

FICHE 2 – TRANSFORMATIONS AFFINES

Dans les exercices suivants, on suppose le plan muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Exercice 1. Dans le plan affine, on considère la translation T de vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et la rotation R de centre $\Omega(-2, 2)$ et d'angle $\pi/6$.

1. Donner la matrice homogène A associée à la transformation affine T .
2. Donner la matrice homogène B associée à la transformation affine R .
3. Dans un programme d'animation graphique, on veut déplacer un objet de 1 unité de longueur vers la droite et de trois unités vers le haut, puis le faire tourner d'un angle $\pi/6$ autour du point $(-2, 2)$.
- 3.a) Exprimer en fonction de A et B la matrice homogène M correspondant à cette opération.
- 3.b) Calculer M .
- 3.c) Quelle est l'image du point $X(-3, 1)$ par cette opération ?

Exercice 2. Dans le plan affine, on note S la transformation de scaling (ou dilatation, ou changement d'échelle) de centre O , de rapport 2 dans la direction \vec{i} et de rapport $1/2$ dans la direction \vec{j} . On note R la rotation de centre $\Omega(2, 1)$ et d'angle $-\pi/2$.

1. Donner la matrice homogène A associée à la transformation affine S .
2. Donner la matrice homogène B associée à la transformation affine R .
3. Quelle est la matrice homogène de l'opération consistant à faire tourner un objet d'un angle $-\pi/2$ autour du point $(2, 1)$ puis à l'étirer horizontalement et le réduire verticalement d'un facteur 2 ?
4. Par quelle opération annule-t-on l'opération précédente pour revenir à la position initiale ? Donner sa matrice homogène.

Exercice 3. Dans le plan, on considère la droite D passant par $A(5, 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. Donner une équation cartésienne de D de la forme $ax + by = c$ avec $a^2 + b^2 = 1$.
2. En déduire la matrice homogène de la projection orthogonale sur D .
3. Cette transformation est-elle inversible ?

Exercice 4. Dans le plan affine, on considère la droite $D = (AB)$ passant par $A(1, 1)$ et $B(3, -1)$.

1. Donner un vecteur directeur \vec{u} de D . Que vaut l'angle orienté θ entre \vec{i} et \vec{u} ?
2. On note $C(0, 2)$. Montrer que C appartient à D .
3. Quelle est l'image de D par l'opération $R_{-\pi/4, C}$? (faire un dessin)
4. En remarquant que $S_{1, -1}$ est la symétrie par rapport à l'axe Oy , justifier que la transformation

$$F = R_{\pi/4, C} \circ S_{1, -1} \circ R_{-\pi/4, C}$$

est la symétrie par rapport à la droite D , et calculer la matrice A_F .

5. Quelle est l'image de $M(3, 1)$ par F ?
6. Calculer $(A_F)^2$ et expliquer le résultat.