

Fiche 3 – Coniques

Exercice 1. Soit $\mathcal{C}$ la conique d'équation

$$x^2 + 2y^2 - 6x + 8y = 1. \qquad (\Sigma)$$

1. Écrire l'équation de $\mathcal{C}$ sous la forme $X^2 + 2Y^2 = k$, où (X, Y) sont de nouvelles coordonnées que l'on exprimera en fonction de (x, y) et k est une constante à déterminer.
2. Donner la nature de $\mathcal{C}$ (parabole, ellipse, hyperbole, cas dégénéré), ses caractéristiques (axes, sommets) et la représenter graphiquement (dans le repère initial).

Exercice 2. Soit $\mathcal{C}$ la conique d'équation

$$3x^2 - 10xy + 3y^2 + 10x - 6y = 5. \qquad (\Sigma)$$

1. Effectuer un changement de coordonnées pour centrer $\mathcal{C}$, et donner les coordonnées du centre.
2. Écrire la matrice A associée à (Σ), calculer ses valeurs propres et une base orthonormée de vecteurs propres associés. En déduire l'équation réduite de $\mathcal{C}$, sa nature, ses axes et ses sommets.
3. Représenter graphiquement $\mathcal{C}$ dans le repère initial.

Exercice 3. Soit $\mathcal{C}$ la conique d'équation

$$6x^2 + 9y^2 - 4xy = k \qquad (\Sigma)$$

où k est un nombre réel. On note A la matrice associée à (Σ).
1. Montrer que les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 1$.
2. Donner l'équation réduite de $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé associé aux axes (aucun calcul). Quelle est la nature de la conique (Σ), et ses caractéristiques, en fonction de k ?
3. Montrer qu'une base orthonormée de vecteurs propres associée à λ_1 et λ_2 est donnée par

$$\vec{V_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{V_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Pour $k = 4$, représenter graphiquement $\mathcal{C}$ dans le repère initial.