

Résolution numérique d'équations non linéaires – TP

1 Méthode de dichotomie

1) Écrire une fonction `[x,vx]=dichotomie(f,a,b,tol,n_max)` qui applique la méthode de dichotomie pour estimer une solution de $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[a,b]$ (on doit donc avoir $f(a)f(b) < 0$). Les paramètres donnés sont la fonction `f`, les bornes `a`et `b` de l'intervalle de recherche, la tolérance `tol` sur l'erreur (on souhaite $|x - s|$ <`tol` où s est une solution), et le nombre maximal d'itérations. La fonction doit renvoyer l'estimation `x` de la solution, et la suite `vx` des itérations successives à partir de x_1 (qui sera utile pour étudier la vitesse de convergence).

2 Méthode d'itération vers un point fixe

2) Écrire une fonction `[x,vx]=pointfixe(g,x0,tol,n_max)` qui applique la méthode d'itération pour estimer une solution de $g(x) = x$. Les paramètres donnés sont la fonction `g`, la valeur initiale de la méthode `x0`, la tolérance `tol` sur le résidu (on souhaite $|g(x) - x|$ <`tol`), et le nombre maximal d'itérations. La fonction doit renvoyer l'estimation `x` de la solution, et la suite `vx` des itérations successives à partir de x_1 (qui sera utile pour étudier la vitesse de convergence).

3) On considère $g : x \mapsto g(x) = x^2 - 1$. Représenter graphiquement g et id sur $[0,2]$. Est-ce que g admet un point fixe ? Que donne la méthode d'itération partant de `x0=1`, avec `tol=1e-3` et `n_max=100` ? Essayer avec d'autres points de départ. Calculer formellement le point fixe s et la valeur de $g'(s)$: commenter.

4) On considère $g : x \mapsto \frac{x^2-x+x\ln(x)}{x-1+x\ln(x)}$ sur $[\frac{1}{2},2]$. Représenter g et id : g a-t-elle un point fixe s ? Tester la méthode d'itération sur cet exemple (`u0=1.25`, `tol=1e-6`, `n_max=100`). Représenter en échelle logarithmique la suite des valeurs $|x_n - s|$.

5) On considère $g : x \mapsto \frac{2x^3+2x^2+20}{3x^2+4x+10}$ sur $[1,2]$. Représenter g et id : g a-t-elle un point fixe s ? Tester la méthode d'itération sur cet exemple (`u0=1.5`, `tol=1e-6`, `n_max=100`). Représenter en échelle logarithmique la suite des valeurs $|x_n - s|$. Sur un autre graphe, représenter sur une échelle log-log les points (e_k,e_{k+1}) où $e_k = |x_k - s|$ (avec l'estimation $s = x_N$ obtenue), pour $k = 0,\dots,N-2$. Afficher sur le même graphe les points (e_k,e_k^2). Que met-on en évidence ?

3 Méthode de Newton

6) Écrire une fonction `[x,vx]=newton(f,df,x0,tol,n_max)` qui applique la méthode de Newton pour estimer une solution de $f(x) = 0$. Les paramètres donnés sont la fonction `f`, sa dérivée `df`, la valeur initiale de la méthode `x0`, la tolérance `tol` sur le résidu (on souhaite $|f(x)|$ <`tol`), et le nombre maximal d'itérations. La fonction doit renvoyer l'estimation `x` de la solution, et la suite `vx` des itérations successives à partir de x_1 (qui sera utile pour étudier la vitesse de convergence).

7) On considère $f : x \mapsto x^3 + 2x^2 + 10x - 20$. Vérifier graphiquement l'existence d'une racine s de f sur $[1,2]$. L'estimer numériquement via la méthode de Newton. Représenter sur une échelle log-log les points (e_k,e_{k+1}) où $e_k = |x_k - s|$ (avec l'estimation $s = x_N$ obtenue), pour $k = 0,\dots,N-2$. Afficher sur le même graphe les points (e_k,e_k^2). Que met-on en évidence ?

8) On considère $f : x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$. Représenter graphiquement f sur $[-1{,}8]$. Appliquer la méthode de Newton avec `x_0=2`, `tol=1e-6` et `n_max=30`. Que constate-t-on ? Est-ce que `n_max` a été atteint ? Pourquoi ? Comparer avec `x0=0.5`.

On s'intéresse à une généralisation aux nombres complexes. On souhaite approcher numériquement les racines cubiques de l'unité $z_0 = 1$, $z_1 = j = e^{2i\pi/3}$ et $z_2 = \overline{j}$. On applique la méthode de Newton a la fonction complexe $f : z \mapsto f(z) = z^3 - 1$, de dérivée $f'(z) = 3z^2$ (c'est une dérivée au sens complexe : $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \to f'(z_0)$ quand $z \to z_0$ dans $\mathbb{C}$).

9) Pour tout point $z \in \mathbb{C}$, on note $R(z)$ le numéro de la racine (0,1 ou 2) vers laquelle converge la méthode de Newton ayant pour point initial z, avec $R(z) = 3$ si la méthode ne converge pas. Pour n^2 points $(z_{kl})_{1\leq k,l\leq n}$ régulièrement espacés dans le carré $[-\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}]^2 \subset \mathbb{C}$, appliquer la méhode de Newton et stocker les valeurs $R(z_{kl})$ dans une matrice A. On pourra prendre `n=100`, `tol=1e-5`, `n_max=100`. Utiliser `imagesc(vx,vy,A)` pour faire une représentation graphique, où `vx`, `vy` sont la liste des abscisses et ordonnées.

NB. Pour déterminer la racine, on pourra regarder le signe de la partie réelle (`real(z)`), puis (s'il est négatif) le signe de la partie imaginaire (`imag(z)`)...