Principaux théorèmes d'intégration

Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré.

Théorème (***Théorème de convergence monotone***)

a) *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite **croissante** de fonctions mesurables **positives** sur E. On a :*

$$\lim_{n\to\infty}\!\uparrow \int f_n \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty}\!\uparrow f_n \, d\mu.$$

b) *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables **positives**. On a :*

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int f \, d\mu.$$

Théorème (***Théorème de convergence dominée (de Lebesgue)***)

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{C}$, et f une fonction mesurable de E dans $\mathbb{C}$. On suppose que :

- ***(limite)** pour μ-presque tout $x \in E$, $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$;*
- ***(domination)** il existe une fonction $\varphi : E \to \mathbb{R}_+$ mesurable telle que $\int \varphi \, d\mu < \infty$ et*

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ pour } \mu\text{-presque tout } x \in E, \qquad \big|f_n(x)\big| \leq \varphi(x).$$

On a alors : f est intégrable, de même que f_n pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int \big|f_n - f\big| d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{et} \qquad \int f_n \, d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f \, d\mu.$$

Théorème (***Théorème de continuité sous l'intégrale***)

Soit $f : (t,x) \mapsto f(t,x)$ une fonction de $I \times E$ dans $\mathbb{C}$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$). On suppose que :

- ***(mesurabilité)** pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(t,x)$ est mesurable ;*
- ***(continuité)** pour μ-presque tout $x \in E$, $t \mapsto f(t,x)$ est continue sur I ;*
- ***(domination)** il existe une fonction $\varphi : E \to \mathbb{R}_+$ mesurable telle que $\int \varphi \, d\mu < \infty$ et*

$$\text{pour tout } t \in I, \text{ pour } \mu\text{-presque tout } x \in E, \qquad \big|f(t,x)\big| \leq \varphi(x).$$

Alors la fonction

$$F : t \mapsto F(t) = \int f(t,x) \, d\mu(x)$$

est bien définie pour tout $t \in I$, et est continue sur I.

Théorème (***Théorème de dérivation sous l'intégrale***)

Soit $f : (t,x) \mapsto f(t,x)$ une fonction de $I \times E$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que :

- ***(existence de F)** pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(t,x)$ est intégrable ;*
- ***(dérivabilité)** pour μ-presque tout $x \in E$, $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable sur I, de dérivée notée $\frac{\partial f}{\partial t}$;*
- ***(domination de la dérivée)** il existe une fonction $\varphi : E \to \mathbb{R}_+$ mesurable telle que $\int \varphi \, d\mu < \infty$ et*

$$\text{pour tout } t \in I, \text{ pour } \mu\text{-presque tout } x \in E, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq \varphi(x).$$

Alors la fonction

$$F : t \mapsto F(t) = \int f(t,x) \, d\mu(x)$$

est dérivable sur I et, pour tout $t \in I$,

$$F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) \, d\mu(x).$$

Théorème (***Théorème d'holomorphie sous l'intégrale***)

Soit $f : (z,x) \mapsto f(z,x)$ une fonction de $U \times E$ dans $\mathbb{C}$, où U est un ouvert de $\mathbb{C}$. On suppose que :

— ***(mesurabilité)*** *pour tout $z \in U$, $x \mapsto f(z,x)$ est mesurable ;*

— ***(holomorphie)*** *pour μ-presque tout $x \in E$, $z \mapsto f(z,x)$ est holomorphe sur U, de dérivée notée $\frac{\partial f}{\partial z}$;*

— ***(domination de f !)*** *il existe une fonction $\varphi : E \to \mathbb{R}_+$ mesurable telle que $\int \varphi \, d\mu < \infty$ et*

$$\text{pour tout } z \in U, \text{ pour } \mu\text{-presque tout } x \in E, \qquad |f(z,x)| \leq \varphi(x).$$

Alors la fonction

$$F : z \mapsto F(z) = \int f(z,x) \; d\mu(x)$$

est holomorphe sur U, et, pour tout $z \in U$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial z}(z,x)$ est intégrable et

$$F'(z) = \int \frac{\partial f}{\partial z}(z,x) \; d\mu(x).$$

Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ et $(F,\mathcal{B},\nu)$ deux espaces mesurés.

Théorème (***Théorème de Fubini-Tonelli***)

*Pour toute fonction mesurable **positive** f sur $E \times F$,*

$$\int_{E\times F} f(x,y) \, d(\mu \otimes \nu)(x,y) = \int_E \left(\int_F f(x,y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_F \left(\int_E f(x,y) d\mu(x) \right) d\nu(y). \qquad (*)$$

Théorème (***Théorème de Fubini-Lebesgue***)

Pour toute fonction mesurable $f : E \times F \to \mathbb{C}$, telle que

$$\int_{E\times F} \big|f(x,y)\big| \, d(\mu \otimes \nu)(x,y) < \infty,$$

la suite d'égalités $(*)$ reste vraie.

NB. Par le théorème de Fubini-Tonelli, la condition équivaut à

$$\int_E \left(\int_F \big|f(x,y)\big| d\nu(y) \right) d\mu(x) < \infty \qquad \text{ou} \qquad \int_F \left(\int_E \big|f(x,y)\big| d\mu(x) \right) d\nu(y) < \infty.$$

Théorème (***Théorème de changement de variable dans $\mathbb{R}^d$***)

Soit U,D des ouverts de $\mathbb{R}^d$. Soit $f : D \to \mathbb{C}$ mesurable, et $\varphi : U \to D$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

a) Si f est positive, alors

$$\int_D f(x) \, dx = \int_U f\big(\varphi(u)\big) \big|J_\varphi(u)\big| \, du$$

et

$$\int_U f\big(\varphi(u)\big) \, du = \int_D f(x) \big|J_{\varphi^{-1}}(x)\big| \, dx.$$

b) Si f est intégrable sur D, la première égalité précédente a un sens (autrement dit, $u \mapsto f(\varphi(u))|J_\varphi(u)|$ est intégrable sur U) et est vraie. Si $f \circ \varphi$ est intégrable sur U, alors il en est de même de la deuxième.