Exercices de probabilités

Memento

Fonctions associées aux lois

Pour une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$,
- Fonction de répartition (si $d=1$) : $F_X(t)=\mathbb{P}(X\le t)$, $t\in\mathbb{R}$
- Fonction génératrice (si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$) : $G_X(s)=\mathbb{E}[s^X]=\sum_{n=0}^\infty \mathbb{P}(X=n)s^n$, $s\in|-R,R|$
- Transformée de Laplace : $\mathcal{L}_X(\lambda)=\mathbb{E}[e^{-\langle\lambda,X\rangle}]\in]0,+\infty]$, $\lambda\in\mathbb{R}^d$
- Fonction caractéristique : $\Phi_X(t)=\mathbb{E}[e^{i\langle t,X\rangle}]\in\mathbb{C}$, $t\in\mathbb{R}^d$

Lois discrètes classiques

Nom	Paramètres	Support	Définition : $\mathbb{P}(A)=\sum_{a\in A}p(a)$
Loi de Dirac δ_a	$a\in\mathbb{R}$	$\{a\}$	$p(a)=1$
Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	$p\in[0,1]$	$\{0,1\}$	$p(0)=1-p$, $p(1)=p$
Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$	$n\in\mathbb{N}$, $p\in[0,1]$	$\{0,\ldots,n\}$	$p(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$
Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$	$p\in]0,1]$	$\mathbb{N}^*$	$p(k)=(1-p)^{k-1}p$
Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\lambda\in]0,+\infty[$	$\mathbb{N}$	$p(k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

Lois continues classiques

Nom	Paramètres	Support	Définition : $\mathbb{P}(A)=\int_A f(x)dx$
Loi uniforme $\mathcal{U}([a,b])$	$a<b$	$[a,b]$	$f(x)=\frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}(x)$
Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	$\lambda\in]0,\infty[$	$]0,+\infty[$	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)$
Loi de Cauchy	$a\in]0,+\infty[$	$\mathbb{R}$	$f(x)=\frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$
Loi normale/gaussienne $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$m\in\mathbb{R}$, $\sigma^2\in]0,+\infty[$	$\mathbb{R}$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$

Exercice 1 – *Modélisation.* Pour chacune des situations suivantes, donner un modèle et définir la variable ou l'événement cité :
1. On lance deux pièces de monnaie. On s'intéresse au fait que les pièces tombent sur des côtés différents.
2. On lance un dé à six faces, puis autant de pièces de monnaie qu'indique le résultat du dé. On note X le nombre de pièces lancées qui sont tombées sur Pile.
3. On lance une pièce jusqu'à ce qu'elle tombe sur pile. On note N le nombre de lancers réalisés.
4. Soit $1\le k\le n$ des entiers. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On enlève k boules au hasard sans remise. On considère la somme S des numéros tirés.
5. On dispose de n tickets numérotés de 1 à n, que l'on place au hasard dans n enveloppes numérotées de 1 à n, à raison d'un ticket par enveloppe. On note N le nombre de tickets qui ont le même numéro que l'enveloppe où ils ont été placés.
6. (Paradoxe de Bertrand) On choisit au hasard une corde d'un cercle. On s'intéresse au fait que sa longueur excède celle du triangle équilatéral inscrit dans le cercle.
7. Un individu a un nombre aléatoire d'enfants (positif ou nul), qui à leur tour ont des enfants, et ainsi de suite. On s'intéresse à l'éventualité que la descendance de cet individu s'éteigne.

Exercice 2 – *Espaces de probabilité.* En probabilités, on précise rarement l'espace $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ utilisé, car ce choix n'a pas d'importance tant que les variables aléatoires considérées ont la loi voulue. Cependant, il faut tout de même savoir justifier l'*existence* d'un tel espace. De plus, ce choix est parfois important pour *coupler* des variables aléatoires.
1. Soit μ une probabilité sur $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Donner de la façon la plus simple possible un espace de probabilité et une variable aléatoire aléatoire X sur celui-ci tels que X suit la loi μ.
2. Soit μ une probabilité sur $(\mathbb{R}^m,\mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ et ν une probabilité sur $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Donner un espace de probabilité et des variables aléatoires X et Y sur celui-ci tels que X et Y sont indépendantes et de lois respectives μ et ν.
3. Soit $0\le p_X\le p_Y\le 1$. Donner un espace de probabilité et des variables aléatoires X et Y sur celui-ci tels que X et Y suivent les lois de Bernoulli de paramètre p_X et p_Y respectivement, et tels que $X\le Y$.
4. Donner un espace de probabilité et une famille croissante $(X_p)_{p\in[0,1]}$ de variables aléatoires tels que, pour tout $p\in[0,1]$, X_p suit la loi $\mathcal{B}(p)$. *Indication : prendre* $\Omega=[0,1]$, *muni de la mesure de Lebesgue*

Exercice 3 – ***Linéarité de l'espérance et théorème de Fubini.***
1. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que

$$\mathbb{E}[N] = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(N \geq n).$$

(Écrire $N = \sum_{k=1}^{N} 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{k\leq N\}}$ et utiliser le théorème de convergence monotone)
2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et $\alpha > 0$. Montrer que

$$\mathbb{E}[X^\alpha] = \alpha \int_0^\infty t^{\alpha-1}\mathbb{P}(X > t)dt$$

(Écrire $X^\alpha = \int_0^X \alpha t^{\alpha-1}dt$ et utiliser le théorème de Fubini-Tonelli). Expliciter le cas particulier important $\alpha = 1$.
3. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements. On note N le nombre (aléatoire) d'événéments parmi ceux-ci qui se produisent. Montrer que, si

$$\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty,$$

alors presque-sûrement $N < \infty$. *C'est le lemme de Borel-Cantelli.*
(S'inspirer de la preuve de la question 1)

Exercice 4 – ***Quelques exemples de calculs.***
1. On lance une pièce et un dé. On note $X(\in \{0,1\})$ le résultat de la pièce, et $Y(\in \{1,\ldots,6\})$ celui du dé. Calculer la loi de $S = X + Y$ et son espérance.
2. Soit X, Y des variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$.
2.a) Déterminer la loi de $X + Y$.
2.b) Donner une expression pour $\mathbb{P}(X = Y)$ sous forme de série.
3. Soit X, Y des variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme dans $[0, 1]$.
3.a) Calculer $\mathbb{P}(X < Y)$, $\mathbb{P}(\max(X, Y) < t)$ (pour $t \in \mathbb{R}$), $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[\max(X, Y)]$, $\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{\{X<Y\}}]$ et $\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{\{X>Y\}}]$.
3.b) Quelle est la loi de $Z = \max(X, Y)$?
4. On choisit un point au hasard uniformément dans le disque de centre O et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$. On note R sa distance au centre et $\Theta \in [0, 2\pi[$ son argument par rapport à un axe $[Ox)$ donné.
4.a) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(R \leq r)$ pour tout réel r, puis en déduire la densité de R et son espérance.
4.b) Déterminer la loi des variables aléatoires $X = R^2$ et $Y = X^2$.
4.c) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(\Theta \in [a, b])$ pour tous $0 < a < b < 2\pi$ et en déduire la loi de Θ.
4.d) Pour toute fonction mesurable positive g, montrer que

$$\mathbb{E}[g(R,\Theta)] = \int_0^{2\pi}\int_0^1 g(r,\theta)\frac{r}{\pi}dr\,d\theta,$$

en déduire que R et Θ sont indépendantes et retrouver leurs lois.
5. Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme dans $[0, 1]$. On note $S_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
5.a) Déterminer la loi de S_2.
5.b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, 1]$, montrer que

$$\mathbb{P}(S_n \leq t) = \int_0^t \mathbb{P}(S_{n-1} \leq t - u)du.$$

5.c) En déduire la valeur de $\mathbb{P}(S_n \leq t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1]$.
5.d) On note $N = \max\{n \geq 1 \,|\, X_1 + \cdots + X_n < 1\}$. Calculer $\mathbb{P}(N \geq n)$ et en déduire $\mathbb{E}[N]$.

Exercice 5 – ***Minimum et maximum d'une famille de variables aléatoires exponentielles.*** Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{E}(\lambda)$ et $\mathcal{E}(\mu)$. À l'aide de fonctions de répartition, déterminer les lois de $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$. On précisera leur densité (le cas échéant).

Exercice 6 – ***Somme de variables aléatoires.***
1. Soit X, Y des variables aléatoires indépendantes de lois $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$. Déterminer la loi de $X + Y$, directement puis via les fonctions génératrices.
2. Soit X, Y des variables aléatoires indépendantes de loi de Cauchy de paramètre a et b. À l'aide des fonctions caractéristiques, déterminer la loi de $X + Y$. *Pour obtenir Φ_X, on pourra utiliser la formule de Cauchy avec un contour bien choisi, ou alors avoir l'idée de calculer la fonction caractéristique de la loi de Laplace $\frac{a}{2}e^{-a|x|}\mathrm{d}x$ et utiliser la formule d'inversion.*

Exercice 7 – ***Lois images.***
1. Soit X une variables aléatoire de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Déterminer la loi de $\lfloor X \rfloor + 1$. *C'est une loi géométrique.*
2. Soit U une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}([-1, 1])$. Déterminer la loi de $\arcsin(U)$.
3. Soit X de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Déterminer la loi de $|X|$.
4. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Déterminer la loi de $\frac{X}{Y}$. En déduire la loi de $\frac{1}{Z}$ si Z suit une loi de Cauchy de paramètre 1.
5. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On définit les variables aléatoires R, Θ par $(X, Y) = (R\cos\Theta, R\sin\Theta)$, $R > 0$ et $\Theta \in [0, 2\pi[$. Montrer que R et Θ sont indépendantes et déterminer leurs lois.

Exercice 8 – ***Loi Gamma.*** Pour $a > 0$ et $\lambda > 0$, on définit la loi $\gamma_{a,\lambda}$ par sa densité relativement à la mesure de Lebesgue :

$$f_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

1. Vérifier que cette fonction définit bien une densité.
2. Déterminer l'espérance de cette loi.
3. Soit $V_1, V_2, \ldots, V_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Déterminer la loi du vecteur $(V_1, V_1 + V_2, \ldots, V_1 + \cdots + V_n)$ et en déduire que $V_1 + \cdots + V_n \sim \gamma_{n,\lambda}$.
4. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\gamma_{a,\lambda}$.
4.a) Déterminer la loi de λX.
4.b) Montrer que $X + Y$ et X/Y sont des v.a. indépendantes dont on calculera les lois.
4.c) Montrer que $X + Y$ et $X/(X + Y)$ sont des v.a. indépendantes. Calculer la loi de $X/(X + Y)$.
5. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\gamma_{a,\lambda}$ et $\gamma_{b,\lambda}$ respectivement. Déterminer la loi de $X + Y$.
6. Soit $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
6.a) Montrer que Z_1^2 suit une loi $\gamma_{1/2,1/2}$.
6.b) Montrer que $Z_1^2 + \cdots + Z_n^2$ suit une loi $\gamma_{n/2,1/2}$. *La loi $\gamma_{n/2,1/2}$ est également appelée loi du khi-deux à n degrés de liberté, notée χ_n^2.*

Propriétés générales

Exercice 9 – ***Formule du crible.***
Soit $A_1, \ldots, A_n$ des événements. Montrer la *formule du crible*, où $|S|$ désigne le cardinal de S :

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \sum_{S \subset \{1,\ldots,n\}, S \neq \emptyset} (-1)^{|S|+1} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i \in S} A_i\Big).$$

(Écrire $\mathbf{1}_{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = 1 - \mathbf{1}_{A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c} = 1 - \prod_i (1 - \mathbf{1}_{A_i})$ et développer)

Exercice 10 – ***Autour de l'indépendance.***
1. Soit X, Y, Z des variables aléatoires indépendantes, de loi $\mu = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$. On note $X' = YZ$, $Y' = XZ$ et $Z' = XY$. Montrer que X', Y', Z' sont des variables aléatoires de loi μ indépendantes deux à deux, mais non indépendantes (dans leur ensemble).
2. Est-ce qu'un événement A peut être indépendant de lui-même ? Même question pour une variable aléatoire X.

Problèmes (simples) classiques

Exercice 11 – ***Formule de Bayes..*** Une maladie M affecte une personne sur 1000 dans une population donnée. On dispose d'un test sanguin qui détecte M avec une fiabilité de 99% lorsque cette maladie est effectivement présente. Cependant, on obtient aussi un résultat faussement positif pour 0,2% des personnes saines testées. Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsque son test est positif ?

Exercice 12 – ***Problèmes « concrets ».***
1. Un secrétaire vient de mettre cent lettres dans des enveloppes comportant des adresses avant de se rendre compte que les lettres étaient nominatives. Quelle est la probabilité que pas une seule des lettres ne soit dans la bonne enveloppe ? En donner une valeur approchée. *Penser à la formule du crible.*
2. Quelles est la probabilité que, dans un groupe de 25 personnes, deux au moins aient leur anniversaire le même jour ? (On négligera les années bissextiles, on supposera les dates de naissances équiprobables et indépendantes) En donner une valeur approchée.
3. Sachant que chaque paquet de céréales contient une vignette à collectionner, que l'on ne découvre qu'à l'ouverture du paquet, combien en moyenne faut-il ouvrir de paquets pour posséder au moins un exemplaire de chacune des n vignettes ? En donner une expression approchée.

Exercice 13 – ***Paradoxes probabilistes pour tous.***
1. Hier, je discutais avec ma nouvelle voisine :

> MOI – Combien avez-vous d'enfants ?
> ELLE – Deux.
> MOI – Y a-t-il une fille parmi eux ?
> ELLE – Oui.
> MOI – Et l'autre enfant, est-ce une fille également ?

1.a) Quelle est la probabilité que ma voisine réponde « oui » ?
1.b) Qu'en est-il si à ma deuxième question j'avais demandé si l'*aîné(e)* était une fille ?
2. *(Problème de Monty Hall)* Un jeu télévisé se déroule à chaque fois de la façon suivante : on présente trois boîtes fermées à un candidat, dont l'une contient 10 000 euros, et seul le présentateur sait laquelle ; le candidat choisit une boîte mais, avant qu'il ait pu l'ouvrir, le présentateur l'interrompt, et ouvre l'une des deux autres boîtes, qu'il sait vide. Le candidat peut alors maintenir son choix, ou ouvrir la boîte restante. L'une de ces options est-elle meilleure que l'autre ?

Preuves du cours : caractérisation des lois

Exercice 14 – ***Fonction de répartition inverse.*** Soit X une variable aléatoire réelle. On rappelle que sa fonction de répartition $F_X : t \mapsto F_X(t) = \mathbb{P}(X \le t)$ est croissante, continue à droite, et a pour limites 0 et 1 en $-\infty$ et $+\infty$. On définit, pour tout $u \in]0,1[$ l'inverse généralisée continue à gauche de F_X :

$$F_X^{-1}(u) = \inf\{t \mid F_X(t) \ge u\} (\in \mathbb{R}).$$

1. Montrer que, pour tous $t \in \mathbb{R}, u \in]0,1[$, $(F_X^{-1}(u) \le t) \Leftrightarrow (u \le F_X(t))$.
2. En déduire que, si U suit la loi uniforme sur $[0,1]$, alors $\widetilde{X} = F_X^{-1}(U)$ suit la même loi que X. Expliciter F_X^{-1} dans les cas d'une loi exponentielle et d'une loi de Cauchy.
3. À l'aide de ce qui précède, montrer que toute fonction croissante F continue à droite telle que $\lim_{-\infty} F = 0$ et $\lim_{+\infty} F = 1$ est la fonction de répartition d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$.
4. On suppose F_X continue. Montrer que, pour tout $0 < u < 1$, $F_X(F_X^{-1}(u)) = u$, en déduire que $F_X^{-1}(X)$ suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 15 – ***Lemme de classe monotone.*** Soit E un ensemble. Une *classe monotone* est un ensemble $\mathcal{M}$ de parties de E contenant E, stable par différence (si $A, B \in \mathcal{M}$ et $A \subset B$, alors $B \setminus A \in \mathcal{M}$) et par union croissante (si pour tout n, $A_n \in \mathcal{M}$ et $A_n \subset A_{n+1}$, alors $\bigcup_n A_n \in \mathcal{M}$).
1. Vérifier qu'une intersection de classes monotones est une classe monotone. En déduire que, pour tout ensemble $\mathcal{C}$ de parties de E, il existe une plus petite classe monotone contenant $\mathcal{C}$: on l'appellera la classe monotone *engendrée par* $\mathcal{C}$, notée $\mathcal{M}(\mathcal{C})$.
2. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de parties de E. On va montrer le *lemme de classe monotone* : si $\mathcal{C}$ est stable par intersection (pour tous $A, B \in \mathcal{C}$, $A \cap B \in \mathcal{C}$), alors $\mathcal{M}(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{C})$.
2.a) Soit $A \in \mathcal{C}$. Posons $\mathcal{M}_1 = \{B \in \mathcal{M}(\mathcal{C}) \mid A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})\}$. Montrer que $\mathcal{M}_1$ est une classe monotone et $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_1$.
2.b) Soit $B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$. Posons $\mathcal{M}_2 = \{A \in \mathcal{M}(\mathcal{C}) \mid A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{C})\}$. Montrer que $\mathcal{M}_2$ est une classe monotone et $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_2$.
2.c) En déduire que $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ est stable par intersection puis que $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ est une tribu. Conclure.
3. Application. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de parties de E stable par intersection. Soit μ, ν deux mesures sur $\sigma(\mathcal{C})$ telles que, pour tout $C \in \mathcal{C}$, $\mu(C) = \nu(C) < \infty$. Montrer que $\mu = \nu$. *Vérifier que ces ensembles C forment une classe monotone.*
4. Vérifier que l'ensemble des pavés fermés de $\mathbb{R}^d$ est stable par intersection, de même que les cylindres de $E^{\mathbb{N}}$.
5. Application. Soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
5.a) Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux ensembles d'événements stables par intersection. Montrer que si les familles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont indépendantes, alors leurs tribus engendrées le sont aussi. *Pour $A \in \mathcal{A}$, $\mathcal{M}_1 = \{B \in \sigma(\mathcal{B}) \mid \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\}$ serait-il une classe monotone ? Définir ensuite une classe $\mathcal{M}_2$.* Étendre à n familles.
5.b) Soit $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ trois tribus indépendantes. Montrer que $\sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ et $\mathcal{C}$ sont indépendantes. *Noter que $\mathcal{C}$ est indépendante de $\{A \cap B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$, stable par intersection.* Étendre à la propriété d'indépendance par paquets.

Exercice 16 – ***Fonction caractéristique.*** Soit X, Y des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que leurs fonctions caractéristiques coïncident sur $\mathbb{R}$: pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[e^{itX}] = \mathbb{E}[e^{itY}].$$

On souhaite conclure que X et Y ont même loi.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue à support compact.
1. Soit $A > 0$, assez grand pour que le support de f soit inclus dans $[-A, A]$. Justifier l'existence de $f_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de période $2A$ qui coïncide avec f sur $[-A, A]$. Montrer que

$$\mathbb{E}[f_A(X)] \underset{A\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[f(X)].$$

On a $f_A(X) = f(X) + (f_A(X) - f(X))\mathbf{1}_{\{|X|\geq A\}}$, $f_A - f$ est bornée et $\mathbb{P}(|X| > A) \to 0$...
2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{N}$, et $\alpha_0, \dots, \alpha_K \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left| f_A(x) - \sum_{k=0}^{K} \alpha_k e^{\frac{2i\pi}{2A}kx} \right| < \varepsilon$$

(c'est un théorème classique). En déduire que $\mathbb{E}[f_A(X)] = \mathbb{E}[f_A(Y)]$.
3. Conclure : pour cela, il suffit de montrer que $\mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[f(Y)]$.

Exercice 17 – ***Transformée de Laplace.*** Soit X, Y des variables aléatoires à valeurs dans $[0, +\infty[$. On suppose que leurs transformées de Laplace coïncident sur $\mathbb{R}_+$: pour tout $\lambda \geq 0$,

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda X}] = \mathbb{E}[e^{-\lambda Y}].$$

On souhaite en conclure que X et Y ont même loi.
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue à support compact.
1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{N}$ et $\alpha_0, \dots, \alpha_K \in \mathbb{R}$, $\lambda_0, \dots, \lambda_K \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+, \qquad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{K} \alpha_k e^{-\lambda_k x} \right| < \varepsilon.$$

Considérer $g(u) = f(-\ln u)$ sur $[0, 1]$ et appliquer le théorème de Stone-Weierstrass. On a en fait $\lambda_k = k$
2. En déduire que $\mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[f(Y)]$, et conclure.
Une autre preuve consisterait à se ramener à l'égalité entre fonctions caractéristiques : la fonction $\mathcal{L}_X : z \mapsto E[e^{-zX}]$ est holomorphe dans l'ouvert $\{\mathrm{Re}(\cdot) > 0\}$ et continue sur son adhérence (par théorèmes de régularité sous l'intégrale) ; par unicité du prolongement analytique, l'égalité entre $\mathcal{L}_X$ et $\mathcal{L}_Y$ sur $\mathbb{R}_+$ s'étend à l'ouvert précédent, et par continuité elle s'étend à son bord $i\mathbb{R}$, soit $\Phi_X = \Phi_Y$.

Convergence de variables aléatoires, exemples

Exercice 18. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
1. Montrer la convergence en probabilité suivante :

$$\frac{1}{\ln n} \max_{1\leq k\leq n} X_k \xrightarrow[n]{(p)} \frac{1}{\lambda}.$$

2. Démontrer que la suite de terme général

$$\max_{1\leq k\leq n} X_k - \frac{\ln n}{\lambda}$$

converge en loi vers une limite à déterminer.
3. Montrer que $(\frac{X_n}{\ln n})_n$ converge vers 0 en probabilité. Est-ce que cette convergence est presque sûre ?

Exercice 19. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires. On suppose qu'il existe une suite $(c_n)_n$ de réels telle que, pour tout $\delta > 0$.

$$\mathbb{P}(|X_n - c_n| > \delta) \underset{n}{\longrightarrow} 0.$$

On suppose de plus que la suite $(c_n)_n$ admet une limite c. Montrer que X_n converge vers c en probabilité.

Exercice 20. On reprend le problème du collectionneur de vignettes (exercice 12) : Soit $n \geq 1$. Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$. Pour $1 \leq k \leq n$, on définit

$$\tau_k^n = \inf \big\{ m \geq 1 \,\big|\, \mathrm{Card}(\{X_1, \ldots, X_m\}) = k \big\}.$$

1. Montrer que les variables aléatoires $(\tau_k^n - \tau_{k-1}^n)_{2\leq k\leq n}$, sont **indépendantes**, de lois respectives $\mathcal{G}\big(\frac{n-k+1}{n}\big)$ pour $2 \leq k \leq n$.
2. En déduire l'espérance et la variance de $N_n = \tau_n^n$.
3. Donner un équivalent de l'espérance, et montrer que $\mathrm{Var}(N_n) = O_n(n^2)$.
4. En déduire, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\big|N_n - E[N_n]\big| > \varepsilon n \log n\Big) \underset{n}{\longrightarrow} 0,$$

puis

$$\frac{N_n}{n \log n} \xrightarrow[n]{(p)} 1.$$

Modes de convergence

Exercice 21 – *Convergence des images.* Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, et X une autre variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Soit φ une fonction continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^m$. Montrer que $X_n \underset{n}{\longrightarrow} X$ implique $\varphi(X_n) \underset{n}{\longrightarrow} \varphi(X)$ pour les convergences p.s., en probabilité et en loi.

Exercice 22.
1. Donner un exemple de suite $(X_n)_{n\geq 0}$ qui converge en loi mais pas en probabilité. *Le construire par exemple à l'aide de $X \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$ et de $1 - X$, qui a même loi.*
2. Donner un exemple de suite $(X_n)_{n\geq 0}$ qui converge en probabilité mais pas p.s. *Prendre X_n indépendantes, de loi $\mathcal{B}(p_n)$ où p_n tend vers 0 mais $\sum_n p_n = \infty$, et appliquer le lemme de Borel-Cantelli. Ou : Soit U de loi uniforme sur* $[0, 1]$. *Prendre X_n égal à 1 ssi $U \in [\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k}[$ où $n = 2^k + p$ et $0 \leq p < 2^k$.*
3. Pour $p > 0$, donner un exemple de suite $(X_n)_{n\geq 0}$ qui converge en probabilité mais pas dans L^p *Prendre X_n à valeurs dans $\{0, n\}$ et ajuster les probabilités respectives de 0 et n.*

Exercice 23 – *Lemme de Slutzky.*
1. Montrer le lemme de Slutzky : Soit $(X_n)_n, (Y_n)_n$ deux suites de variables aléatoires réelles telles que $(X_n)_n$ converge en loi vers X et Y_n converge en loi vers une variable aléatoire égale p.s. à une constante c. Alors $(X_n, Y_n)_n$ converge en loi vers (X, c). En particulier,

$$X_n + Y_n \xrightarrow[n]{\text{(loi)}} X + c \qquad \text{et} \qquad X_n Y_n \xrightarrow[n]{\text{(loi)}} cX.$$

2. Application : Intervalle de confiance. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. de carré intégrable, de moyenne m et de variance σ^2. Justifier ce qui suit :

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \underset{n}{\longrightarrow} m \quad \text{p.s.}$$

et

$$S_n^2(X) := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \big(X_i - \overline{X}_n\big)^2 \underset{n}{\longrightarrow} \sigma^2 \quad \text{p.s.}$$

Montrer que $E[S_n^2(X)] = \sigma^2$ pour comprendre l'origine du $n - 1$. Enfin, justifier que

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n - nm}{\sqrt{n S_n^2(X)}} \xrightarrow[n]{\text{(loi)}} \mathcal{N}(0, 1)$$

et en déduire un « intervalle de confiance » contenant m avec probabilité proche de 95%, pour n grand.

Exercice 24 – ***Méthode Delta.*** On suppose que la suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires réelles satisfait

$$\sqrt{n}\Big(X_n - m\Big) \xrightarrow[n]{\text{(loi)}} \mathcal{N}(0,\sigma^2),$$

où m et σ sont des réels.
Exemple : $X_n = (\xi_1 + \cdots + \xi_n)/n$ où $(\xi_k)_k$ sont i.i.d. de moyenne m et de variance σ^2, par le TCL.
Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue, et dérivable en m. On souhaite montrer que

$$\sqrt{n}\Big(g(X_n) - g(m)\Big) \xrightarrow[n]{\text{(loi)}} \mathcal{N}(0,\sigma^2(g'(m))^2).$$

1. Justifier que X_n converge vers m en probabilité.
2. On définit la fonction $\Delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par : pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{m\}$,

$$\Delta(x) = \frac{g(x) - g(m)}{x - m},$$

et $\Delta(m) = g'(m)$. Justifier que $\Delta(X_n)$ converge en probabilité vers $g'(m)$.
3. Conclure, à l'aide du lemme de Slutzky (exercice précédent).
4. Exemple : si les v.a. X_n sont i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, où $\lambda > 0$, étudier la convergence en loi de $\sqrt{n}\Big(\frac{n}{X_1+\cdots+X_n} - \lambda\Big)$.

Théorèmes-limites

Exercice 25 – ***Loi des grands nombres pour des variables non-intégrables.*** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de même loi que X, où $\mathbb{E}[X_+] = \infty$ et $\mathbb{E}[X_-] < \infty$, de sorte que cela a un sens d'écrire $\mathbb{E}[X] = +\infty$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que, p.s., $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n]{} +\infty$.

Exercice 26 – ***Calculs de limites à l'aide des théorèmes-limites.***
1. Appliquer le théorème central limite à une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre 1 pour trouver la limite de la suite de terme général

$$e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}.$$

2. Soit f une fonction continue $[0,1] \to \mathbb{R}$. Déterminer la limite de la suite de terme général

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) dx_1 \cdots dx_n.$$

Exercice 27 – ***Polynômes de Bernstein.*** On veut donner une preuve probabiliste (et constructive) du théorème de (Stone-)Weierstrass sur $[0,1]$. Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On définit, pour $n \geq 0$, la fonction polynomiale sur $[0,1]$

$$P_n : x \mapsto P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\big(\tfrac{k}{n}\big)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

1. En écrivant $P_n(x) = \mathbb{E}\big[f(\frac{S_n}{n})\big]$, où S_n suit la loi binomiale de paramètres (n,x), justifier la convergence simple de P_n vers f sur $[0,1]$.
2. Soit $\delta > 0$. On note $\omega(f,\delta) = \sup\big\{|f(x) - f(y)| \big| |x-y| < \delta\big\}$ le module de continuité de f. Justifier l'inégalité

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \omega(f,\delta) + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta\right),$$

et en déduire une majoration de $\|f - P_n\|_\infty$. Conclure.

Divers

Exercice 28 – ***Marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$.*** On note $(e_1, \dots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{Z}^d$. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $\{e_1, \dots, e_d, -e_1, \dots, -e_d\} \subset \mathbb{Z}^d$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
Pour tout n, on note Φ_n la fonction génératrice de S_n.
1. Montrer que, pour tout n, $\Phi_n = (f_d)^n$ où, pour $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$,

$$f_d(x) = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d} \cos(x_j).$$

2. Pour tout n, en écrivant $\Phi_n(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(S_n = k)e^{ix\cdot k}$, montrer que

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} (f_d(x))^n dx.$$

3. En déduire

$$E[\#\text{passages en } 0] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{dx}{1 - f_d(x)^2} = \frac{d}{(2\pi)^d}\int_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]^d} \frac{dx}{1 - f_d(x)^2}.$$

On pourra noter que les termes d'indice n pair sont nuls.
4. En déduire que l'espérance ci-dessus est finie ssi $d > 2$.
5. On suppose $d > 3$. Déduire de la question précédente (en adaptant celle d'avant) que l'espérance du nombre de passages de $(S_n)_n$ par n'importe quel $x \in \mathbb{Z}^d$ donné est fini. En déduire que, p.s., $\|S_n\| \to_n +\infty$.
6. On suppose $d \leq 2$. On note $p = \mathbb{P}(\exists n \geq 1,\ S_n = 0)$. Montrer que la probabilité que $(S_n)_{n\geq 1}$ visite 0 au moins k fois est p^k. En déduire que, si $p < 1$, l'espérance du nombre de visites de $(S_n)_n$ en 0 serait fini. Conclure que 0 est visité infiniment souvent p.s., et généraliser à tout point $x \in \mathbb{Z}^d$.

Exercice 29 – ***Une fonction continue, croissante, de dérivée presque-partout nulle : « l'escalier du diable ».*** Soit $(\xi_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi donnée par $\mathbb{P}(\xi_1 = 0) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(\xi_1 = 2)$. On pose

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{3^n},$$

et on définit $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ pour $0 \leq t \leq 1$.
1. Montrer que F est continue sur $[0, 1]$. *Il faut voir que $\mathbb{P}(X = t) = 0$ pour tout t, ce qui se déduit de la (quasi-)unicité du développement en base 3*
2. On note O l'ensemble des réels dans $]0, 1[$ qui ont au moins un 1 dans leur développement en base 3. Justifier que O est bien défini, que c'est un ouvert de mesure 1, et que F est constante sur chacune de ses composantes connexes. *Noter que $\mathbb{P}(X \in O) = 0$.*