Fiche 2 – Systèmes d'équations linéaires

NB : à chaque fois qu'il est demandé de résoudre un système d'équations linéaires, utiliser **impérativement** la méthode du pivot de Gauss.

Systèmes d'équations linéaires

Exercice 1. Résoudre les systèmes d'équations suivants, c'est-à-dire déterminer l'ensemble de leurs solutions :

a) $\begin{cases} 3x-4y &= 4 \\ 6x-4y &= 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a-2b-3c &= -1 \\ 2a-b-2c &= 2 \\ 3a-b-3c &= 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4 &= 1 \\ x_1+x_2-x_3+x_4 &= 2 \\ x_1-x_2-x_3-x_4 &= -1 \\ x_1+x_2+x_3-x_4 &= -3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3 &= 3 \\ x_1-x_2+x_3 &= 1 \\ x_1-3x_2+x_3 &= -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x+2y-5z &= 2 \\ x+2y &= 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x+6y+2z &= 4 \\ -6x-12y-2z &= -8 \\ 9x+18y+4z &= 12 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x+y-3z &= 1 \\ x-y+2z &= -2 \\ 4x-y-z &= -3 \\ x+2z &= 3 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 3x+2y-2z+t &= -3 \\ 2x-y-3z &= -2 \\ -x+4y+4z+t &= 1 \end{cases}$

Exercice 2.
1. Soit $a \in \mathbb{R}$ un paramètre. Résoudre le système

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = -2 \\ -3x + 2y + 2z = 2 \\ 4x + 4y - 15z = a \end{cases}$$

en fonction de a.
2. Soit $p, a \in \mathbb{R}$ des paramètres et soit le système

$$(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} x - y + z + 2t = a \\ -2x + 3y - 4z - 10t = -2a \\ 3x - 4y + pz + 12t = 4a \end{cases}$$

Résoudre (S) en discutant suivant les valeurs de p et a.

Quelques exemples d'applications

Exercice 3 – ***Dilution.***
1. Quelles quantités de lait contenant 1.5% de matières grasses et de crème fraîche contenant 15% de matières grasses doit-on mélanger pour obtenir 5 litres de lait contenant 3% de matières grasses ? (Le pourcentage de matière grasses est relatif aux masses : 1.5% de matières grasses signifie 1.5 g de matières grasses pour 100 g. De plus, 1 L de lait pèse environ 1 kg.)
2. Une solution A contient 6 g de sel et 9 g de sucre par litre. Une solution B contient 15 g de sel et 21 g de sucre par litre. Quelle quantité de chaque solution faut-il mélanger pour obtenir 1 litre d'une solution contenant 9 g de sel et 13 g de sucre ?

Exercice 4 – ***Chimie.*** On rappelle qu'une équation chimique est dite équilibrée quand les éléments (F, Cu, S, H, O,. . .) sont présents dans chaque membre en quantité égale, en tenant compte des coefficients ($2H_2O$ désigne 2 molécules d'eau) et des indices (dans une molécule H_2O se trouvent 2 atomes

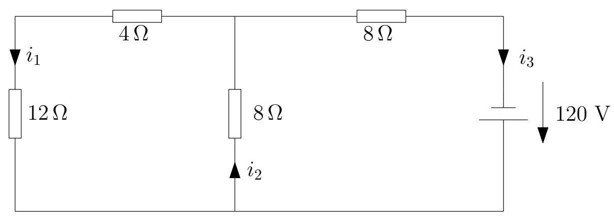
d'hydrogène et 1 d'oxygène). Équilibrer les équations suivantes, c'est-à-dire trouver un coefficient devant chaque molécule permettant de les rendre équilibrées.
1. $NO_2 + H_2O \to HNO_3 + NO$
2. $Fe_2O_3 + HCl \to FeCl_3 + H_2O$

Exercice 5 – ***Formule d'Al-Kashi.*** Soit un triangle ABC. On note a (resp. b, c) la longueur du côté opposé au sommet A (resp. B, C) et α (resp. β, γ) l'angle au sommet A (resp. B, C). La formule d'Al-Kashi permet de calculer α, β, γ à partir de a, b, c.
1. Justifier l'égalité $a = b\cos\gamma + c\cos\beta$ (*Dessiner la hauteur issue de* A). Donner deux autres identités similaires.
2. En prenant $\cos\alpha$, $\cos\beta$ et $\cos\gamma$ comme inconnues, en déduire un système d'équations et le résoudre pour exprimer $\cos\alpha$ en fonction de a, b et c. Vérifier que l'on en déduit bien la formule d'Al-Kashi :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

(Remarque : les propriétés du produit scalaire permettent une autre démonstration ; voir le cours de géométrie)

Exercice 6 – ***Circuit électrique.*** Soit le circuit électrique ci-dessous.



En appliquant les lois de Kirchhoff, on obtient le système d'équations (où les courants sont mesurés en ampères)

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 & = & 0 \\ 8i_2 + 8i_3 & = & 120 \\ 16i_1 + 8i_2 & = & 0 \end{cases}$$

Quelles sont les valeurs des courants i_1, i_2 et i_3 ?

Inverses de matrices

Exercice 7. Calculer (par la méthode du pivot de Gauss) l'inverse des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 8 – ***Inverse et résolution de système.***
1. Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.
2. Retrouver la solution du système **b)** de l'exercice **1**.
3. Résoudre l'équation $AX = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ est l'inconnue.

Exercice 9. Soit A, B, C des matrices de taille $(3, 3)$.
1. On suppose que $AB = AC$, et $B \neq C$. Montrer que A n'est pas inversible ?
2. On suppose que $AB + AC = I_3$. Montrer que A est inversible et donner son inverse.
3. Calculer $(I_3 - A)(I_3 + A)$. En déduire que, si $A^2 = I_3$, alors $I_3 - A$ est inversible et donner son inverse. Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_3$ telle que $A^2 = I_3$, autre que I_3 ; pouvez-vous trouver un exemple dans lequel A n'est pas diagonale ?
4. Est-ce que $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$?