\sum_{p_1\cdots p_K=n}|B'(n,\mathbf{k})|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{q_1\cdots q_K=n}|B'(n,\mathbf{l})|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)$$

Le terme d'erreur se borne comme dans la démonstration des bornes (4.10) et (4.11). On a

$$\sum_{p_1\cdots p_K=n}|B'(n,\mathbf{k})|^2\leq K!\Big(\sum_{p\leq X}|a_j(p)|^2\Big)^K=O(X^{K+\epsilon})$$

et de même pour l'autre facteur, si bien que la borne devient

$$\Big(\sum_{p_1\cdots p_K=n}|B'(n,\mathbf{k})|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{q_1\cdots q_K=n}|B'(n,\mathbf{l})|^2\Big)^{\frac{1}{2}}=O(X^{\frac{K+L+\epsilon}{2}})=O(T)$$

Si $K\neq L$, alors par unicité de la décomposition en facteurs premiers, aucun n dans l'indice de la somme ne vérifie $n=p_1\cdots p_K=q_1\cdots q_L$. On prend donc dans toute la suite $K=L\geq 1$.

Il suffit pour établir le lemme 6 de montrer que

$$\sum_{\substack{p_1\cdots p_K=n\\ q_1\cdots q_L=n}} \frac{B'(n,\mathbf{k})\overline{B'(n,\mathbf{l})}}{n} = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{l}}\mathbf{k}!\prod_{j=1}^{N}(n_j\log(\log(X)))^{k_j} + O((\log(\log(X)))^{\frac{1}{2}(K+L)-\frac{1}{2}})$$

$$= \delta_{\mathbf{k},\mathbf{l}}\mathbf{k}!\prod_{j=1}^{N}(n_j\log(\log(X)))^{k_j} + O((\log(\log(X)))^{K-\frac{1}{2}})$$

Nous procédons par récurrence sur K.

Si $K=1$, on a

$$\sum \frac{B'(n,\mathbf{k})\overline{B'(n,\mathbf{l})}}{n} = \sum_p \frac{b_j(p)\overline{b_k(p)}}{p}$$

$$= \sum_{p\leq X}\frac{c_j(p)\overline{c_k(p)}}{p}v(e^{\frac{\log(n)}{\log(X)}})$$

$$= e^{i(\omega_j-\omega_k)}\sum_{p\leq X}\frac{a_j(p)\overline{a_k(p)}}{p}v(e^{\frac{\log(n)}{\log(X)}})$$

Montrons donc que

$$e^{i(\omega_j-\omega_k)}\sum_{p\leq X}\frac{a_j(p)\overline{a_k(p)}}{p}v(e^{\frac{\log(n)}{\log(X)}}) = \delta_{j,k}n_j\log\log X + O(1)$$

En écrivant $S(t)=\sum_{p\leq t}\frac{a_j(p)\overline{a_k(p)}}{p}$, on obtient par sommation par partie

$$\sum_{p\leq X}\frac{a_j(p)\overline{a_k(p)}}{p}v(e^{\frac{\log(n)}{\log(X)}}) = S(X)v(e) + \int_1^X S(t)\frac{1}{\log X}t^{\frac{1}{\log X}-1}u(t^{\frac{1}{\log X}})dt$$

$$= 0 + \int_1^e S(x^{\log X})u(x)dx$$

$$= \int_1^e \delta_{j,k}n_j\log\log(x^{\log X})u(x)dx + \int_1^e O(1)u(x)dx$$

$$= \int_1^e \delta_{j,k}n_j(\log\log X + \log\log x)u(x)dx + O(1)$$

$$= \delta_{j,k}n_j\log\log X\int_1^e u(x)dx + O(1)$$

$$= \delta_{j,k}n_j\log\log X + O(1)$$

ce qui montre bien l'identité dans le cas $K=1$.

Montrons donc l'hérédité.

Commençons par considérer la contribution à

$$\sum_{\substack{p_1\cdots p_K=n\\ q_1\cdots q_L=n}} \frac{B'(n,\mathbf{k})\overline{B'(n,\mathbf{l})}}{n}$$

venant des n qui admettent un carré dans leur décomposition en facteurs premiers. En notant $W(p)=\max_j |c_j(p)|$, on a $b_j(p)\leq W(p)$.

L'inégalité arithmético-géométrique donne alors

$$|B'(n,\mathbf{k})\overline{B'(n,\mathbf{l})}| \leq |B'(n,\mathbf{k})|^2+|B'(n,\mathbf{l})|^2$$

et on a alors comme pour (4.14) et (4.15)

$$\sum_n \frac{|B'(n,\mathbf{k})|^2}{n} \leq K!\Big(\sum_p \frac{W(p)^4}{p^2}\Big)\Big(\sum_p \frac{W(p)^2}{p}\Big)^{K-2}$$

Le premier facteur est fini d'après la proposition 2.11. Puisque $W(p)^2\leq 2\sum_{j=1}^N |b_j(p)|^2$, on obtient (de la même manière que pour (4.14))

$$\Big(\sum_p \frac{W(p)^2}{p}\Big)^{K-2} = O((\log(\log(X)))^{K-2}) = O((\log(\log(X)))^{K-\frac{1}{2}})$$

Ainsi la contribution venant des n admettant un diviseur carré est bornée par leterme d'erreur, et il suffit de s'intéresser aux n n'admettant pas de diviseur carré dans la suite.

On note P_K l'ensemble des entiers ayant exactement K facteurs premiers, tous simples. En écrivant alors $\mathbf{p}=(p_1,\cdots,p_K)$ et en remarquant que $\mathbf{q}$ doit contenir les mêmes nombres premiers et que c'est donc une permutation de $\mathbf{p}$, on a

$$\sum_{P_K} \frac{B'(n,\mathbf{k})\overline{B'(n,\mathbf{l})}}{n} = \sum_{\mathbf{p},\mathbf{q}} \frac{b(\mathbf{p},\mathbf{k})\overline{b(\mathbf{q},\mathbf{l})}}{p_1\cdots p_K} \tag{4.17}$$

Soit π une permutation de $\{1;\cdots;K\}$. On note $i=\pi(1)$ et $\mathbf{p}_\pi$ la permutation de $\mathbf{p}$ induite par π. On note j_1 le premier indice tel que $k_{j_1}\neq 0$, et j_1' l'entier tel que $L_{j_1'-1}<i\leq L_{j_1'}$. Alors la somme (4.17) restreinte aux cas où $\pi(1)=i$ avec i fixé, s'écrit

$$\sum_{\pi,\pi(1)=i}\sum_{\mathbf{p}} \frac{b(\mathbf{p},\mathbf{k})\overline{b(\mathbf{q},\mathbf{l})}}{p_1\cdots p_K} = \sum_{p_1} \frac{b_{j_1}(p_1)\overline{b_{j_1'}(p_1)}}{p_1} \sum_{\mathbf{p}',\mathbf{q}'} \frac{b(\mathbf{p}',\mathbf{k}')\overline{b(\mathbf{q}',\mathbf{l}')}}{p_2\cdots p_K} \tag{4.18}$$

où l'on a enlevé p_1 à $\mathbf{p}$, et $\mathbf{q}'$ est la permutation induite par π de $\mathbf{p}'$. $\mathbf{k}'$ s'obtient à partir de $\mathbf{k}$ en enlevant 1 au coefficient d'indice j_1 (et idem avec $\mathbf{l}'$ et j_1'). On a simplement enlevé ici la contribution du tout premier Σ_j', avec celle de sa contrepartie pour la permutation π.

On souhaite désormais que les valeurs $p_2,\cdots,p_K$ puissent également valoir p_1, pour pouvoir factoriser. Grâce à notre remarque sur la contribution des termes admettant un facteur carré, cela peut se faire sans dépasser le terme d'erreur. On obtient alors

$$\sum_{p_1} \frac{b_{j_1}(p_1)\overline{b_{j_1'}(p_1)}}{p_1} \sum_{\mathbf{p}',\mathbf{q}'} \frac{b(\mathbf{p}',\mathbf{k}')\overline{b(\mathbf{q}',\mathbf{l}')}}{p_2\cdots p_K} = \Big(\sum_{p} \frac{b_{j_1}(p)\overline{b_{j_1'}(p)}}{p}\Big)\Big(\sum_{\mathbf{p}',\mathbf{q}'} \frac{b(\mathbf{p}',\mathbf{k}')\overline{b(\mathbf{q}',\mathbf{l}')}}{p_2\cdots p_K}\Big)$$
$$= \Big(\sum_{p} \frac{b_{j_1}(p)\overline{b_{j_1'}(p)}}{p}\Big)\Big(\sum_{P_{K-1}} \frac{B'(n,\mathbf{k}')\overline{B'(n,\mathbf{l}')}}{n}\Big)$$

D'après l'hypothèse de récurrence, et le cas $K = 1$ traité plus haut, on peut réécrire la dernière ligne

$$\big(\delta_{j_1,j_1'} n_{j_1} \log(\log(X)) + O(1)\big)\Big(\delta_{\mathbf{k}',\mathbf{l}'}\mathbf{k}'! \prod_{j=1}^{N} (n_j \log(\log(X)))^{k_j'} + O((\log(\log(X)))^{K-1-\frac{1}{2}})\Big)$$
$$= \delta_{j_1,j_1'} n_{j_1} \log(\log(X))\, \delta_{\mathbf{k}',\mathbf{l}'}\mathbf{k}'! \prod_{j=1}^{N} (n_j \log(\log(X)))^{k_j'} + O((\log(\log(X)))^{K-\frac{1}{2}})$$

Tout cela a été fait à i fixé. Il suffit alors de sommer l'expression obtenue (4.18) sur i pour retrouver notre somme (4.17) (on notera ici que seul j_1' dépend de i) :

$$\sum_{P_K} \frac{B'(n,\mathbf{k})\overline{B'(n,\mathbf{l})}}{n} = \sum_{i=1}^{K} \delta_{j_1,j_1'} n_{j_1} \log(\log(X))\, \delta_{\mathbf{k}',\mathbf{l}'}\mathbf{k}'! \prod_{j=1}^{N} (n_j \log(\log(X)))^{k_j'} + O((\log(\log(X)))^{K-\frac{1}{2}})$$
$$= \sum_{i=1}^{K} \delta_{j_1,j_1'} \delta_{\mathbf{k}',\mathbf{l}'}\mathbf{k}'!\, n_{j_1} \log(\log(X)) \prod_{j=1}^{N} (n_j \log(\log(X)))^{k_j'} + O((\log(\log(X)))^{K-\frac{1}{2}})$$
$$= \sum_{i=1}^{K} \delta_{j_1,j_1'} \delta_{\mathbf{k}',\mathbf{l}'}\mathbf{k}'! \prod_{j=1}^{N} (n_j \log(\log(X)))^{k_j} + O((\log(\log(X)))^{K-\frac{1}{2}})$$

Il reste simplement à montrer que

$$\sum_{i=1}^{K} \delta_{j_1,j_1'} \delta_{\mathbf{k}',\mathbf{l}'}\mathbf{k}'! = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{l}}\mathbf{k}!$$

Pour cela, on commence par remarquer que

$$\delta_{\mathbf{k},\mathbf{l}} = \delta_{j_1,j_1'}\delta_{\mathbf{k}',\mathbf{l}'}$$

Il suffit alors de considérer pour quelles valeurs de i on a $\delta_{j_1,j_1'} = 1$. Par définition (on rappelle que $L_{j_1'-1} < i \leq L_{j_1'}$) il y a $l_{j_1'} = l_{j_1} = k_{j_1}$ telles valeurs. Puisque

$$k_{j_1}\mathbf{k}'! = \mathbf{k}!$$

on a bien l'égalité voulue.

Cela achève la preuve du lemme. □

Nous pouvons à présent montrer le théorème B.

Théorème 4.10 (Théorème B) *Supposons que $L = L_j$ vérifie les conditions 2.1 à 2.4, ainsi que l'hypothèse de Riemann généralisée ou bien la condition plus faible*

$$N(\sigma, T, L) = O(T^{1-a(\sigma-\frac{1}{2})})$$

uniformément pour $\sigma \geq \frac{1}{2}$, avec $a > 0$.

Alors, en notant $n = n_j$, quand $t \to \infty$, les fonctions

$$\frac{\log |L(\frac{1}{2}+it)|}{\sqrt{\pi n \log(\log(t))}}$$

et

$$\frac{\arg L(\frac{1}{2}+it)}{\sqrt{\pi n \log(\log(t))}}$$

tendent vers des variables aléatoires gaussiennes de fonction de densité

$$e^{-\pi u^2}$$

Preuve. On commence par définir les fonctions

$$U_j = (\pi n_j \log(\log(T)))^{-\frac{1}{2}} \Sigma_j$$

ainsi que la mesure de probabilité (on note ici λ la mesure de Lebesgue)

$$\mu_T(\Omega) = \frac{1}{T}\lambda\big(\{x \in [T; 2T] \mid (U_1(x), \cdots, U_N(x)) \in \Omega\}\big)$$

On choisit X de manière à avoir

$$\log(X) = \log(T)(\log(\log(T)))^{-\frac{1}{4}}$$

On a alors $\frac{\log(T)}{\log(X)} = (\log(\log(T)))^{\frac{1}{4}}$, $\log(\log(X)) \sim \log(\log(T))$, et pour tout $\epsilon > 0$ on a $X = O(T^{\epsilon})$.

Le lemme 6 implique alors

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}^N} \prod_{j=1}^{N} z_j^{k_j} \bar{z}_j^{\,l_j} \, d\mu_T(\mathbf{z}) &= \frac{1}{T}\int_T^{2T} U_j^{k_j} \overline{U_j}^{l_j} \, dt \\
&= \frac{1}{T}\prod_{j=1}^{N} (\pi n_j \log(\log(T)))^{-\frac{k_j+l_j}{2}} \int_T^{2T} \prod_{j=1}^{N} (\Sigma_j)^{k_j} (\overline{\Sigma_j})^{l_j} \, dt \\
&= \delta_{\mathbf{k},\mathbf{l}} \mathbf{k}! \pi^{-K} \prod_{j=1}^{N} \Big(\frac{\log(\log(X))}{\log(\log(T))}\Big)^{k_j} + O\left(\Big(\frac{\log(\log(X))}{\log(\log(T))}\Big)^{\frac{K+L}{2}} (\log(\log(X)))^{-\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}$$

et en faisant tendre T vers l'infini, on obtient

$$\lim_{T\to\infty} \int_{\mathbb{C}^N} \prod_{j=1}^{N} z_j^{k_j} \bar{z}_j^{\,l_j} \, d\mu_T(\mathbf{z}) = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{l}} \mathbf{k}! \pi^{-K}$$

Puisqu'on a par ailleurs

$$\int_{\mathbb{C}^N} \prod_{j=1}^{N} z_j^{k_j} \bar{z_j}^{l_j} e^{-\pi|\mathbf{z}|^2} d\lambda(\mathbf{z}) = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{l}} \mathbf{k}! \pi^{-K}$$

un résultat classique de probabilités implique que quand $T \to \infty$ la mesure μ_T converge vers la mesure $e^{-\pi|\mathbf{z}|^2} d\lambda(\mathbf{z})$ sur $\mathbb{C}^N$.

D'autre part, en écrivant $V_j(t) = \log L_j(\frac{1}{2} + it)(\pi n_j \log(\log(t)))^{-\frac{1}{2}}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_T^{2T} |V_j(t) - U_j(t)|\, dt \leq \frac{1}{T} \frac{1}{(\pi n_j \log(\log(T)))^{\frac{1}{2}}} \int_T^{2T} |\log L_j(\frac{1}{2} + it) - \Sigma_j|\, dt \\ + \frac{1}{T}\int_T^{2T} |\log L_j(\frac{1}{2} + it)| |\frac{1}{(\log(\log(T)))^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(\log(\log(t)))^{\frac{1}{2}}}|\, dt\end{aligned}$$

D'après le corollaire du lemme 3, le premier terme vaut $O(\frac{\log(T)}{\log(X)}(\log(\log(T)))^{-\frac{1}{2}}) = O((\log(\log(T)))^{-\frac{1}{4}})$ puisque $\frac{\log(T)}{\log(X)} = (\log(\log(T)))^{\frac{1}{4}}$.

Pour le second terme, il faut d'abord montrer

$$\frac{1}{(\log(\log(T)))^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(\log(\log(2T)))^{\frac{1}{2}}} = O((\log(\log(T)))^{-\frac{3}{4}})$$

Alors on obtiendra grâce au lemme 5

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_T^{2T} |\log L_j(\frac{1}{2} + it)| |\frac{1}{(\log(\log(T)))^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(\log(\log(t)))^{\frac{1}{2}}}|\, dt &\ll (\log(\log(T)))^{-\frac{3}{4}} \frac{1}{T}\int_T^{2T} |\log L_j(\frac{1}{2} + it)|\, dt \\ &\ll (\log(\log(T)))^{-\frac{3}{4}} \frac{1}{T} T\sqrt{\log(\log(T))} \\ &\ll (\log(\log(T)))^{-\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

Cela s'obtient par un calcul direct. On a en effet

$$\begin{aligned}|\frac{1}{(\log(\log(T)))^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(\log(\log(t)))^{\frac{1}{2}}}| &\leq |\frac{1}{(\log(\log(T)))^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(\log(\log(2T)))^{\frac{1}{2}}}| \\ &= \frac{\sqrt{\log(\log(2T))} - \sqrt{\log(\log(T))}}{\sqrt{\log(\log(2T))}\sqrt{\log(\log(T))}} \\ &\leq \frac{1}{\log(\log(T))}(\sqrt{\log(\log(2T))} - \sqrt{\log(\log(T))}) \\ &= \frac{1}{\log(\log(T))} O(1) \\ &= O(\frac{1}{\log(\log(T))})\end{aligned}$$

De cette estimation L^1 on déduit que le vecteur $(V_1, \cdots, V_N)$ a la même distribution (quand $T \to \infty$) que le vecteur $(U_1, \cdots, U_N)$, et a donc la même limite, c'est-à-dire $e^{-\pi|\mathbf{z}|^2}$. Par conséquent chaque V_j tend vers $e^{-\pi|z|^2} = e^{-\pi(x^2+y^2)} = e^{-\pi x^2} e^{\pi y^2}$, et puisque $\log L_j(\frac{1}{2} + it) = \log|L_j(\frac{1}{2} + it)| + i \arg L_j(\frac{1}{2} + it)$, la partie réelle et la partie imaginaire tendent chacune vers des lois de densité $e^{-\pi u^2}$. □

5 Preuve du théorème A

Nous commençons par le résultat suivant.

Lemme 5.1 (Lemme 7) *Supposons que L_j vérifie les hypothèses 2.1 à 2.4 ainsi que soit GRH soit la borne plus faible $N(\sigma, T, L_j) = O(T^{1-a(\sigma-\frac{1}{2})})$, et soit $M \geq 2$ une constante. Alors on a, pour tout $\mu \in [0; M]$, uniformément pour μ et M, et quand $T \to \infty$*

$$\int_T^{2T} \Big| \log |L_j(\frac{1}{2} + it + \frac{i\mu}{\log(T)})| - \log |L_j(\frac{1}{2} + it)| \Big| dt = O(T\sqrt{\log(M)}) \tag{5.1}$$

et

$$\int_T^{2T} \Big| N(t, t + \frac{M}{\log(T)}) - \frac{\Lambda M}{\pi} \Big| dt = O(T\sqrt{\log(M)}) \tag{5.2}$$

Preuve. D'après l'inégalité triangulaire et le corollaire du lemme 3, on a

$$\begin{aligned}\int_T^{2T} \Big| \log L_j(\frac{1}{2} + it + \frac{i\mu}{\log(T)}) - \log L_j(\frac{1}{2} + it) \Big| dt &\leq \int_T^{2T} \Big| \Sigma_j(t + \frac{\mu}{\log(T)}) - \Sigma_j(t) \Big| \, dt + O\Big(T \frac{\log(T)}{\log(X)}\Big) \\ &= \int_T^{2T} \Big| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_j(n)\Lambda_1(n)}{n^{\frac{1}{2}+it}} (1 - e^{-i\mu \frac{\log(n)}{\log(T)}}) v(e^{\frac{\log(n)}{\log(T)}}) \Big| dt + O\Big(T \frac{\log(T)}{\log(X)}\Big)\end{aligned} \tag{5.3}$$

Comme dans la démonstration du lemme 5, l'inégalité de Cauchy puis le lemme 4 donnent

$$\begin{aligned}\Big(\int_T^{2T} \Big| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_j(n)\Lambda_1(n)}{n^{\frac{1}{2}+it}} (1 - e^{-i\mu \frac{\log(n)}{\log(T)}}) v(e^{\frac{\log(n)}{\log(T)}}) \Big| dt \Big)^2 &\leq T \int_T^{2T} \Big| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_j(n)\Lambda_1(n)}{n^{\frac{1}{2}+it}} (1 - e^{-i\mu \frac{\log(n)}{\log(T)}}) v(e^{\frac{\log(n)}{\log(T)}}) \Big|^2 dt \\ &= O(T^2 \sum_{p^r \leq X} \frac{|c_j(p^r)|^2}{p^r} \sin^2(\frac{\mu r \log(p)}{2\log(T)})) + O(T \sum_{p^r \leq X} |c_j(p^r)|^2)\end{aligned}$$

Les propositions 2.10 et 2.12 permettent de borner le premier terme par $O\big(T^2\big(1+\log^+\big(\mu\frac{\log(X)}{2\log(T)}\big)\big)\big)$ (on a pris ici $\mu \in [0; 2\frac{\log(T)}{\log(\log(X))}]$, ce qui est toujours une conséquence de $\mu \leq M$ pour T assez grand). Le second terme se borne en utilisant l'hypothèse 2.2, par $O(TX^{1+\epsilon})$.

On obtient donc

$$\int_T^{2T} \Big| \log L_j(\frac{1}{2}+it+\frac{i\mu}{\log(T)}) - \log L_j(\frac{1}{2}+it) \Big| dt = O\left(T\sqrt{\big(1 + \log^+\big(\mu\frac{\log(X)}{2\log(T)}\big)\big)}\right) + O(T^{\frac{1}{2}} X^{\frac{1+\epsilon}{2}}) + O\Big(T\frac{\log(T)}{\log(X)}\Big)$$

et en prenant $X = T^{\frac{a}{2}}$ (avec $a < 1$) on obtient la borne voulue. On en déduit la première borne du lemme en prenant la partie réelle des $\log L_j$.

En utilisant le même résultat, avec les parties imaginaires plutôt que les parties réelles, on obtient par définition de S_j

$$\int_T^{2T} \Big| S_j(t + \frac{M}{\log(T)}) - S_j(t) \Big| dt = O(T\sqrt{\log(M)})$$

On a d'autre part

$$
\begin{aligned}
N\Big(t, t+\frac{M}{\log(T)}\Big)-\frac{\Lambda M}{\pi} &= N\Big(t+\frac{M}{\log(T)}\Big)-N(t)-\frac{\Lambda M}{\pi} \\
&= \theta\Big(t+\frac{M}{\log(T)}\Big)-\theta(t)+S_j\Big(t+\frac{M}{\log(T)}\Big)-S_j(t)-\frac{\Lambda M}{\pi}
\end{aligned}
$$

où le terme $S_j(t+\frac{M}{\log(T)})-S_j(t)$ est l'intégrande à laquelle on veut se ramener.

Il suffit donc de majorer $\theta\Big(t+\frac{M}{\log(T)}\Big)-\theta(t)-\frac{\Lambda M}{\pi}$. Puisque d'après la formule de Stirling on a

$$
\theta(T)=\frac{1}{\pi}\sum_{h=1}^{m}\int_0^{\lambda_h T+Im(\mu_h)}\log t\,dt+\frac{T}{\pi}\log Q+\sum_{h=1}^{m}\Big(\frac{\lambda_h-1}{4}+\frac{Re(\mu_h)}{2}\Big)+O\Big(\frac{1}{T}\Big)
$$

on peut écrire, en notant $a=Im(\mu_h)$ pour alléger les calculs

$$
\begin{aligned}
&\theta\Big(t+\frac{M}{\log(T)}\Big)-\theta(t)-\frac{\Lambda M}{\pi} \\
&=\frac{1}{\pi}\sum_{h=1}^{m}\int_{\lambda_h t+a}^{\lambda_h(t+\frac{M}{\log T})+a}\log t\,dt-\frac{\Lambda M}{\pi}+\frac{M}{\log T}\frac{\log Q}{\pi}+O\Big(\frac{1}{T}\Big) \\
&=\frac{1}{\pi}\sum_{h=1}^{m}\int_{\lambda_h t+a}^{\lambda_h(t+\frac{M}{\log T})+a}\log t\,dt-\frac{\Lambda M}{\pi}+O\Big(\frac{M}{\log T}\Big) \\
&=\frac{1}{\pi}\sum_{h=1}^{m}\Big(\lambda_h(t+\frac{M}{\log T})+a\Big)\log\Big(\lambda_h(t+\frac{M}{\log T})+a\Big)-\Big(\lambda_h(t+\frac{M}{\log T})+a\Big) \\
&-\Big((\lambda_h t+a)\log(\lambda_h t+a)-(\lambda_h t+a)\Big)-\frac{\Lambda M}{\pi}+O\Big(\frac{M}{\log T}\Big) \\
&=\frac{1}{\pi}\sum_{h=1}^{m}\Big(\lambda_h(t+\frac{M}{\log T})+a\Big)\log\Big(\lambda_h(t+\frac{M}{\log T})+a\Big)-(\lambda_h t+a)\log(\lambda_h t+a)-\frac{\Lambda M}{\pi}+O\Big(\frac{M}{\log T}\Big) \\
&=\frac{1}{\pi}\sum_{h=1}^{m}(\lambda_h t+a)\log\Big(\frac{\lambda_h(t+\frac{M}{\log T})+a}{\lambda_h t+a}\Big)+\lambda_h\frac{M}{\log T}\log\Big(\lambda_h(t+\frac{M}{\log T})+a\Big)-\frac{\Lambda M}{\pi}+O\Big(\frac{M}{\log T}\Big) \\
&=\frac{1}{\pi}\sum_{h=1}^{m}(\lambda_h t+a)\log\Big(1+\frac{\lambda_h M}{(\lambda_h t+a)\log T}\Big)+\lambda_h\frac{M}{\log T}\log\Big(t+\frac{M}{\log T}+\frac{a}{\lambda_h}\Big)-\frac{\Lambda M}{\pi}+O\Big(\frac{M}{\log T}\Big) \\
&=\frac{1}{\pi}\sum_{h=1}^{m}\lambda_h\frac{M}{\log T}\log\Big(t+\frac{M}{\log T}+\frac{a}{\Lambda_h}\Big)-\frac{\Lambda M}{\pi}+O\Big(\frac{M}{\log T}\Big) \\
&=\frac{1}{\pi}\sum_{h=1}^{m}\lambda_h\frac{M}{\log T}\log(T)-\frac{\Lambda M}{\pi}+O\Big(\frac{M}{\log T}\Big) \\
&=O\Big(\frac{M}{\log T}\Big)
\end{aligned}
$$

dont l'intégrale sur $[T;2T]$ est bornée par $O(\frac{TM}{\log(T)})$, ce qui donne bien la seconde borne du lemme puisque $T\to\infty$. $\square$

Pour la suite, on garde la notation

$$\theta(t) = \arg G(\frac{1}{2} + it)$$

et on pose

$$F_j(t) = e^{i\theta(t)} L_j(\frac{1}{2} + it)$$

qui a les mêmes zéros que $L_j(\frac{1}{2} + it)$, et est une fonction réelle. De même, dans cette partie nous nous intéressons aux zéros de

$$F(t) = \sum_{j=1}^{N} b_j F_j(t)$$

On notera également dans la suite $M > 2$ une grande constante, et $\delta \in]0; \frac{1}{4}]$ un petite constante, ainsi que λ la mesure de Lebesgue.

Lemme 5.2 (Lemme 8) *Supposons vérifiées les hypothèses 2.1 à 2.4 ainsi que GRH. Alors il existe un ensemble $E \subset [T; 2T]$ de mesure $O(\delta T)$ tel qu'on a pour tout i et $j \neq i$, et pour $t \in [T; 2T] \setminus E$*

$$|\log |F_i(t)|| \leq \frac{1}{\delta} \sqrt{\log(\log(T))} \tag{5.4}$$

et

$$|\log |F_i(t)| - \log |F_j(t)|| \geq \delta \sqrt{\log(\log(T))} \tag{5.5}$$

Preuve. Par définition, pour $t \in E$, soit (5.4) soit (5.5) n'est pas vérifiée. Notons d'abord $E_1 \subset E$ l'ensemble des $t \in [T; 2T]$ ne vérifiant pas (5.4).

Si $\lambda(E_1)$ n'est pas $O(\delta T)$, alors

$$\forall K > 0\,, \quad \exists T \geq \Delta\,, \quad \int_T^{2T} |\log |F_i(t)||dt \geq \int_{E_1} |\log |F_i(t)||dt \geq KT\sqrt{\log(\log(T))}$$

ce qui contredit le lemme 5. Par conséquent $\lambda(E_1) = O(\delta T)$.

Notons alors $E_{i,j}$ l'ensemble des cas où (5.4) est vérifiée mais pas (5.5). On a

$$E = E_1 \cup \bigcup_{i \neq j} E_{i,j}$$

et il suffit donc de vérifier qu'à $i \neq j$ fixés, $\lambda(E_{i,j}) = O(\delta T)$.

D'après (5.5) il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $t \in E_{i,j}$ on ait

$$\frac{\log |F_i(t)|}{\sqrt{\log(\log(T))}} \in [m\delta; (m+1)\delta]$$

et

$$\frac{\log |F_j(t)|}{\sqrt{\log(\log(T))}} \in [(m-1)\delta; (m+2)\delta]$$

En effet, pour que (5.4) soit vérifiée il suffit de s'assurer que $|(m+a)\delta| \leq \delta^{-1}$ pour $a \in \{-1; 0; 1; 2\}$. Cela implique simplement $|m| + |a| \leq \delta^{-2}$ et puisque $|a| \leq \delta^{-2}$, $|m| \leq 2\delta^{-1}$.

Puisque $\log(\log(t)) \sim \log(\log(T))$ le théorème B s'applique et chacune des fonctions $\frac{\log|F_i(t)|}{\sqrt{\log(\log(T))}}$ tend vers une variable aléatoire de densité

$$\rho_j(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n_j}} e^{\frac{-x^2}{n_j}}\, dx$$

On obtient alors, puisque les variables aléatoires sont indépendantes

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\lambda(E_{i,j}) &\leq \sum_{|m|\leq 2\delta^{-2}} \Big(\int_{m\delta}^{(m+1)\delta} \rho_i(x)\,dx \Big)\Big(\int_{(m-1)\delta}^{(m+2)\delta} \rho_j(x)\,dx \Big) \\
&\leq \max_{|m|\leq 2\delta^{-2}} \Big(\int_{(m-1)\delta}^{(m+2)\delta} \rho_j(x)\,dx \Big)\Big(\sum_{|m|\leq 2\delta^{-2}} \int_{m\delta}^{(m+1)\delta} \rho_i(x)\,dx \Big) \\
&\leq \max_{|m|\leq 2\delta^{-2}} \int_{(m-1)\delta}^{(m+2)\delta} \rho_j(x)\,dx \\
&= O(\delta)
\end{aligned}$$

d'où $\lambda(E_{i,j}) = O(\delta T)$, ce qui achève notre preuve. □

L'essentiel de la preuve du théorème A consiste alors à subdiviser notre intervalle $[T;2T]$ en petits intervalles de longueur $\frac{M}{\log(T)}$, puis de considérer seulement ceux qui vérifient certaines propriétés de régularité, puis de compter certains des zéros sur les subdivisions que nous aurons retenues. En prenant δ en fonction de M, et en faisant tendre M vers l'infini, on verra que les petits intervalles non considérés, ainsi que les zéros non comptabilisés sur les bons intervalles seront d'influence négligeable pour notre estimation de $N_D(f,T,2T)$.

Plus concrètement, on commence par définir $t_n = T + n\frac{M}{\log(T)}$, et nos petits intervalles sont alors les $[t_n;t_{n+1}]$. Pour plus de clarté on peut faire varier M de manière à ce que le dernier intervalle soit également de longueur $\frac{M}{\log(T)}$ (nous verrons que cela ne fait aucune différence dans la preuve). On note alors $\mathcal{N}$ l'ensemble des indices ainsi obtenus. On note pour la suite que $|\mathcal{N}| = M^{-1}T\log(T)$.

Proposition 5.3 *Il existe un sous-ensemble $\mathcal{N}_1$ de $\mathcal{N}$, de cardinal $|\mathcal{N}_1| \geq (1-O(\delta))|\mathcal{N}|$, tel que pour tout $0 \leq j \leq N$ et tout $n \in \mathcal{N}_1$ on ait*

$$(5.6) \qquad \frac{1}{t_{n+1}-t_n}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left| N\left(x, x+(1-\sqrt{\delta})\frac{M}{\log(T)}, L_j\right) - (1-\sqrt{\delta})\frac{\Lambda M}{\pi} \right| dx = O\left(\frac{\sqrt{\log(M)}}{\delta}\right)$$

et

$$(5.7) \qquad \frac{1}{t_{n+1}-t_n}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\frac{1}{M}\int_0^M \left| \log\left| F_j\left(x+\frac{y}{\log(T)}\right)\right| - \log|F_j(x)| \right| dy \right) dx = O\left(\frac{\sqrt{\log(M)}}{\delta}\right)$$

Preuve. En reprenant (5.2) du lemme 7, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\sum_j \int_T^{2T} \left| N(t, t + (1-\sqrt{\delta})\frac{M}{\log(T)}) - (1-\sqrt{\delta})\frac{\Lambda M}{\pi} \right| dt \\
&= \sum_{j,n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left| N(t, t + (1-\sqrt{\delta})\frac{M}{\log(T)}) - (1-\sqrt{\delta})\frac{\Lambda M}{\pi} \right| dt \\
&= O\Big(T\sqrt{\log((1-\sqrt{\delta})M)}\Big) \\
&= O\Big(T\sqrt{\log(M)}\Big) \qquad (5.8)
\end{aligned}
$$

Par conséquent, si à j fixé, on a pour plus de $O(\delta|\mathcal{N}|)$ indices n

$$\frac{1}{t_{n+1}-t_n}\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left| N\left(x, x + (1-\sqrt{\delta})\frac{M}{\log(T)}, L_j\right) - (1-\sqrt{\delta})\frac{\Lambda M}{\pi} \right| dx \neq O\left(\frac{\sqrt{\log(M)}}{\delta}\right)$$

alors il suivra, puisque $\frac{1}{t_{n+1}-t_n} = \frac{\log(T)}{M}$, que pour ces mêmes indices on a

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left| N\left(x, x + (1-\sqrt{\delta})\frac{M}{\log(T)}, L_j\right) - (1-\sqrt{\delta})\frac{\Lambda M}{\pi} \right| dx \neq O\left(\frac{M\sqrt{\log(M)}}{\delta\log(T)}\right)$$

et finalement puisqu'il y a $O(\delta|\mathcal{N}|) = O(\delta M^{-1}T\log(T))$ tels cas,

$$\int_T^{2T} \left| N(t, t + (1-\sqrt{\delta})\frac{M}{\log(T)}) - (1-\sqrt{\delta})\frac{\Lambda M}{\pi} \right| dt \neq O\Big(T\sqrt{\log(M)}\Big)$$

ce qui contredit directement (5.8).

L'autre borne de la proposition s'établit exactement de la même manière, en utilisant (5.1) plutôt que (5.2), et en notant que

$$
\begin{aligned}
&\int_T^{2T} \left(\frac{1}{M}\int_0^M \left| \log\left| F_j\left(x + \frac{y}{\log(T)}\right)\right| - \log|F_j(x)| \right| dy \right) dx \\
&= \frac{1}{M}\int_0^M \int_T^{2T} \left| \log\left| F_j\left(x + \frac{y}{\log(T)}\right)\right| - \log|F_j(x)| \right| dx\, dy \\
&\ll \frac{1}{M}\int_0^M T\sqrt{\log(M)} dy \\
&\ll T\sqrt{\log(M)}
\end{aligned}
$$

□

On peut à présent établir le lemme suivant.

Lemme 5.4 (Lemme 9) *Soit $n \in \mathcal{N}_1$. Il existe un ensemble $S_n \subset [t_n; t_{n+1}]$ de mesure $\lambda(S_n) \geq (1 - O(\delta))\frac{M}{\log(T)}$, tel que pour tout $x \in S_n$ et $0 \leq j \leq N$ on ait*

$$N\Big(x, x+(1-\sqrt{\delta})\frac{M}{\log(T)}, L_j\Big) = (1-\sqrt{\delta})\frac{\Lambda M}{\pi} + O\Bigg(\frac{\sqrt{\log(M)}}{\delta^2}\Bigg) \tag{5.9}$$

ainsi que

$$\frac{1}{M}\int_0^M \Big|\log\Big|F_j\Big(x+\frac{y}{\log(T)}\Big)\Big| - \log|F_j(x)|\Big|dy = O\Big(\frac{\sqrt{\log(M)}}{\delta^2}\Big) \tag{5.10}$$

Preuve. Notre preuve est similaire à celle de la proposition précédente : si le complémentaire de S_n n'est pas de mesure $O(\delta\frac{M}{\log(T)})$, alors les bornes (5.6) et (5.7) ne sont plus vérifiées. $\square$

Il convient à présent de restreindre encore un peu l'ensemble des indices admissibles $\mathcal{N}_1$, comme suit.

On dit que l'indice n est bon si $n \in \mathcal{N}_1$ et s'il existe $t_n^* \in S_n$ tel que $t_n^* \in [t_n; t_n + \sqrt{\delta}\frac{M}{\log(T)}]$ et $t_n^* \notin E$. Sinon on dit que l'indice est mauvais.

Estimons le cardinal de l'ensemble $\mathcal{N}_2$ des bons indices.

Si n est mauvais, $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_1$ ou $n \in \mathcal{N}_1$ et $[t_n; t_n + \sqrt{\delta}\frac{M}{\log(T)}] \cap S_n \subset E$. Dans le premier cas d'après la proposition il y a $O(\delta\mathcal{N})$ indices.

Dans le second cas notre borne est moins directe. Au plus, l'ensemble E ne couvre que des intersections $[t_n; t_n+\sqrt{\delta}\frac{M}{\log(T)}] \cap S_n$. Il suffit donc de minorer leur mesure (puis de diviser la mesure de E par ce minorant) pour obtenir une borne sur le nombre d'indices.

On a

$$\lambda\Big([t_n; t_n+\sqrt{\delta}\frac{M}{\log(T)}] \cap S_n\Big) \geq (\sqrt{\delta} - O(\delta))\frac{M}{\log(T)} \geq \sqrt{\delta}\frac{M}{\log(T)}(1-O(\sqrt{\delta})) \geq C\sqrt{\delta}\frac{M}{\log(T)}$$

où $C > 0$ se déduit de la constante implicite ainsi que de $\delta \leq \frac{1}{4}$.

D'après la borne pour $\lambda(E)$ obtenue au lemme 8, le nombre d'indices dans le second cas est donc borné par

$$\frac{\log(T)}{CM\sqrt{\delta}}\lambda(E) \leq O(\sqrt{\delta}M^{-1}T\log(T)) = O(\sqrt{\delta}|\mathcal{N}|)$$

Cela montre que $|\mathcal{N}_2| \geq (1-O(\sqrt{\delta}))|\mathcal{N}|$

Lemme 5.5 (Lemme 10) *Soit $n \in \mathcal{N}_2$. Il existe un sous-ensemble $Y_n \subset [0; M]$ de mesure*

$$\lambda(Y_n) \geq M\Big(1 - O\Big(\frac{\sqrt{\log(M)}}{\delta^2(\log(\log(T)))^{\frac{1}{4}}}\Big)\Big) \tag{5.11}$$

tel que pour tout $y \in Y_n$ et $0 \leq j \leq N$, on ait

$$\log\Big|F_j(t_n^* + \frac{y}{\log(T)})\Big| = \log|F_j(t_n^*)| + O((\log(\log(T)))^{\frac{1}{4}}) \tag{5.12}$$

Preuve. On applique (5.10) en $x = t_n^*$ et le reste de la preuve est exactement la même chose que pour le lemme 9 et la proposition 5.3. $\square$

Nous sommes à présent en mesure de montrer le théorème A.

Théorème 5.6 (Théorème A)

$$N_D(T, 2T, f) \geq (1 + o(1))\frac{\Lambda}{\pi} T \log(T)$$

Preuve. Nous allons d'abord commencer par examiner les oscillations des fonctions F_j sur les intervalles d'indice bon, puis nous donnerons un minorant du nombre de zéros dans un tel intervalle.

Soit $n \in \mathcal{N}_2$ un bon indice. On définit l'intervalle

$$I_n = [t_n^*; t_n^* + (1 - \sqrt{\delta})\frac{M}{\log(T)}]$$

Par définition de t_n^*, on a $I_n \subset [t_n; t_{n+1}]$, ce qui implique que ces intervalles sont disjoints. On définit également j_n l'indice pour lequel

$$\log |F_{j_n}(t_n^*)| = \max_j \log |F_j(t_n^*)|$$

D'après (5.5) du lemme 8, et puisque $t_n^* \notin E$, on a pour $j \neq j_n$

$$\log |F_j(t_n^*)| \leq \log |F_{j_n}(t_n^*)| - \delta\sqrt{\log(\log(T))}$$

Enfin, (5.12) donne alors pour $j \neq j_n$ et $y \in Y_n$

$$\log \left|F_j(t_n^* + \frac{y}{\log(T)})\right| \leq \log \left|F_{j_n}(t_n^* + \frac{y}{\log(T)})\right| - \delta\sqrt{\log(\log(T))} + O((\log(\log(T)))^{\frac{1}{4}}) \tag{5.13}$$

On note $z_{k_1}, \cdots, z_{k_n}$ les zéros de F_{j_n} dans I_n (avec éventuellement des répétitions dans le cas de zéros multiples). D'après l'hypothèse de Riemann généralisée, tous les zéros de $G(s)L_j(s)$ sont sur la droite critique, et par conséquent N compte ceux de F_{j_n} (ceci est le seul moment où on utilise l'hypothèse de Riemann généralisée). On a donc d'après (5.9)

$$k_n = (1 - \sqrt{\delta})\frac{\Lambda M}{\pi} + O\left(\frac{\sqrt{\log(M)}}{\delta^2}\right) \tag{5.14}$$

On notera le signe de F_{j_n} s'inverse entre deux zéros successifs (on peut définir le signe entre diverses occurences d'un zéro multiple pour satisfaire à cette règle).

En pratique, on ne pourra observer un changement de signe qu'à la proximité d'un zéro de multiplicité impaire (ce qui justifie la réécriture de notre théorème A à la section 3), et si les intervalles en question sont assez grands pour qu'on puisse y appliquer (5.13). Le terme F_{j_n} sera de plus gros module, et dominera sur les autres termes dans l'expression de f et imposera donc son signe. Cette méthode nous permet donc de compter certains des changements de signe de F.

Concrètement, on note z_κ et $z_{\kappa+1}$ deux zéros consécutifs, et $Z_\kappa = [z_\kappa; z_{\kappa+1}]$ Si l'intervalle est assez long, c'est-à-dire

$$\lambda(Z_\kappa) > C\frac{M\sqrt{\log(M)}}{\delta^2 \log(T)(\log(\log(T)))^{\frac{1}{4}}} \tag{5.15}$$

(en notant $C > 0$ la constante implicite de (5.11)), le lemme 10 implique qu'il existe

$$t_n^* + \frac{y}{\log(T)} = \xi_\kappa \in Z_\kappa$$

avec $y \in Y_n$. On dit alors que l'intervalle est large. Dans les cas contraires (i.e. ξ_κ n'existe pas), on dit que l'intervalle est étroit.

Pour un intervalle large, (5.13) s'écrit

$$\log |F_j(\xi_\kappa)| \leq \log |F_{j_n}(\xi_\kappa)| - \delta\sqrt{\log(\log(T))} + O((\log(\log(T)))^{\frac{1}{4}})$$

ce qui donne

$$F(\xi_\kappa) = \sum_{i=1}^{N} b_j F_j(\xi_\kappa) = b_{j_n} F_{j_n}(\xi_\kappa)\Big(1 + O\big(e^{-\frac{\delta}{2}\sqrt{\log(\log(T))}}\big)\Big) \tag{5.16}$$

ce qui implique que F et F_{j_n} ont le même signe en ξ_κ (au signe du coefficient b_{j_n} près) dès que T est assez grand.

Soit κ un indice tel que Z_κ et $Z_{\kappa+1}$ sont tous les deux larges. Puisque $F(\xi_\kappa)$ et $F(\xi_{\kappa+1})$ sont de signes opposés, F a au moins un zéro de multiplicité impaire dans $[\xi_\kappa; \xi_{\kappa+1}]$.

Le nombre de tels κ est au moins de $k_n - 2 - 2g$ (où g désigne le nombre d'intervalles étroits). En effet, pour qu'un intervalle large soit neutralisé, il doit être entouré d'intervalles étroits. Un argument de comptage montre qu'il y a $k_n - g$ intervalles larges, et chacun d'entre eux peut etre neutralisé par un intervalle étroit ou par le fait d'être sur une extrémité.

D'après l'expression explicite (5.14) de k_n on obtient alors que le nombre de zéros de F sur I_n est au moins

$$N_D(I_n, F) \geq (1 - \sqrt{\delta})\frac{\Lambda M}{\pi} + O\left(\frac{\sqrt{\log(M)}}{\delta^2}\right) - 2g \tag{5.17}$$

Puisqu'il y a en tout $|\mathcal{N}_2|$ bons indices, on obtient encore

$$N_D(T, 2T, F) \geq |\mathcal{N}_2|\frac{\Lambda M}{\pi}\Big(1 - \sqrt{\delta} + O\Big(\frac{\sqrt{\log(M)}}{M\delta^2}\Big)\Big) - 2\sum_{j=1}^{N} K_j \tag{5.18}$$

où l'on a noté K_j le nombre de zéros de L_j qui ne satisfont pas (5.15), c'est-à-dire des zéros de partie imaginaire γ tels que (en notant γ' la partie imaginaire du successeur de γ)

$$\gamma' - \gamma \leq C\frac{M\sqrt{\log(M)}}{\delta^2 \log(T)(\log(\log(T)))^{\frac{1}{4}}}$$

En utilisant $|\mathcal{N}_2| \geq (1 - O(\sqrt{\delta}))|\mathcal{N}| = (1 - O(\sqrt{\delta}))M^{-1}T\log(T)$, on réécrit (5.18)

$$N_D(T, 2T, F) \geq \frac{\Lambda}{\pi}T\log(T)\Big(1 - \sqrt{\delta} + O\Big(\frac{\sqrt{\log(M)}}{M\delta^2}\Big)\Big) - 2\sum_{j=1}^{N} K_j$$

On écrit alors $\delta = M^{-\frac{2}{5}}(\log(M))^{\frac{1}{5}}$, et on obtient finalement

$$N_D(T, 2T, F) \geq \frac{\Lambda}{\pi} T \log(T)(1 - O(M^{-\frac{1}{5}}(\log(M))^{\frac{1}{10}})) - 2\sum_{j=1}^{N} K_j \tag{5.19}$$

Quand M est fixé, l'hypothèse H_0 permet de majorer $\sum_{j=1}^{N} K_j = o(T\log(T))$, puisque $\epsilon = C\frac{M\sqrt{\log(M)}}{\delta^2(\log(\log(T)))^{\frac{1}{4}}}$ tend vers 0 quand T tend vers l'infini (ceci est le seul moment où l'on utilise H_0).
On obtient alors bien l'expression du théorème A en faisant tendre M vers l'infini. $\square$

References

[1] Bombieri and Hejhal, *On the distribution of zeros of linear combinations of Euler products* Duke Mathematical Journal, December 1995

[2] Harold Davenport, *Multiplicative Number Theory*, Springer, 1967.