Fiche 1 – Calcul vectoriel dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Dans les exercices suivants, on suppose le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, et l'espace d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

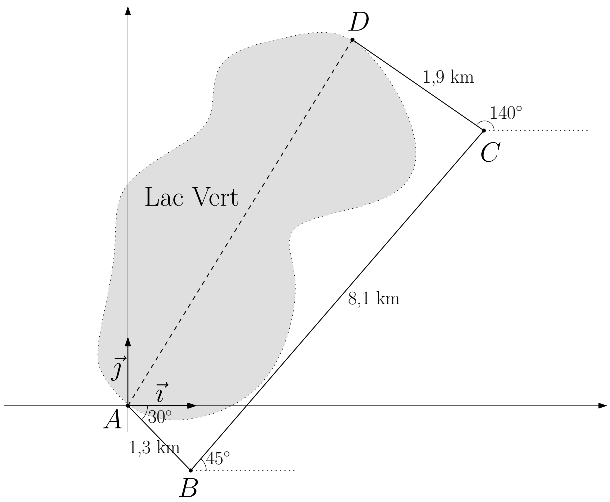
Produit scalaire

Exercice 1. Dans le plan, soit les points $A(2, -1)$, $B(3, -3)$, $C(-1, -1)$, $D(-2, -2)$ et $E(4, -2)$.
1. Donner les coordonnées des vecteurs suivants : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{ED}$. Expliquez pourquoi les deux derniers vecteurs sont égaux.
2. Calculer la norme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{ED}$.
3. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED}$.

Exercice 2. Soit les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$.
1. Représenter les trois vecteurs dans un même plan cartésien.
2. Calculer les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$, $3\vec{u} + 2\vec{v} - 4\vec{w}$ et $5\vec{u} - 2\vec{v} - \vec{w}$.
3. Évaluer $\|\vec{u} - \vec{v}\|$.
4. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$. En déduire l'angle (non orienté) entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
5. Faire de même avec $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Exercice 3. Dans l'espace, soit les points $A(1, 2, -3)$, $B(4, -2, 5)$, $C(-5, -2, 3)$, $D(-6, -2, -5)$ $E(4, -4, -3)$ et $F(2, -1, 3)$.
1. Quelles sont les coordonnées et la norme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$?
2. Calculer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF})$.
3. Pour chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$, donner un vecteur unitaire colinéaire et de même sens.
4. Quelles sont les coordonnées de $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CD}$ et de $-4\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{DC}$?

Exercice 4 – *Arpentage.* On souhaite mesurer la distance entre deux points du bord d'un lac schématisé ci-dessous (le dessin n'est pas à l'échelle). Pour calculer la distance AD, on effectue une série de mesures (sur le bord) indiquées sur le dessin.



1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CD}$ dans le repère de la figure (unité : 1 km).
2. En déduire les coordonnées de $\overrightarrow{AD}$, et conclure : quelle est la longueur du lac ?

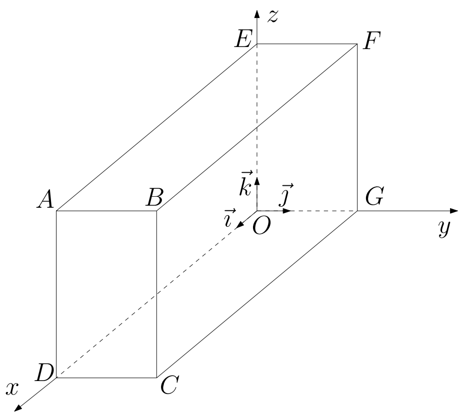
Exercice 5. Dans le plan, soit les points $A(1,2)$, $B(3,4)$ et $C(5,2)$.
1. Montrer que ABC est un triangle rectangle. En quel sommet est l'angle droit ? *Utiliser le produit scalaire pour montrer l'orthogonalité de deux vecteurs*
2. Quelles sont les mesures des deux autres angles ? *Obtenir leur cosinus à l'aide de produits scalaires*

Exercice 6. Dans le plan, soit le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.
1. Donner un exemple de vecteur non nul orthogonal à $\vec{v}$.
2. Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, calculer $P_{\vec{v}}(\vec{u})$.
3. Donner un exemple de vecteur $\vec{w}$ tel que $P_{\vec{v}}(\vec{w}) = -\vec{v}$.
4. Déterminer tous les vecteurs $\vec{w}$ tels que $P_{\vec{v}}(\vec{w}) = -\vec{v}$.

Exercice 7. Dans l'espace, soit les points $A(0,0,1)$, $B(1,2,0)$ et $C(2,3,3)$.
1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer les coordonnées de $\vec{u} = P_{\overrightarrow{AB}}(\overrightarrow{AC})$.

Exercice 8. Soit le triangle dont les sommets sont les points $A(2,1,-1)$, $B(3,0,4)$ et $C(4,5,6)$.
1. Quel est le périmètre de ce triangle ?
2. Quel est l'angle θ au sommet A ?

Exercice 9. On considère le parallélépipède rectangle suivant :



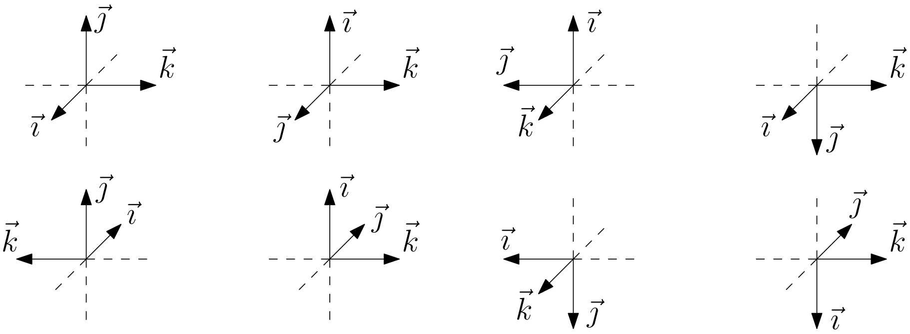
où B a pour coordonnées $(7, 3, 5)$.
1. Donner les composantes des vecteurs $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{DF}$.
2. Que vaut $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED}$? (Comparer avec les vecteurs précédents)
3. Que valent les distances AC et DF ?
4. Quel est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DF}$?
5. Avec très peu de calculs, que vaut $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}$? et $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GE}$?

Exercice 10. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs (du plan ou de l'espace).
1. On suppose que $\vec{u} \perp \vec{v}$. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, exprimer $\|a\vec{u} + b\vec{v}\|$ en fonction de $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.
2. On suppose que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$. Montrer que $\vec{u} + \vec{v} \perp \vec{u} - \vec{v}$. Illustrer ceci par un dessin.

Produit vectoriel

Exercice 11. On définit les vecteurs $\vec{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Évaluez si possible chacune des expressions suivantes :
a) $\vec{s} \wedge \vec{t}$ **b)** $\vec{u} \wedge \vec{t}$ **c)** $\vec{s} \wedge \vec{u}$ **d)** $(\vec{s} \wedge \vec{t}) \wedge \vec{u}$
e) $\vec{s} \wedge (\vec{t} \wedge \vec{u})$ **f)** $(\vec{s} \cdot \vec{t}) \wedge \vec{u}$ **g)** $\vec{s} \cdot (\vec{t} \wedge \vec{u})$

Exercice 12 – *Règle de la main droite.* On munit l'espace de l'orientation donnée par la règle de la main droite (comme d'habitude). Parmi les repères orthonormés $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ suivants, dire lesquels sont directs, c'est-à-dire que $\vec{k} = \vec{\imath} \wedge \vec{\jmath}$: (sur les dessins, l'axe en diagonale s'éloigne de l'observateur en allant vers le haut et la droite)



Exercice 13 – *Double produit vectoriel.* Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix}$.
1. Calculer la première coordonnée de $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.
2. Calculer la première coordonnée de $(\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v}$ et de $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$

3. Démontrer la formule du double produit vectoriel :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}.$$

(Ne la vérifier que selon la première coordonnée)

Exercice 14. On considère les points $A(6,2,4)$, $B(2,1,1)$ et $C(a,3,7)$, où a est un nombre réel.
1. À quelle condition le vecteur $\overrightarrow{OC}$ est-il unitaire ?
2. À quelle condition a-t-on $(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BO}) \cdot \vec{k} = 1$?
3. À quelle condition les points A, B et C sont-ils alignés ? *(Que signifie l'alignement pour $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?)*
4. À quelle condition $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 15. Soit les points $A(1,2)$, $B(5,-1)$ et $C(4,4)$.
1. Déterminer les coordonnées de D tel que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Calculer l'aire du triangle ABC.
3. Calculer l'angle orienté entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Exercice 16. On considère les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
1. Trouver un vecteur unitaire $\vec{w}$ orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
2. Trouver un vecteur $\vec{t}$ orthogonal à $\vec{u}$ et coplanaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, par chacune des deux méthodes suivantes :
– justifier que $\vec{t_1} = \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v})$ convient ;
– justifier que $\vec{t_2} = \vec{v} - P_{\vec{u}}(\vec{v})$ convient. *(Relire la définition de $P_{\vec{u}}(\vec{v})$)*
3. Avec un dessin (schématiquement, sans reproduire exactement les coordonnées des vecteurs car c'est un fait général), deviner sans calcul si $\vec{t_1}$ et $\vec{t_2}$ sont de même sens ou non.
4. Retrouver le fait que $\vec{t_1}$ et $\vec{t_2}$ sont colinéaires et le résultat de la question précédente en utilisant la formule du double produit vectoriel. *(Ne pas utiliser les coordonnées)*

Produit mixte

Exercice 17. Soit les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.
1. Calculer $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.
2. Vérifier que $[\vec{u} + 2\vec{v}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, puis le démontrer de façon générale.

Exercice 18. Soit A, B, C, D des points de l'espace.
Comment exprimer le volume du tétraèdre $ABCD$ à l'aide d'un produit mixte ?
(Le volume d'une pyramide est $\frac{1}{3}$(aire de la base)$\times$(hauteur). Comparer à la formule pour le volume d'un parallélépipède)

Exercice 19. Les points $A(1,2,-1)$, $B(3,3,-4)$, $C(2,2,1)$ et $D(5,3,0)$ sont-ils situés dans un même plan ? *(Quel est le volume du parallélépipède dont les arêtes correspondent aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$?)*

Droites, plans, calculs de distances

Exercice 20. Dans le plan, on considère la droite D passant par $A(1,2)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Représenter D graphiquement.
2. Donner un vecteur $\vec{n}$ normal à D et en déduire une équation cartésienne de D.
3. Calculer la distance entre D et le point $M(1,-1)$.

Exercice 21. Dans l'espace, on considère les points $A(1,0,1)$, $B(-1,1,1)$, $C(0,2,-1)$ et $D(2,1,2)$.
1. Calculer la distance entre A et la droite (BC).
2. Déterminer un vecteur $\vec{n}$ normal au plan (BCD), puis calculer la distance de A au plan (BCD).
3. Calculer la distance entre les droites (AB) et (CD).

Exercice 22. Dans l'espace, soit le plan P passant par $A(1,1,2)$ et de vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Donner une équation cartésienne de P.
2. Calculer la distance entre P et le point $M(5,0,1)$.

Exercice 23. Dans l'espace, calculer la distance entre le plan P d'équation $2x - y + z = 5$ et le point $M(1,1,2)$.

Exercice 24. Dans le plan, calculer la distance entre la droite D d'équation $2x + 3y = -1$ et le point $M(3,3)$.