Cours rapide sur les chaînes de Markov

1 Définition

Définition

Soit E un ensemble dénombrable (ou fini). Une suite $X=(X_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires à valeurs dans E est une **chaîne de Markov** *si, pour tout $n\geq 0$, pour tous $x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}\in E$,*

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=x_{n+1}\,|\,X_0=x_0,\ldots,X_n=x_n)=\mathbb{P}(X_{n+1}=x_{n+1}\,|\,X_n=x),$$

dès lors que $\mathbb{P}(X_0=x_0,\ldots,X_n=x_n)>0$.
*E est l'***espace d'états** *de X. La* **loi initiale** *de X est la loi de X_0, c'est-à-dire la famille $(\mathbb{P}(X_0=x))_{x\in E}$.*
Cette chaîne de Markov est **homogène** *(dans le temps) s'il existe $(x,y)\mapsto P(x,y)$ sur $E\times E$ telle que : pour tout $n\geq 0$, pour tous $x,y\in E$,*

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=y\,|\,X_n=x)=P(x,y),$$

dès lors que $\mathbb{P}(X_n=x)>0$. P est la **matrice de transition** *de X.*

Ainsi, $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov si, en tout « temps » n, connaître la position « présente » X_n renseigne tout autant sur la **loi** de la position « future » X_{n+1} que de connaître tout le « passé » $X_0,\ldots,X_n$. Autrement dit, sachant X_n, la variable aléatoire X_{n+1} devient indépendante de $X_0,\ldots,X_{n-1}$.

On peut montrer que ceci revient aussi à dire que X_0 suit une certaine loi, puis que la suite $(X_n)_n$ est définie par une récurrence de la forme $X_{n+1}=f_n(X_n,U_n)$ où la variable aléatoire U_n est indépendante de $X_0,\ldots,X_n$. Le cas d'une chaîne homogène est celui où la transition est la même à chaque étape : les fonctions f_n, $n\geq 0$, sont égales à une même fonction f, et les variables U_n, $n\geq 0$, ont toutes la même loi. C'est donc un analogue aléatoire des suites récurrentes d'ordre 1.

Dans la suite, **les chaînes de Markov seront toujours supposées homogènes**.

La loi d'une chaîne de Markov homogène est entièrement donnée par sa loi initiale et sa matrice de transition :

Lemme

Si $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov de loi initiale μ et de matrice de transition P alors, pour tout $n\geq 0$, pour tous $x_0,\ldots,x_n\in E$,

$$\mathbb{P}(X_0=x_0,\ldots,X_n=x_n)=\mu(x_0)P(x_0,x_1)\cdots P(x_{n-1},x_n).$$

Remarquons que la matrice P est **stochastique** : ses coefficients sont positifs, et la somme de chaque ligne vaut 1. Inversement, à l'aide du lemme, on peut définir la loi d'une chaîne de Markov à partir de tout choix d'une loi μ sur E et d'une matrice stochastique P sur $E\times E$.

On aura constamment besoin de considérer des chaînes de Markov ayant la même matrice de transition P mais différentes lois initiales. Pour cela, on peut toujours considérer la même variable aléatoire $(X_n)_{n\geq 0}$ sur un espace $(\Omega,\mathcal{A})$ donné, par exemple l'application identité de $\Omega=E^{\mathbb{N}}$ (appelée *variable canonique*), et faire varier la probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω. Si la matrice P est spécifiée dans le contexte, on notera ainsi $\mathbb{P}_\mu$ une probabilité sous laquelle $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov de loi initiale μ et de matrice de transition P.

Ici, μ est une probabilité sur E, que l'on voit comme une famille $\mu=(\mu(x))_{x\in E}$. Pour tout $x\in E$, on a ainsi

$$\mathbb{P}_\mu(X_0=x)=\mu(x).$$

Dans le cas où $\mu=\delta_z$, c'est-à-dire que $X_0=z$ p.s., on notera $\mathbb{P}_z$ au lieu de $\mathbb{P}_{\delta_z}$. Sous $\mathbb{P}_z$, X est une chaîne de Markov dite **issue de** z :

$$\mathbb{P}_z(X_0=z)=1.$$

Par la définition, pour tous $x,y\in E$, comme $\mathbb{P}_x(X_0=x)=1$,

$$\mathbb{P}_x(X_1=y)=\mathbb{P}_x(X_1=y\,|\,X_0=x)=P(x,y).$$

et, pour toute loi initiale μ et tout $y \in E$,

$$\mathbb{P}_\mu(X_1 = y) = \sum_{x\in E} \mathbb{P}_\mu(X_0 = x, X_1 = y) = \sum_{x\in E,\ \mu(x)>0} \mu(x)\mathbb{P}_\mu(X_1 = y \,|\, X_0 = x) = \sum_{x\in E} \mu(x)P(x,y).$$

Plus généralement, pour toute loi μ sur E, pour tous $x,y \in E$, pour tout n, de même,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\mu(X_{n+1} = y) &= \sum_{x\in E} \mathbb{P}_\mu(X_n = x, X_{n+1} = y)\\ &= \sum_{\substack{x\in E \text{ tel que}\\ \mathbb{P}_\mu(X_n=x)>0}} \mathbb{P}_\mu(X_n = x)\mathbb{P}_\mu(X_{n+1} = y \,|\, X_n = x)\\ &= \sum_{x\in E} \mathbb{P}_\mu(X_n = x)P(x,y).\end{aligned}$$

Notons, pour $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n(x) = \mathbb{P}_\mu(X_n = x)$, c'est-à-dire que μ_n est la loi de X_n sous $\mathbb{P}_\mu$. On a donc $\mu_0 = \mu$, et la formule précédente s'écrit, en voyant les mesures sur E comme des vecteurs-lignes, et P comme une matrice (éventuellement infinie),

$$\mu_{n+1} = \mu_n P.$$

On a donc $\boxed{\mu_n = \mu P^n}$. En particulier (si $\mu = \delta_x$), la ligne x de P^n donne la loi de X_n sous $\mathbb{P}_x$: pour tous x,y,

$$\boxed{\mathbb{P}_x(X_n = y) = P^n(x,y)}$$

Définition

*Le **graphe** d'une chaîne de Markov X d'espace d'états E et de matrice de transition P est le graphe orienté dont les sommets sont les états et les arêtes sont les couples (x,y) tels que $P(x,y) > 0$.*

Le graphe de X représente donc les transitions possibles en 1 pas.

Propriété de Markov

La propriété suivante généralise la définition en exprimant que, sachant la position présente X_n, le futur $(X_n,X_{n+1},\dots)$ est indépendant du passé $(X_0,\dots,X_n)$ et suit la loi $\mathbb{P}_{X_n}$.

Proposition (*Propriété de Markov faible au temps n*)

Pour tout n, pour tous $x_0,\dots,x_n \in E$ (tels que $\mathbb{P}(X_0 = x_0,\dots,X_n = x_n) > 0$),

$$\text{sachant } X_0 = x_0,\dots,X_n = x_n, \qquad (X_{n+k})_{k\geq 0} \text{ suit la loi } \mathbb{P}_{x_n}.$$

Autrement dit, quelle que soit la loi initiale μ,
– pour tout $U \subset E^n$, et tout $V \subset E^{\mathbb{N}}$ mesurable, pour tout $x \in E$,

$$\mathbb{P}_\mu\big((X_n,X_{n+1},\dots) \in V \,\big|\, (X_0,\dots,X_n) \in U, X_n = x\big) = \mathbb{P}_x((X_0,X_1,\dots) \in V)$$

– pour toutes fonctions $f : E^n \to \mathbb{R}$ et $g : E^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ mesurables bornées,

$$\mathbb{E}_\mu[f(X_0,\dots,X_n)g(X_n,X_{n+1},\dots)] = \mathbb{E}_\mu\big[f(X_0,\dots,X_n)\mathbb{E}_{X_n}[g(X_0,X_1,\dots)]\big].$$

Cette propriété s'étend aux temps aléatoires qui « ne dépendent pas du futur » :

Définition

*Un **temps d'arrêt** de $(X_n)_n$ est une variable aléatoire τ à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ telle que, pour tout n,*

$$\{\tau = n\} \in \sigma(X_0,\dots,X_n).$$

On rappelle que $\sigma(X_0,\dots,X_n)$ est la tribu engendrée par $X_0,\dots,X_n$: c'est l'ensemble des événements qui ne dépendent que de $X_0,\dots,X_n$. τ est donc un temps d'arrêt si, pour tout n, on peut savoir si $\tau = n$ à partir de la seule connaissance de $X_0,\dots,X_n$. Si on découvre $X_0,X_1,\dots$ l'un après l'autre, on peut donc s'« arrêter » à X_τ.

Les temps d'arrêt les plus courants sont les temps d'atteinte : si $A \subset E$, le temps d'atteinte de A est

$$\tau_A = \inf\{n \geq 0 \,|\, X_n \in A\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Proposition ***(Propriété de Markov forte au temps τ)***

Pour tout temps d'arrêt τ, pour tout n, pour tous $x_0,\ldots,x_n \in E$,

$$\text{sachant } \tau = n \text{ et } X_0 = x_0,\ldots,X_n = x_n, \qquad (X_{\tau+k})_{k\geq 0} \text{ suit la loi } \mathbb{P}_{x_n}.$$

Autrement dit, quelle que soit la loi initiale μ,
– pour tout $U \subset E^n$, et tout $V \subset E^{\mathbb{N}}$ mesurable, pour tout $x \in E$,

$$\mathbb{P}_\mu\big((X_\tau,X_{\tau+1},\ldots) \in V \,\big|\, \tau = n, (X_0,\ldots,X_n) \in U, X_n = x\big) = \mathbb{P}_x((X_0,X_1,\ldots) \in V)$$

– pour toutes fonctions $f : E^n \to \mathbb{R}$ et $g : E^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ mesurables bornées,

$$\mathbb{E}_\mu[\mathbf{1}_{\{\tau=n\}} f(X_0,\ldots,X_n) g(X_n,X_{n+1},\ldots)] = \mathbb{E}_\mu\big[\mathbf{1}_{\{\tau=n\}} f(X_0,\ldots,X_n)\mathbb{E}_{X_\tau}[g(X_0,X_1,\ldots)]\big].$$

Vu que $\{\tau = n\}$ dépend de $X_0,\ldots,X_n$, cette proposition est en fait un cas particulier de la précédente.

Autre formulation des propriétés de Markov. On peut aussi introduire les tribus

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_0,\ldots,X_n), \qquad \mathcal{F}^n = \sigma(X_n,X_{n+1},\ldots),$$

$$\mathcal{F}_\tau = \text{“}\sigma(X_0,\ldots,X_\tau)\text{”} = \{A \in \mathcal{A} \,|\, \text{pour tout } n,\ A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n\},$$
$$\mathcal{F}^\tau = \text{“}\sigma(X_\tau,X_{\tau+1},\ldots)\text{”} = \{A \in \mathcal{A} \,|\, \text{pour tout } n,\ A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}^n\},$$

et les opérateurs de **décalage** (ou **shift**) $\theta_n : \Omega \to \Omega$ où $n \in \mathbb{N}$, tels que $X_k \circ \theta_n = X_{k+n}$, pour réécrire les propriétés de Markov précédentes sous la forme :
– pour tout $A \in \mathcal{F}_n$ et tout $B \in \mathcal{F}^n$, pour tout $x \in E$,

$$\mathbb{P}_\mu\big(B \,\big|\, A \cap \{X_n = x\}\big) = \mathbb{P}_x(B)$$

– pour toutes variables aléatoires Y et Z bornées, telles que Y est $\mathcal{F}_n$-mesurable et Z est $\mathcal{F}^0$-mesurable,

$$\mathbb{E}_\mu[Y \cdot (Z \circ \theta_n)] = \mathbb{E}_\mu\big[Y \mathbb{E}_{X_n}[Z]\big]$$

NB. Z est de la forme $Z = g(X_0,X_1,\ldots)$, et on a alors $Z \circ \theta_n = g(X_n,X_{n+1},\ldots)$.
– pour tout $A \in \mathcal{F}_\tau$ et tout $B \in \mathcal{F}^\tau$, pour tout $x \in E$,

$$\mathbb{P}_\mu\big(B \,\big|\, A \cap \{\tau < \infty, X_\tau = x\}\big) = \mathbb{P}_x(B)$$

– pour toutes variables aléatoires Y et Z bornées, telles que Y est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable et Z est $\mathcal{F}^0$-mesurable,

$$\mathbb{E}_\mu[\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}} Y \cdot (Z \circ \theta_\tau)] = \mathbb{E}_\mu\big[\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}} Y \mathbb{E}_{X_\tau}[Z]\big].$$

Avec la notion d'espérance conditionnelle, on écrira aussi : pour toute v.a. Z $\mathcal{F}^0$-mesurable,

$$\mathbb{E}_\mu[Z \circ \theta_n \,|\, \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}_{X_n}[Z] \quad \text{et} \quad \mathbb{E}_\mu[\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}} Z \circ \theta_\tau \,|\, \mathcal{F}_\tau] = \mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}} \mathbb{E}_{X_\tau}[Z]$$

2 Récurrence et transience

On s'intéresse aux états où se trouve la chaîne de Markov après un temps long : en particulier, quels états ne seront plus visités après un certain temps, et quels états seront au contraire revisités perpétuellement ?

Définition

Soit $x \in E$. On note τ_x le temps de retour en x :

$$\tau_x = \inf\{n \geq 1 \,|\, X_n = x\} \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}.$$

*L'état $x \in E$ est **récurrent** si $\mathbb{P}_x(\tau_x < \infty) = 1$, et **transient** sinon.*

Ainsi, x est récurrent si, partant de x, X revient presque sûrement en x. Par la propriété de Markov forte au temps τ_x, si un retour est presque sûr, alors un second retour sera presque sûr, etc. :

Proposition

Soit $x \in E$. On note N_x le nombre de visites en x :

$$N_x = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n = x\}}.$$

a) x est récurrent si, et seulement si $\mathbb{P}_x(N_x = \infty) = 1$.
Plus généralement, s'il existe $y \in E$ tel que $\mathbb{P}_y(N_x = \infty) > 0$, alors x est récurrent.

b) Si x est transient alors, sous $\mathbb{P}_x$, N_x suit la loi géométrique de paramètre $\mathbb{P}_x(\tau_x = \infty)$.

Par b) on note que, si x est transient alors $\mathbb{E}_x[N_x] < \infty$. Ainsi, x est récurrent si, et seulement si $\mathbb{E}_x[N_x] = \infty$, c'est-à-dire si

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_x(X_n = x) = \infty.$$

2.1 Classification des états

Définition

Pour $x,y \in E$, on note $x \to y$ s'il existe $n \geq 0$ tel que $P^n(x,y) > 0$.
*Deux états $x,y \in E$ **communiquent** si $x \to y$ et $y \to x$. On note alors $x \leftrightarrow y$.*
*$\leftrightarrow$ est une relation d'équivalence dont les classes sont appelées les **classes de communication** de la chaîne de Markov.*
*Une classe de communication $\mathcal{C}$ est **fermée** si, pour tout $x \in \mathcal{C}$, il n'y a pas de $y \notin \mathcal{C}$ tel que $x \to y$.*
*S'il y a une seule classe de communication $\mathcal{C} = E$, la chaîne de Markov est dite **irréductible**.*

Sur le graphe de la chaîne de Markov, $x \leftrightarrow y$ s'il y a un chemin (d'une certaine longueur) de x vers y, et un chemin de y vers x. Une classe est fermée si aucune transition n'en sort.

Proposition

*a) Si x est récurrent et $x \to y$, alors y est récurrent. Par suite, les éléments d'une classe sont tous récurrents, ou tous transients. On parle de **classe récurrente** ou de **classe transiente**.*

b) Si x est récurrent et $x \to y$, alors $y \to x$. Par suite, si une classe n'est pas fermée, elle est transiente.

c) Une classe fermée et finie est récurrente.

Démonstration : (Intuition) a) Si x est récurrent alors, partant de x, x est visité infiniment souvent ; dès lors, s'il est possible, depuis x, de suivre un chemin pour visiter y (avec probabilité $P^n(x,y) > 0$), alors ceci va se produire lors d'une infinité de retours en x : y sera visité infiniment souvent, donc y est récurrent.

b) De plus, pour que x puisse être visité infiniment souvent, il doit être possible de revenir en x après la première visite à y, donc $y \to x$.

c) Partant de x appartenant à une classe fermée finie $\mathcal{C}$, la chaîne de Markov passe tout son temps dans l'ensemble fini $\mathcal{C}$, donc il existe $y \in \mathcal{C}$ qui est visité infiniment souvent (avec probabilité > 0). Cet état y est alors récurrent. ■

Cette proposition permet de déterminer la nature (récurrent ou transient) de tous les états d'une chaîne de Markov *finie* : les classes fermées sont récurrentes, et les autres transientes. En particulier, une chaîne de Markov irréductible sur un espace fini est récurrente.

En revanche, une classe fermée infinie peut être transiente ou récurrente : cela va dépendre plus finement de la matrice P (la classification précédente ne dépend que de la position des coefficients non nuls de P).

Notons que si un état x est transient, alors il est visité un nombre fini de fois (quel que soit l'état initial), tandis que s'il est récurrent, alors il est visité une infinité de fois ou aucune selon que la chaîne de Markov atteigne sa classe de communication ou non.

2.2 Probabilités d'absorption

Dans le cas où il y a plusieurs classes fermées se pose la question de savoir dans quelle classe la chaîne de Markov va ultimement être « bloquée ».

Définition

> *Soit $\mathcal{C}$ une classe fermée (pour la chaîne de Markov X). On note $\tau_{\mathcal{C}}$ son temps d'atteinte :*
>
> $$\tau_{\mathcal{C}} = \inf\{n \geq 0 \,|\, X_n \in \mathcal{C}\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$
>
> *Pour tout état $x \in E$, la* ***probabilité d'absorption par $\mathcal{C}$ partant de*** *x est*
>
> $$q_{\mathcal{C}}(x) = \mathbb{P}_x(\tau_{\mathcal{C}} < \infty).$$

On a évidemment $q_{\mathcal{C}}(x) = 1$ si $x \in \mathcal{C}$ et $q_{\mathcal{C}}(x) = 0$ si x appartient à une classe fermée différente de $\mathcal{C}$.

Et si x appartient à une classe non fermée, alors sous $\mathbb{P}_x$, $\tau_{\mathcal{C}} = 1 + \tau_{\mathcal{C}} \circ \theta_1$ donc $\tau_{\mathcal{C}} < \infty$ si, et seulement si $\tau_{\mathcal{C}} \circ \theta_1 < \infty$ (pour atteindre $\mathcal{C}$ depuis x il faut l'atteindre à partir de la position X_1). Par la propriété de Markov au temps 1, ceci donne :

$$q_{\mathcal{C}}(x) = \mathbb{P}_x(\tau_{\mathcal{C}} \circ \theta_1 < \infty) = \sum_{y \in E} \mathbb{P}_x(X_1 = y, \tau_{\mathcal{C}} \circ \theta_1 < \infty) = \sum_{y \in E} \mathbb{P}_x(X_1 = y)\mathbb{P}_y(\tau_{\mathcal{C}} < \infty),$$

ce qui se ramène, si $\mathcal{T}$ est la réunion des classes non fermées (rappel : ce sont donc des état transients), à

$$q_{\mathcal{C}}(x) = \sum_{y \in \mathcal{T}} P(x,y) q_{\mathcal{C}}(y) + \sum_{y \in \mathcal{C}} P(x,y).$$

Ces équations, d'inconnues $q_{\mathcal{C}}(x)$ pour $x \in \mathcal{T}$, définissent un système linéaire dont on peut montrer, si $\mathcal{T}$ est fini, qu'il admet une unique solution : on a donc une méthode pratique de calcul des probabilités d'absorption.

NB. Si $\mathcal{T}$ est fini, comme chaque état transient est visité un nombre fini de fois, la chaîne de Markov atteint p.s. un état hors de $\mathcal{T}$ en temps fini. Par conséquent, dans ce cas, pour tout $x \in E$,

$$\sum_{\mathcal{C} \text{ non fermée}} q_{\mathcal{C}}(x) = 1.$$

En revanche, si $\mathcal{T}$ est infini, il se peut que X passe un temps fini dans chaque état de $\mathcal{T}$ mais néanmoins reste indéfiniment dans $\mathcal{T}$. *Exemple caricatural : sur $\mathbb{N}$, P donnée par $P(0,0) = 1$ et $P(n,n+1) = 1$ pour $n \geq 1$.*

3 Mesures invariantes

Dans toute cette partie, on supposera a priori la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ irréductible. Dans le cas général, on pourra néanmoins appliquer les théorèmes suivants à la chaîne de Markov *restreinte* à une classe fermée et en déduire alors des résultats sur certaines chaînes de Markov non irréductibles.

Ayons en tête le cas récurrent : chaque état est visité infiniment souvent. Les définitions suivantes sont surtout pertinentes dans ce cas-ci.

Tandis que la question de la récurrence ou la transience ont trait au comportement asymptotique de $(X_n)_n$ de façon qualitative (est-ce que X visite tel état infiniment souvent ?), on s'intéresse maintenant à des questions plus quantitatives, à savoir :

– Combien de temps la suite $(X_n)_n$ passe-t-elle dans les divers états ? (en proportion, pendant un temps $n \to \infty$)
– Combien de temps faut-il à la suite $(X_n)_n$ pour revenir à son point de départ ? (en espérance)
– La loi de X_n admet-elle une limite quand n est grand ? Peut-on espérer une propriété de « mélange », à savoir que la loi de X_n ne dépend presque plus de celle de X_0 et s'approche d'un équilibre ?

Pour tout n, on note $\mu_n = \big(\mathbb{P}(X_n = x)\big)_{x\in E}$ la loi de X_n (on considérera μ_n comme un vecteur-ligne). On a vu que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu_{n+1} = \mu_n P.$$

Ainsi, si $\mu_n \to \mu$ (et si la multiplication par P est continue), μ doit vérifier $\mu = \mu P$.

Définition

Une mesure μ sur E est **invariante** *(pour P) si $\mu = \mu P$, c'est-à-dire :*

$$\text{pour tout } y \in E, \qquad \mu(y) = \sum_{x\in E} \mu(x)P(x,y).$$

On parle de **loi invariante** *si de plus μ est une probabilité ($\mu(E) = 1$).*
(On dit aussi **loi/probabilité invariante/stationnaire***)*

Vu la relation $\mu_{n+1} = \mu_n P$, on constate de suite que, si μ est une loi invariante et $X_0 \sim \mu$, alors $X_n \sim \mu$ pour tout n. En revanche, si μ n'est pas une probabilité, alors μP n'a pas d'interprétation probabiliste.

3.1 Existence et « unicité » des mesures invariantes

On va voir qu'une chaîne de Markov **récurrente** admet toujours une mesure invariante (non nulle), et celle-ci sera unique à un facteur près dès lors que la chaîne de Markov est irréductible. En particulier, une chaîne de Markov finie irréductible admet toujours une mesure invariante, unique à un facteur près.

Cas fini. Dans le cas fini, la relation $\mu = \mu P$ signifie que μ est un vecteur propre *à gauche* de P pour la valeur propre 1, ou encore que ${}^t\mu$ est un vecteur propre (à droite) de ${}^tP$. Vu que 1 est valeur propre de P (la somme des lignes vaut 1), on sait que 1 est valeur propre de ${}^tP$, donc il existe $\mu \neq 0$ tel que $\mu P = \mu$. Il faut voir que l'on peut choisir μ à coefficients positifs ; et l'unicité revient à dire que 1 est une valeur propre simple.

On peut donner une preuve élémentaire mais c'est aussi une conséquence d'un important théorème plus général :

Théorème (*de Perron-Frobenius*)

Soit A une matrice carrée de taille N à coefficients positifs. On suppose A irréductible : pour tous i,j, il existe $n \geq 0$ tel que $(A^n)_{i,j} > 0$.
Alors le rayon spectral de A, $\rho = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$, est une valeur propre simple de A, et admet un vecteur propre (non nul) à composantes positives.

Cas général. On peut donner un argument probabiliste, qui donne une expression des mesures invariantes :

Proposition

Si X est récurrente irréductible, alors il existe une mesure invariante (non nulle), unique à un facteur près. Explicitement, si on se donne $x_0 \in E$, la mesure m_{x_0} définie par

$$m_{x_0}(x) = \mathbb{E}_{x_0}\left[\sum_{n=0}^{\tau_{x_0}-1} \mathbf{1}_{\{X_n=x\}}\right] \qquad (\diamondsuit)$$

où τ_{x_0} est le temps de retour en x_0, est l'unique mesure invariante m telle que $m(x_0) = 1$.

En toutes lettres, $m_{x_0}(x)$ est, pour la chaîne de Markov issue de x_0, le nombre moyen de visites à x avant de retourner en x_0.

NB. Il est possible pour une chaîne de Markov transiente d'avoir des mesures invariantes non nulles. Par exemple, la mesure $\mu = \mathbf{1}$ pour la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^3$.

3.2 Mesures réversibles

Définition

*Une mesure μ sur E est **réversible** (pour P) si, pour tous $x,y \in E$,*

$$\mu(x)P(x,y) = \mu(y)P(y,x).$$

La première remarque est qu'une telle mesure est invariante : pour tout $y \in E$,

$$(\mu P)(y) = \sum_{x\in E} \mu(x)P(x,y) = \sum_{x\in E} P(y,x)\mu(x) = \mu(x).$$

Cependant, la plupart des mesures invariantes ne sont pas réversibles.

Un intérêt pour les mesures réversibles vient du fait qu'elles sont plus faciles à trouver (si elles existent) que les mesures invariantes : le système ci-dessus se résout immédiatement (si on fixe $\mu(x)$, on déduit $\mu(y)$ pour tout y tel que $P(x,y) > 0$, etc., et il faut juste vérifier que ceci ne mène pas à des incohérences) Il peut donc être bénéfique de commencer par chercher d'éventuelles mesures réversibles.

L'intérêt principal est cependant théorique : on montre que, si X_0 suit la loi réversible (donc stationnaire), alors la suite $(X_0,X_1,\ldots,X_n)$ a même loi que la suite $(X_n,X_{n-1},\ldots,X_0)$, ce qui justifie l'appellation. Une chaîne de Markov réversible a même loi, sous la probabilité stationnaire, lorsque l'on retourne le temps. Des parallèles avec l'étude des réseaux électriques existent pour les chaînes de Markov réversibles, et une grande quantité de résultats, souvent d'inspiration physique, leur sont spécifiques.

3.3 Récurrence positive

La formule explicite ($\diamondsuit$) pour les mesures invariantes a un intérêt fondamental. Pour commencer, on note que sa masse totale est : (échange entre espérance et série justifié car v.a. positives)

$$m_{x_0}(E) = \sum_{x\in E} m_{x_0}(x) = \mathbb{E}_{x_0}\Bigg[\sum_{n<\tau_{x_0}}\sum_{x\in E}\mathbf{1}_{\{X_n=x\}}\Bigg] = \mathbb{E}_{x_0}\Bigg[\sum_{n<\tau_{x_0}} 1\Bigg] = \mathbb{E}_{x_0}[\tau_{x_0}].$$

Définition

*Un état $x \in E$ est **récurrent positif** si $\mathbb{E}_x[\tau_x] < \infty$. Notons que cela implique que x est récurrent.*
*Si un état est récurrent et n'est pas récurrent positif, il est dit **récurrent nul**.*

Par la remarque précédente, si un état x_0 est récurrent positif, la mesure invariante m_{x_0} est finie (c'est-à-dire de masse totale finie), et vice-versa ; en particulier, en divisant m_{x_0} par cette masse totale $\mathbb{E}_{x_0}[\tau_{x_0}]$, on obtient une **loi invariante** π, unique lorsque la mesure invariante est unique à un facteur près. Et $\pi(x_0) = \frac{1}{\mathbb{E}_{x_0}[\tau_{x_0}]}$.

On en déduit la seconde partie de ce qui suit.

Proposition

- *Si x est récurrent positif et $x \leftrightarrow y$, alors y aussi. La récurrence positive est donc une propriété des classes. Pour P irréductible, on dit que P est **récurrente positive** si un état (ou tous) est récurrent positif.*
- *Si P est irréductible, P est récurrente positive si, et seulement s'il existe une loi invariante π. Et, dans ce cas, pour tout état x,*

$$\pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x[\tau_x]}.$$

Dans le cas où E est fini, la masse totale d'une mesure invariante est toujours finie. Par suite :

Corollaire

Toute chaîne de Markov irréductible sur un espace d'états fini est récurrente positive.

4 Théorèmes limites

4.1 Comportement presque sûr : théorème ergodique

On considère le temps passé en un état donné au cours d'une longue trajectoire de la chaîne de Markov.

Le théorème ergodique énonce que, si la chaîne de Markov est récurrente positive, alors elle passe une proportion strictement positive de son temps dans chaque état, et cette proportion est donnée par sa loi invariante. Si elle est récurrente nulle, alors elle passe en chaque point une proportion de son temps qui converge vers zéro.

Ceci se comprend via la formule $\pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x[\tau_x]}$: entre deux visites en x, il se passe un temps moyen $\mathbb{E}_x[\tau_x]$, donc sur une durée n, on peut s'attendre à ce que X passe un temps de l'ordre de $\frac{n}{\mathbb{E}_x[\tau_x]} = n\pi(x)$ en x (par la loi des grands nombres).

Théorème (***Théorème ergodique, dans le cas récurrent positif***)

On suppose la chaîne de Markov irréductible et récurrente positive, de probabilité invariante π.
Pour tout état x, pour toute loi initiale μ,

$$\mathbb{P}_\mu\text{-p.s.,} \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k=x\}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi(x).$$

Plus généralement, pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}$ intégrable par rapport à π, pour toute loi initiale μ,

$$\mathbb{P}_\mu\text{-p.s.,} \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_E f d\pi = \sum_{x\in E} f(x)\pi(x).$$

Ce théorème s'applique donc notamment, on le rappelle, aux chaînes de Markov finies irréductibles.

La version dans le cas récurrent nul est nettement moins utile que la précédente. La voici néanmoins :

Théorème (***Théorème ergodique, dans le cas récurrent nul***)

On suppose la chaîne de Markov irréductible et récurrente nulle, ayant une mesure invariante λ.
Pour tout état x, pour toute loi initiale μ,

$$\mathbb{P}_\mu\text{-p.s.,} \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{\{X_k=x\}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour toutes fonctions f,$g : E \to \mathbb{R}$ bornées, telles que $\int_E g d\lambda \neq 0$, pour toute loi initiale μ,

$$\mathbb{P}_\mu\text{-p.s.,} \qquad \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)}{\sum_{k=0}^{n-1} g(X_k)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\int_E f d\lambda}{\int_E g d\lambda} = \frac{\sum_{x\in E} f(x)\lambda(x)}{\sum_{x\in E} g(x)\lambda(x)}.$$

Par exemple, la proportion de temps passé en x tend vers 0, mais le rapport entre le temps passé en x et le temps passé en y converge vers $\frac{\lambda(x)}{\lambda(y)}$ (prendre $f = \mathbf{1}_{\{x\}}$ et $g = \mathbf{1}_{\{y\}}$).

4.2 Convergence en loi

À partir du théorème ergodique dans le cas récurrent positif, le théorème de convergence dominée permet de déduire (en prenant l'espérance) :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}_\mu(X_k = x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi(x).$$

Ainsi, la suite de terme général $\mathbb{P}_\mu(X_n = x)$ (autrement dit, la loi de X_n) converge en moyenne de Cesàro vers $\pi(x)$ dès que la chaîne de Markov est irréductible et récurrente positive.

Cependant, ceci ne suffit pas à ce que $\mathbb{P}_\mu(X_n = x)$ converge vers $\pi(x)$. Voici un contre-exemple typique : la chaîne de Markov sur $\{0,1\}$, de matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $\mathbb{P}_0(X_n = 0) = 0$ si n est pair et 1 si n est impair, et on vérifie immédiatement que $\pi = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ est la loi invariante. La chaîne de Markov alterne entre les deux états, donc la fréquence d'occupation de chacun converge bien sûr vers 1/2 (c'est ce que dit le théorème ergodique). Néanmoins, la probabilité d'être dans un état donné au temps n ne converge pas.

Pour un exemple moins artificiel, il suffit de considérer l'urne d'Ehrenfest, où se pose exactement le même problème : la parité de X_n change à chaque pas donc la suite de terme général $\mathbb{P}_0(X_n = x)$ ne peut pas converger. Comme on le voit, un obstacle tient à une notion de **périodicité** ; c'est en fait le seul.

Définition

*La **période** d'un état $x \in E$ est*

$$d(x) = \text{pgcd}(\{n \geq 1 \,|\, P^n(x,x) > 0\}).$$

*Si $d(x) = 1$, x est dit **apériodique**.*

C'est donc le pgcd des longueurs des chemins depuis x vers x (dans le graphe associé à la chaîne de Markov). On trouve dans l'exemple précédent et l'urne d'Ehrenfest (et les marches aléatoires simples) que $d(x) = 2$ pour tout état x.

Notons que si $P(x,x) > 0$, alors immédiatement $d(x) = 1$.

Proposition

Si $x \leftrightarrow y$, alors $d(x) = d(y)$: la période est la même pour tous les états d'une même classe.

Pour une chaîne de Markov irréductible, on pourra donc parler sans ambiguïté de sa période, et de chaîne **apériodique** si, pour un état x (et donc pour tous), $d(x) = 1$.

Théorème

On suppose que la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est irréductible, récurrente positive et apériodique. Alors, pour toute loi initiale μ, pour tout état x,

$$\mathbb{P}_\mu(X_n = x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi(x),$$

où π est l'unique loi invariante. Autrement dit, la loi de X_n converge vers la loi invariante. En particulier, pour tous $x,y \in E$,

$$P^n(x,y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi(y),$$

donc P^n converge vers une matrice dont les lignes sont toutes égales au vecteur-ligne π.
Plus généralement, pour toute loi initiale μ, pour toute fonction bornée $f : E \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}_\mu[f(X_n)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f d\pi = \sum_{x\in E} f(x)\pi(x).$$

Démonstration : Admis (et la preuve est même officiellement hors-programme). ∎