
Exercice 1. Soit $f(x) = e^{-a|x|}$. Calculer la transformée de Fourier de f . En déduire la transformée de Fourier de $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Exercice 2. Soit $f = (1 - |x|) \cdot \mathbb{1}_{[-1;1]}$. Calculer la transformée de Fourier de f .
En déduire la valeur de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos(2\pi x))^2}{x^4} dx.$$

Exercice 3. (2 points) Soit $f(x) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$, et

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi x} \sin(2\pi x) & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Calculer la transformée de Fourier de f . En déduire la transformée de Fourier de $g(x)$.
2. Calculer $f \star f$.
3. Déterminer la transformée de Fourier de $f \star f$.
4. Calculer

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx.$$

Exercice 4. On pose

$$I_n = \int_0^{\infty} t^n \exp(-t) dt.$$

Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $I_n = n \cdot I_{n-1}$.

En calculant I_0 , en déduire la valeur de I_n .