
Exercice 1. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Exercice 2. Trouver un polynôme $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(-1) = -5$, $P(2) = 4$, et $P(5) = 31$.

Exercice 3. Soit $a, b \geq 0$ tels que $a+b = 1$, et soit $x, y \in \mathbb{R}_+$. On souhaite montrer l'identité

$$1 + x^a y^b \leq (1+x)^a (1+y)^b \quad (1)$$

Soit $f(u) = \ln(1 + e^u)$.

1. Montrer que f est convexe.

2. Montrer l'identité (1). On pourra commencer par calculer $f(\ln(x))$.

Exercice 4. On se propose de déterminer une approximation de $\sqrt{2}$ avec la méthode de Newton. Pour cela on prend $f(x) = x^2 - 2$, et $x_0 = 3/2$.

1. Montrer que $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$.

2. Vers quelle valeur la suite (x_n) converge-t-elle ? Calculer les 3 premiers termes.

Exercice 5. 1. Calculer

$$\int_0^1 x \ln(x) dx$$

2. Calculer

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} x \cos(x^2 + 1) dx.$$

On pourra utiliser le changement de variable $u = x^2 + 1$.