Exercices

Memento

Fonctions associées aux lois

Pour X variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$,
- Fonction de répartition (si $d=1$) : $F_X(t) = P(X \le t)$, $t \in \mathbb{R}$
- Fonction génératrice (si X à valeurs dans $\mathbb{N}$) : $G_X(s) = E[s^X] = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)s^n$, $s \in |-R, R|$
- Transformée de Laplace (si $d=1$) : $\mathcal{L}_X(\lambda) = E[e^{-\lambda X}] \in]0,+\infty]$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- Fonction caractéristique (si X dans $\mathbb{R}^d$) : $\Phi_X(t) = E[e^{i\langle t, X\rangle}]$, $t \in \mathbb{R}^d$

Lois discrètes

Nom	Paramètres	Support	Définition : $P(A) = \sum_{a \in A} p(a)$
Loi de Dirac δ_a	$a \in \mathbb{R}$	$\{a\}$	$p(a) = 1$
Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	$p \in [0,1]$	$\{0,1\}$	$p(0) = 1-p$, $p(1) = p$
Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$	$n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$	$\{0,\dots,n\}$	$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$	$p \in (0,1]$	$\mathbb{N}^*$	$p(k) = (1-p)^{k-1}p$
Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\lambda \in]0,+\infty[$	$\mathbb{N}$	$p(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

Lois continues

Nom	Paramètres	Support	Définition : $P(A) = \int_A f(x)dx$
Loi uniforme $\mathcal{U}([a,b])$	$a < b$	$[a,b]$	$f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}(x)$
Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	$\lambda \in]0,\infty[$	$]0,+\infty[$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)$
Loi de Cauchy	$a \in]0,+\infty[$	$\mathbb{R}$	$f(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$
Loi normale/gaussienne $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$m \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \in]0,+\infty[$	$\mathbb{R}$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$

Déterminer des lois

Exercice 1 *Fonction de répartition inverse* cf. [6]
Soit X une variable aléatoire réelle. On rappelle que sa fonction de répartition $F_X : t \mapsto F_X(t) = P(X \le t)$ est croissante, continue à droite, et admet pour limites 0 et 1 en $-\infty$ et $+\infty$.

On définit, pour tout $u \in (0,1)$ l'inverse généralisée continue à gauche de F_X :

$$F_X^{-1}(u) = \inf\{t \mid F_X(t) \ge u\}.$$

1. Montrer que, pour tous $t \in \mathbb{R}, u \in (0,1)$, $(F_X^{-1}(u) \le t) \Leftrightarrow (u \le F_X(t))$.
2. En déduire que, si U suit la loi uniforme sur $[0,1]$, alors $\widetilde{X} = F_X^{-1}(U)$ suit la même loi que X. Expliciter ceci dans les cas d'une loi exponentielle et d'une loi de Cauchy.
3. À l'aide de ce qui précède, montrer que toute fonction croissante F continue à droite telle que $\lim_{-\infty} F = 0$ et $\lim_{+\infty} F = 1$ est la fonction de répartition d'une unique loi de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 *Minimum/maximum de variables aléatoires exponentielles*
1. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{E}(\lambda)$ et $\mathcal{E}(\mu)$. À l'aide de fonctions de répartition, déterminer les lois de $U = \min(X,Y)$ et $V = \max(X,Y)$.

Soit $(X_n)_{n\ge 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
2. Montrer la convergence en probabilité suivante :

$$\frac{1}{\ln n}\max_{1\le k\le n} X_k \xrightarrow[n]{(p)} \frac{1}{\lambda}.$$

3. Démontrer que la suite de terme général

$$\max_{1\leq k\leq n} X_k - \frac{\ln n}{\lambda}$$

converge en loi vers une limite à déterminer.

Exercice 3 *Somme de variables aléatoires*
1. Soit X, Y des variables aléatoires indépendantes de lois $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$. À l'aide des fonctions génératrices, déterminer la loi de $X+Y$.
2. Soit X, Y des variables aléatoires indépendantes de loi de Cauchy de paramètre a et b. À l'aide des fonctions caractéristiques, déterminer la loi de $X+Y$. *On pourra calculer la fonction caractéristique de la loi de Laplace $\frac{a}{2}e^{-a|x|}dx$ et utiliser la formule d'inversion.*

Exercice 4 *Somme et densité*
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. Montrer que si la loi de X admet une densité, alors celle de $X+Y$ aussi.
C'est une nouvelle illustration du fait général que la convolée de deux fonctions/mesures a la régularité de la plus régulière des deux.

Exercice 5 *Lois images*
1. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}([-1,1])$. Déterminer la loi de $\arcsin(U)$.
2. Soit X de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Déterminer la loi de $|X|$.
3. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Déterminer la loi de $\frac{X}{Y}$. En déduire la loi de $\frac{1}{Z}$ si Z suit une loi de Cauchy de paramètre 1.
4. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On définit les variables aléatoires R, Θ par $(X,Y) = (R\cos\Theta, R\sin\Theta)$, $R > 0$ et $\Theta \in [0, 2\pi[$. Montrer que R et Θ sont indépendantes et déterminer leurs lois.

Exercice 6 *Loi Gamma*
Pour $a > 0$ et $\lambda > 0$, on définit la loi $\gamma_{a,\lambda}$ par sa densité relativement à la mesure de Lebesgue :

$$f_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\exp(-\lambda x)x^{a-1}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

1. Vérifier que cette fonction définit bien une densité.
2. Déterminer l'espérance de cette loi.

Soit $V_1, V_2, \ldots, V_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
3. Déterminer la loi du vecteur $(V_1, V_1+V_2, \ldots, V_1+\cdots+V_n)$ et en déduire que $V_1+\cdots+V_n \sim \gamma_{n,\lambda}$.

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\gamma_{a,\lambda}$.
4. Déterminer la loi de λX.
5. Montrer que $X+Y$ et X/Y sont des v.a. indépendantes dont on calculera les lois.
6. Montrer que $X+Y$ et $X/(X+Y)$ sont des v.a. indépendantes. Calculer la loi de $X/(X+Y)$.

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\gamma_{a,\lambda}$ et $\gamma_{b,\lambda}$ respectivement.
7. Déterminer la loi de $X+Y$.

Soit $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
8. Montrer que Z_1^2 suit une loi $\gamma_{1/2,1/2}$.
9. Montrer que $Z_1^2+\cdots+Z_n^2$ suit une loi $\gamma_{n/2,1/2}$. *(La loi $\gamma_{n/2,1/2}$ est également appelée loi χ_n^2).*

Théorèmes-limites

Exercice 7 *Loi des grands nombres pour des variables non-intégrables*
Soit $(X_n)_{n\geq1}$ une suite de v.a. i.i.d. de même loi que X, où $E[X_+] = \infty$ et $E[X_-] < \infty$, de sorte que cela a un sens d'écrire $E[X] = \infty$. On pose $S_n = X_1+\cdots+X_n$. Montrer que, p.s., $S_n \xrightarrow[n]{} +\infty$.
On pourra tronquer les variables pour se ramener à la loi forte des grands nombres habituelle.

Exercice 8 *En grande dimension, cube plein $\simeq$ sphère* cf. [2]
Soit $n \geq 1$. Soit $X^{(n)}$ une variable aléatoire de loi uniforme dans le cube $[-1,1]^n$. Justifier que $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$ où $X_1, \dots, X_n$ sont i.i.d. de loi $\mathcal{U}([-1,1])$ et, par la loi faible des grands nombres, montrer que, pour tout $\delta > 0$,

$$P\left(\left|\|X^{(n)}\|_2 - \sqrt{\frac{n}{3}}\right| > \delta\sqrt{n}\right) \to_n 0.$$

Interpréter ce résultat en terme de volume.

Exercice 9 *Calculs de limites à l'aide des théorèmes-limites* cf. [7]

1. Appliquer le théorème central limite à une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre 1 pour trouver la limite de la suite de terme général

$$e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}.$$

2. Soit f une fonction continue $[0,1] \to \mathbb{R}$. Déterminer la limite de la suite de terme général

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) dx_1 \cdots dx_n.$$

Exercice 10 *Polynômes de Bernstein* cf. [7, 2, 1]
On veut donner une preuve probabiliste (et explicite) du théorème de (Stone-)Weierstrass sur $[0,1]$. Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On définit, pour $n \geq 0$, la fonction polynomiale sur $[0,1]$

$$P_n : x \mapsto P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

1. En écrivant $P_n(x) = E\big[f(\frac{S_n}{n})\big]$, où S_n suit la loi binomiale de paramètres (n,x), justifier la convergence simple de P_n vers f sur $[0,1]$.
2. Soit $\delta > 0$. On note $\omega(f,\delta) = \sup\big\{|f(x) - f(y)|\big||x-y| < \delta\big\}$ le module de continuité de f. Justifier l'inégalité

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \omega(f,\delta) + 2\|f\|_\infty P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta\right),$$

et en déduire une majoration de $\|f - P_n\|_\infty$. Conclure.

Modes de convergence

Exercice 11 *Convergence des images*
Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires, et X encore une variable aléatoire. Soit φ une fonction continue. Montrer que $X_n \to_n X$ implique $\varphi(X_n) \to_n \varphi(X)$ pour les convergences p.s., en probabilité et en loi.

Exercice 12
Sur $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), dx)$,
1. Donner un exemple de suite $(X_n)_{n\geq 0}$ qui converge en loi mais pas en probabilité. *Indication : utiliser par exemple $U : x \mapsto x$ et $1-U$, qui a même loi.*
2. Donner un exemple de suite $(X_n)_{n\geq 0}$ qui converge en probabilité mais pas p.s..
3. Pour $p > 0$, donner un exemple de suite $(X_n)_{n\geq 0}$ qui converge en probabilité mais pas dans L^p.

Exercice 13 *Lemme de Slutzky*
1. Montrer le lemme de Slutzky : Soit $(X_n)_n, (Y_n)_n$ deux suites de variables aléatoires telles que $(X_n)_n$ converge en loi vers X et Y_n converge en loi vers une variable aléatoire égale p.s. à une constante c. Alors $(X_n, Y_n)_n$ converge en loi vers (X, c).
Utiliser les fonctions caractéristiques et découper $|\Phi_{(X_n,Y_n)}(x,y) - \Phi_{(X,Y)}(x,y)| \leq |\Phi_{(X_n,Y_n)}(x,y) - \Phi_{(X_n,Y)}(x,y)| + |\Phi_{(X_n,Y)}(x,y) - \Phi_{(X,Y)}(x,y)|$. *Expliciter les termes ; il ne reste que deux lignes à écrire.*

2. Application : Intervalle de confiance. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. de carré intégrable, de moyenne m et de variance σ^2. Justifier ce qui suit :

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \underset{n}{\longrightarrow} m \quad \text{p.s.}$$

et

$$V_n(X) := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 \underset{n}{\longrightarrow} \sigma^2 \quad \text{p.s.}$$

Montrer que $E[V_n(X)] = \sigma^2$ pour comprendre l'origine du $n-1$. Enfin, justifier que

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n - nm}{\sqrt{nV_n(X)}} \xrightarrow[n]{\text{(loi)}} \mathcal{N}(0,1)$$

et en déduire un « intervalle de confiance » contenant m avec probabilité proche de 95%, pour n grand.

Exercice 14 *Théorème de Glivenko–Cantelli* cf. [6, 5]
Soit X une variable aléatoire réelle. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de même loi que X. On a en tête un cadre statistique : on dispose d'un échantillon $X_1, \dots, X_n$ de données dont on suppose qu'elles sont indépendantes et suivent la même loi, et on voudrait connaître cette loi de façon approchée. Ceci revient à trouver une approximation de la fonction de répartition $F_X : t \mapsto P(X \leq t)$ à partir de ces données ; il s'agit de la fonction de répartition empirique :

$$\forall (t,\omega) \in \mathbb{R} \times \Omega, \quad F_n(t,\omega) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{\{X_j(\omega) \leq t\}}$$

que l'on peut voir comme une fonction aléatoire. Pour tout t, $F_n(t,\cdot)$ est la proportion de valeurs parmi $X_1, \dots, X_n$ qui sont inférieures ou égales à t. On note

$$D(\omega) = \sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t,\omega) - F_X(t)|.$$

1. Montrer que

$$D = \sup_{t\in\mathbb{Q}} |F_n(t,\cdot) - F_X(t)|,$$

de sorte que D est bien mesurable (car limite d'une suite). *Utiliser la continuité à droite.*
2. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(F_n(t,\cdot))_n$ converge presque sûrement vers $F_X(t)$, et $(F_n(t^-,\cdot))_n$ vers $F_X(t^-)$. En utilisant la continuité à droite et le fait que l'ensemble des points de discontinuité de F_X est dénombrable, en déduire que presque-sûrement F_n converge simplement vers F_X.
3. Si F_X est continue, conclure par un théorème de Dini que D_n tend presque-sûrement vers 0.
4. On va se ramener au cas précédent. Soit $(U_j)_{j\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose, pour tout j, $\widetilde{X}_j = F_X^{-1}(U_j)$ (au sens de l'exercice 1). Alors la suite $(\widetilde{X}_j)_j$ est aussi une suite i.i.d. de même loi que X, donc on peut supposer que c'est la suite de l'énoncé et montrer le résultat sur celle-ci. On omet donc les tildes et on écrit $X_j = F_X^{-1}(U_j)$. On écrit aussi $X = F_X^{-1}(U)$ avec $U \sim \mathcal{U}([0,1])$. Montrer que

$$D_n \leq \sup_{u\in(0,1)} \left| \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{\{U_j \leq u\}} - P(U \leq u) \right|, \tag{1}$$

et conclure $D_n \to_n 0$ p.s. grâce à la question précédente. C'est le théorème de Glivenko-Cantelli.
5. Complément : On suppose à nouveau F_X continue. Montrer qu'il y a égalité dans (1). *Il suffit de dire que l'image de F_X contient $(0,1)$ par TVI.*
Ainsi, la loi de D_n ne dépend pas de la loi de X pourvu que celle-ci soit continue. On en déduit le test de Kolmogorov-Smirnov : pour tester si $X_1, \dots, X_n$ est un échantillon tiré suivant la loi de fonction de répartition F continue, on calcule

$$\widehat{D}_n = \sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)|,$$

et on considére que le test échoue si la valeur trouvée est supérieure à δ_n, qui est tel que $P(D_n \geq \delta_n) \simeq 0.05$ et est fourni par des tables (nb : la loi de D_n ne dépend pas de celle de X vu l'égalité dans (1) d'où une tabulation possible). Si on a bien $F_X = F$, on se trompe dans 5% des cas ; mais si $F_X \neq F$, $\widehat{D}_n \simeq \|F - F_X\|_\infty > \delta_n$ p.s. si n est grand, et le test échoue presque tout le temps.

Exercice 15 *Théorème de Helly–Bray & théorème de Prohorov* cf. [1]
1. Démontrer le théorème de Helly–Bray : si $(F_n)_n$ est une suite de fonctions de répartition, il existe une fonction croissante continue à droite F et une sous-suite $(F_{n_k})_k$ telles que $F_{n_k}(t) \to_k F(t)$ en tout point de continuité t de F. *Procéder à une extraction diagonale sur les rationnels pour définir une limite G, puis poser $F(x) = \inf\{G(r) | r \in \mathbb{Q}, r > x\}$*
2. Montrer qu'il existe une mesure μ sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tous $a < b$, $\mu(]a, b]) = F(b) - F(a)$. *Se ramener à l'exercice 1, par exemple.*
3. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles, que l'on suppose *tendue* : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe M tel que, pour tout n, $P(X_n \in [-M, M]) > 1 - \varepsilon$. Montrer que $(X_n)_n$ admet une sous-suite qui converge en loi. En particulier, toute sous-suite de $(X_n)_n$ admet une sous-suite qui converge en loi.
4. Réciproquement, montrer que si une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires n'est pas tendue, il existe une sous-suite de $(X_n)_n$ qui n'admet pas de sous-suite convergente.
On définit de même la tension d'un ensemble A de lois de probabilité (ou de variables aléatoires). Alors, par l'exercice, A est tendu ssi A est relativement compact pour la convergence en loi.

Méthode de Monte-Carlo

Voir exercice sur le lemme de Slutzky, pour un intervalle de confiance ; voir aussi inégalité de Hoeffding pour intervalle de confiance non-asymptotique ; calcul de volume (Scilab).

Dénombrement

Exercice 16 *Formule d'inclusion-exclusion*
1. Soit $A_1, \ldots, A_n$ des événements. Démontrer la formule suivante, dite d'inclusion-exclusion (ou du crible) :

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

Indication : procéder par récurrence ou, plus directement, développer $1 - \prod_i (1 - \mathbf{1}_{A_i})$ et intégrer.
2. Un secrétaire vient de mettre cent lettres dans des enveloppes comportant des adresses avant de se rendre compte que les lettres étaient nominatives. Quelle est la probabilité que pas une seule des lettres ne soit dans la bonne enveloppe ? En donner une valeur approchée.

Exercice 17 *Paradoxe des anniversaires*
Quelles est la probabilité que, dans un groupe de 25 personnes, deux au moins aient leur anniversaire le même jour ? (On négligera les années bissextiles, on supposera les dates de naissances équiprobables et indépendantes) En donner une valeur approchée.

Divers

Exercice 18 *Conditionnement : Cas indépendant*
Soit X, Y des variables aléatoires réelles indépendantes, $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que

$$E[\phi(X, Y)] = \int E[\phi(X, y)] \mathrm{d}P_Y(y),$$

et

$$P(\phi(X + Y) \in A) = \int P(\phi(X + y) \in A) \mathrm{d}P_Y(y).$$

Exercice 19 *Collectionneur de vignettes* cf. [3]
Soit $n \geq 1$ *[le nombre de vignettes différentes]*. Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ *[les vignettes trouvées dans les paquets de céréales]* une suite de v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$. Pour $1 \leq k \leq n$, on définit

$$\tau_k^n = \inf \big\{ m \geq 1 \,\big|\, \#\{X_1, \ldots, X_m\} = k \big\}$$

[le nombre de paquets de céréales à ouvrir avant d'avoir k vignettes différentes].
1. Montrer que les variables aléatoires $(\tau_k^n - \tau_{k-1}^n)_{2 \leq k \leq n}$, sont indépendantes, de lois respectives $\mathcal{G}\big(\frac{n-k+1}{n}\big)$ pour $2 \leq k \leq n$.

2. En déduire l'espérance et la variance de $T_n = \tau_n^n$.
3. Donner un équivalent de l'espérance, et montrer que $\mathrm{Var}(T_n) = O(n^2)$.
4. En déduire, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P\Big(\big|T_n - E[T_n]\big| > \varepsilon n \log n\Big) \underset{n}{\longrightarrow} 0,$$

puis

$$\frac{T_n}{n \log n} \xrightarrow[n]{(p)} 1.$$

[Le nombre de paquets à ouvrir pour avoir toutes les vignettes est de l'ordre de $n \log n$.]
5. On se donne $k_n \sim pn$ (entier) où $0 < p < 1$. Calculer $E[\tau_{k_n}^n]$, $\mathrm{Var}(\tau_{k_n}^n)$, donner un équivalent de l'espérance, montrer que la variance est dominée par n, et en déduire : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P\Big(\big|\tau_{k_n}^n - E[\tau_{k_n}^n]\big| \geq \varepsilon n\Big) \underset{n}{\longrightarrow} 0,$$

puis

$$\frac{\tau_{k_n}^n}{n} \xrightarrow[n]{(p)} \log \frac{1}{1-p}.$$

[Le nombre de paquets à ouvrir pour avoir une proportion p des vignettes est de l'ordre de $n \log \frac{1}{1-p}$.]
6. Montrer que

$$\left(\frac{T_n}{n \log n} - 1\right) \log n = \frac{T_n - n \log n}{n} \xrightarrow[n]{\text{(loi)}} Z,$$

où la loi de Z est donnée par sa fonction de répartition $F_Z : t \mapsto P(Z \leq t) = e^{-e^{-t}}$ ou encore par sa densité $f_Z : t \mapsto e^{-t} e^{-e^{-t}}$ sur $\mathbb{R}$ ou sa fonction caractéristique $\Phi_Z(t) = \Gamma(1 - it)$ (loi de Gumbel ; on peut montrer que $E[Z] = \gamma$). *Utiliser la fonction caractéristique, et reconnaître la limite suivante :*

$$\Gamma(1 - it) = -it\Gamma(-it) = \lim_n \frac{n^{-it} n!}{\prod_{k=1}^n (k - it)}.$$

Exercice 20 *Marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$* cf. [4]
On note $(e_1, \ldots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{Z}^d$. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $\{e_1, \ldots, e_d, -e_1, \ldots, -e_d\} \subset \mathbb{Z}^d$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Pour tout n, on note Φ_n la fonction génératrice de S_n.
1. Montrer que, pour tout n, $\Phi_n = (f_d)^n$ où, pour $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$,

$$f_d(x) = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d} \cos(x_j).$$

2. Pour tout n, en écrivant $\Phi_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} P(S_n = k) e^{ix \cdot k}$, montrer que

$$P(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} (f_d(x))^n dx.$$

3. En déduire

$$E[\#\text{passages en } 0] = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{dx}{1 - f_d(x)^2} = \frac{d}{(2\pi)^d} \int_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]^d} \frac{dx}{1 - f_d(x)^2}.$$

On pourra noter que les termes d'indice n pair sont nuls.
4. En déduire que l'espérance ci-dessus est finie ssi $d > 2$.
5. On suppose $d > 3$. Déduire de la question précédente (en adaptant celle d'avant) que l'espérance du nombre de passages de $(S_n)_n$ par n'importe quel $x \in \mathbb{Z}^d$ donné est fini. En déduire que, p.s., $\|S_n\| \to_n +\infty$.
6. On suppose $d \leq 2$. On note $p = P(\exists n \geq 1,\ S_n = 0)$. Montrer que la probabilité que $(S_n)_{n \geq 1}$ visite 0 au moins k fois est p^k. En déduire que, si $p < 1$, l'espérance du nombre de visites de $(S_n)_n$ en 0 serait fini. Conclure que 0 est visité infiniment souvent p.s., et généraliser à tout point $x \in \mathbb{Z}^d$.

Exercice 21 *Processus de branchement de Galton-Watson* cf. [2] ?

Exercice 22 *Une fonction continue, croissante, de dérivée presque-partout nulle : « l'escalier du diable »*
Soit $(\xi_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi donnée par $P(\xi_1 = 0) = \frac{1}{2} = P(\xi_1 = 2)$. On pose

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{3^n},$$

et on définit $F(t) = P(X \leq t)$ pour $0 \leq t \leq 1$.
1. Montrer que F est continue sur $[0, 1]$. *Il faut voir que $P(X = t) = 0$ pour tout t, ce qui se déduit de la (quasi-)unicité du développement en base 3*
2. On note O l'ensemble des réels dans $]0, 1[$ qui ont au moins un 1 dans leur développement en base 3. Justifier que O est bien défini, que c'est un ouvert de mesure 1, et que F est constante sur chacune de ses composantes connexes. *Noter que $P(X \in O) = 0$.*

Exercice 23 *Une fonction $\mathcal{C}^\infty$ nulle part analytique : la fonction de Fabius*
Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une famille de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0, 1])$. On pose

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_i}{2^i},$$

et on définit $\mathrm{Fb}(x) = P(X \leq x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
1. Montrer que la loi de X admet une densité (cf. exercice 4) [d'où la continuité de Fb], et que $\mathrm{Fb}(x) = \mathrm{Fb}(1 - x)$ pour tout $x \in [0, 1]$.
2. En remarquant que $X = \frac{U_1+X'}{2}$ où X' a même loi que X et est indépendante de U_1, montrer que, pour $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$,

$$\mathrm{Fb}(x) = \int_0^{2x} \mathrm{Fb}(y)dy,$$

et en déduire que Fb est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$,

$$\mathrm{Fb}'(x) = 2\mathrm{Fb}(2x).$$

3. Dessiner l'allure des graphes de Fb et Fb$'$. Conclure que Fb est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et donner l'allure des graphes des dérivées suivantes.
4. Montrer que Fb n'est pas analytique en 0 (on pourra noter que $\mathrm{Fb}^{(n)}(2^{-n}) = 2^n > 0$), puis en aucun point dyadique et conclure que Fb n'est nulle part analytique sur $\mathbb{R}$.

Références

[1] Cottrell, Genon-Catalot, Duhamel, Meyre. *Exercices de probabilités.* Cassini

[2] Barbe, Ledoux. *Probabilité.* EDP Sciences

[3] Grimmett, Stirzaker. *One thousand exercises in probability.* Oxford University Press

[4] Körner. *Fourier analysis.* Cambridge University Press

[5] Nourdin. *Agrégation de mathématiques, épreuve orale.* Dunod

[6] Ouvrard. *Probabilités 2.* Cassini

[7] Queffelec, Zuily. *Éléments d'analyse, deuxième édition. Dunod*

...