

Exercice 1. Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées de taille n . Déterminer la différentielle du déterminant $\det$ en la matrice identité I_n .

Exercice 2. Déterminer les jacobiniennes des fonctions suivantes :

•

$$f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1^2 + 4x_2, x_1x_2x_3^2)$$

•

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x_1, x_2) \mapsto (\exp(x_2 - 4x_1), \sin(x_1^2), 5 - \cos(x_2))$$

•

$$f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_1}\right)$$

Exercice 3. Parmi les fonctions suivantes dire lesquelles sont holomorphes sur leur ensemble de définition.

$$f(z) = \bar{z} + z, \quad g(z) = \frac{1}{1 + z^3}, \quad k(z) = \Re(z), \quad h(z) = (\cos(z))^3$$

où $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ et $\Re(z)$ désigne la partie réelle de z .

Exercice 4. Déterminer le rayon de convergence des fonctions analytiques suivantes :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^n, \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(n) z^n, \quad h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n z^n$$

Exercice 5. Soit $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ deux séries entières, de rayons de convergence R_1 et R_2 respectivement. Montrer que le rayon de convergence R de $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ vérifie

$$R \geq R_1 R_2.$$

Donner un exemple où l'égalité est atteinte, et un exemple où l'égalité n'est pas atteinte.