M1 ACC Analyse réelle et complexe, automne 2024 Exercices # 2
Martin Scotti

Exercice 1 (2 points). *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^2$.*

1. *Calculer les coefficients de Fourier a_n, b_n et c_n de f.*
2. *En évaluant la série de Fourier de f en 0, en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.*
3. *En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.*
4. *Calculer la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$. On pourra utiliser l'identité de Parseval.*

Exercice 2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x$.*

1. *Calculer les coefficients de Fourier c_n de f.*
2. *En utilisant l'identité de Parseval, déterminer la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.*

Exercice 3 (2 points). *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = e^{-x}$*

1. *Calculer les coefficients de Fourier $c_n(f)$.*
2. *En déterminant la valeur de la série de Fourier de f en 0 puis en π, calculer la valeur de*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$