Université Paris 13, IUT de Saint-Denis
Année universitaire 2011-2012

Licence Pro MDQ – Géométrie

Devoir à la maison

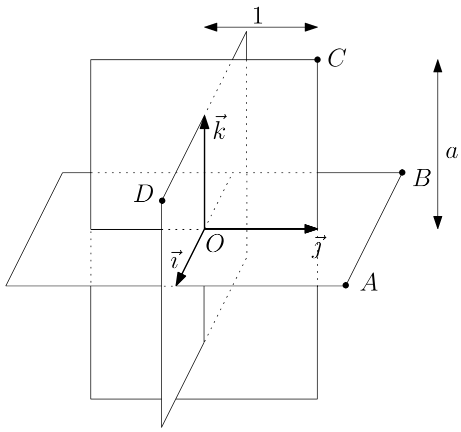
La qualité de la présentation et de la rédaction sera prise en compte.
On suppose le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et l'espace d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Exercice 1. On considère les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

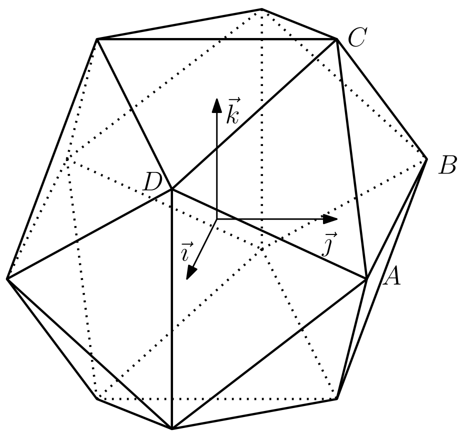
1. Déterminer tous les vecteurs $\vec{w}$ tels que $\vec{w} \perp \vec{u}$ et $\vec{w} \perp \vec{v}$. *(Écrire un système de deux équations et le résoudre)*
2. Calculer $\vec{t} = \vec{u} \wedge \vec{v}$. Utiliser ce résultat pour résoudre différemment la question précédente.

Exercice 2 – *Tétraèdre.* On considère les points $A(0,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(1,0,1)$, $D(0,1,1)$, $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $I(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$.
1. Que valent les distances AB, BC, CD, DA, MA et MI ?
2. Calculer les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{AIB}$.
3. Calculer l'aire des triangles ABC et AMB.
4. Calculer $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}$ et montrer que ce vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{MB}$.
5. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

Exercice 3. On considère trois rectangles de largeur 2 et longueur $2a$ (où a est un réel positif), disposés comme sur le dessin suivant :



1. Donner les coordonnées de A, B, C et D (en fonction de a).
2. Vérifier que le triangle ADC est équilatéral.
3. Montrer que $\overrightarrow{DC} \perp \overrightarrow{OA}$.
4. Calculer les distances AB, AC, BC et OA.
5. Pour quelle valeur de a supérieure à 1 le triangle ABC est-il équilatéral ? On note φ cette valeur.
On suppose maintenant que $a = \varphi$. On fera les calculs en gardant l'expression exacte et on donnera des valeurs approchées des résultats.
6. Calculer l'aire du triangle ABC et le volume du tétraèdre $ABCO$
7. Calculer l'angle $\widehat{BAD}$.
8. On note θ l'angle formé par les triangles ADC et ABC. On admet que θ est aussi l'angle entre $\vec{u} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ (parce que ces vecteurs sont orthogonaux aux triangles). En déduire une valeur approchée de θ.
9. Justifier brièvement que les triangles obtenus en joignant les sommets des rectangles comme ci-dessous sont tous équilatéraux :



10. [On attend des réponses simples (mais justifiées)] Combien ce solide a-t-il de sommets ? Combien y a-t-il de triangles du type de ABC, c'est-à-dire dont un côté est un côté d'un des trois rectangles ? Combien y a-t-il de triangles du type de ACD, c'est-à-dire dont les trois sommets appartiennent à trois rectangles différents ? En déduire le nombre total de faces (c'est-à-dire de triangles). Déduire alors des questions précédentes l'aire totale du solide et son volume intérieur.

Exercice 4. Dans le plan, on définit les points $A(-2,4)$ et $B(5,-1)$ et les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.
1. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|\vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u}\|^2$.
2. Calculer la projection orthogonale de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$ et celle de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$, et représenter les résultats graphiquement, ainsi que $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
3. Déterminer les coordonnées du point C tel que $ABCO$ est un parallélogramme, et calculer l'aire de ce parallélogramme.