Université Paris 13, IUT de Saint-Denis
Année universitaire 2011-2012

Licence Pro MDQ – Mathématiques appliquées

Fiche 1 – Introduction aux matrices

Calculs de produits

Exercice 1 – ***Produit d'une matrice par un vecteur.*** Dans les cas suivants, calculer AX :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 3 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 – ***Produits successifs.***

1. Calculer AX *(si possible)*, BX et $A(BX)$, où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \text{ et } X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer AX, $A(AX)$ et $A(A(AX)))$ où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 – ***Produits de matrices.***

1. Calculer AB et BA, où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer AB et BA, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -5 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Calculer AB et BA, où

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Calculer AB et BA *(si possible)*, où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 – ***Produits successifs.*** On poursuit l'exercice 2.

1. À la question **1**, calculer AB et $(AB)X$.

2. À la question **2**, calculer $A^2 = AA$, A^2X, $A^3 = AAA$ et A^3X.

Comparer aux résultats obtenus à l'exercice 2.

Exercice 5 – *Équations matricielles.*
1. Déterminer toutes les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $AM = 0$, où $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$.
Calculer le produit AM et en déduire un système d'équations à résoudre.
2. Déterminer toutes les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $AM = MA$, où $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Quelques applications du produit matriciel

Exercice 6 – *Calcul de moyennes.* Au cours du semestre, les 30 élèves d'une classe ont fait 4 devoirs de mathématiques. Les notes sont placées dans un tableau (*une matrice*) où les lignes correspondent aux élèves et les colonnes aux devoirs.
1. Par quelle opération matricielle peut-on obtenir le tableau constitué des moyennes des notes aux 4 devoirs pour chaque élève ? *Introduire le vecteur* $X = {}^t\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$
Et le tableau constitué des moyennes des notes des élèves pour chaque devoir ?
2. Comment (par un calcul matriciel) obtenir la moyenne de toutes les notes à tous les devoirs ?
3. Les devoirs sont affectés de coefficients : 3 pour le dernier et un pour les autres. Que devient la réponse à la toute première question ?
4. On souhaite comparer les moyennes de chaque élève selon que les devoirs ont même coefficient ou bien les coefficients de la question précédente (par exemple). Comment obtenir un tableau présentant les deux possibilités ?

Exercice 7 – *Cours de bourse.* Le portefeuille d'actions d'un individu comporte trois titres. La matrice A ci-dessous représente le nombre d'actions de chaque titre, et la matrice B le cours de chaque action en dollars pour une semaine donnée (du lundi au vendredi) :

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 150 & 125 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1.90 & 1.95 & 2.00 & 2.05 & 2.05 \\ 3.10 & 3.08 & 3.14 & 3.12 & 3.09 \\ 0.85 & 0.90 & 0.92 & 0.94 & 1.00 \end{pmatrix}.$$

1. Calculez AB. Que représente cette matrice ?
2. On suit désormais l'évolution du portefeuille de plusieurs individus. Comment adapter ce qui précède ?

Exercice 8. Un chercheur étudie la propagation d'un virus dans une population de 1000 rats de laboratoire. Chaque semaine, 80% des rats infectés éliminent le virus de leur système alors que 10 % des rats non infectés contractent le virus. Initialement, la moitié des rats sont infectés.
1. Combien de rats sont infectés après une semaine ? Exprimer l'évolution du vecteur

$$\begin{pmatrix} \text{“nombre de rats sains”} & \text{“nombre de rats infectés”} \end{pmatrix}$$

par un produit matriciel. (Il s'agit d'approximations, donc ces nombres peuvent ne pas être entiers)
2. Comment obtenir le nombre de rats infectés après 5 semaines ?

Exercice 9 – *Suite récurrente linéaire.* La suite de Fibonacci est définie par récurrence par $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ puis, pour tout $n \geq 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.
1. Calculer F_1, F_2,..., F_5.
2. On pose, pour tout n, $X_n = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$. Montrer que $X_{n+1} = AX_n$, où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Justifier que $X_n = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.