CORRIGÉ D'UN EXERCICE DU TD 10

Exercice 2
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi. On note $X = X_1$. On suppose $\mathbb{E}[X] = 0$ et $\mathbb{E}[X^4] < \infty$. Le but de l'exercice est de démontrer la loi forte des grands nombres pour la suite $(X_n)_n$. On note, pour tout n, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
1. Montrer que, pour tout n, $\mathbb{E}[S_n^4] = n\mathbb{E}[X^4] + 3n(n-1)\mathbb{E}[X^2]^2$.
2. En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_n \mathbb{P}(|S_n| > n\varepsilon)$ converge.
3. Conclure.

Corrigé On a déjà vu comment l'inégalité de Tchébychev permet de montrer la loi faible des grands nombres si les variables aléatoires sont de carré intégrable : comme $\mathrm{Var}(S_n) = \mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = n\,\mathrm{Var}(X_1)$ (car les X_i sont indépendantes et de même loi), on a $\mathrm{Var}(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(S_n) = \frac{1}{n}\mathrm{Var}(X_1)$ et donc, pour tout $\varepsilon > 0$: (en se rappelant que $\mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right] = \mathbb{E}[X_1] = 0$)

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(\frac{S_n}{n})}{\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{Var}(X_1)}{n\varepsilon^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui donne :

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{(p)} 0.$$

L'outil le plus courant pour passer d'une convergence en probabilité à une convergence presque-sûre est le lemme de Borel-Cantelli. On souhaite ici l'appliquer à $A_n = \{|\frac{S_n}{n}| > \varepsilon\}$. Si $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < \infty$, on conclut que p.s. A_n ne se produit que pour un nombre fini de n, c'est-à-dire que, pour n assez grand, $|\frac{S_n}{n}| < \varepsilon$. Ce n'est pas encore tout à fait la loi forte des grands nombres, mais presque.

En général il n'est cependant pas possible d'appliquer le lemme de Borel-Cantelli directement. Ainsi, la preuve de la loi forte des grands nombres vue en cours, qui requiert l'hypothèse que les variables sont de carré intégrable, applique le lemme de Borel-Cantelli à la sous-suite S_{n^4}, avant d'en déduire le comportement de S_n par approximation à partir de la sous-suite précédente. On se propose ici de démontrer la loi forte des grands nombres sous une hypothèse plus forte, à savoir que les variables sont dans L^4, ce qui permet une preuve plus directe.

On a besoin d'un résultat similaire à «$\mathrm{Var}(S_n) = n\,\mathrm{Var}(X)$» pour le moment d'ordre 4. C'est ce que demande la question 1. La formule demandée s'obtient en développant la puissance quatrième de S_n :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_n^4] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^4\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{1\leq i,j,k,l\leq n} X_i X_j X_k X_l\right] \\
&= \sum_{1\leq i,j,k,l\leq n} \mathbb{E}[X_i X_j X_k X_l].
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{E}[X] = 0$ et que les variables aléatoires sont indépendantes, $\mathbb{E}[X_i X_j X_k X_l]$ est nul dès que l'un des indices n'apparaît qu'une fois (exemple : $\mathbb{E}[X_1 X_2 X_2 X_3] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[X] = 0$). Les termes non-nuls sont ou bien de la forme $\mathbb{E}[X^4]$ (les quatre indices sont égaux), il y en a n, ou bien de la forme $\mathbb{E}[X^2]^2$ (les indices forment une double-paire : 1122,...), il y en a $3n(n-1)$ ($n(n-1)$ choix de 2 indices distincts, et 3 configurations : 1122, 1212, 1221), d'où comme demandé :

$$\mathbb{E}[S_n^4] = n\mathbb{E}[X^4] + 3n(n-1)\mathbb{E}[X^2]^2.$$

On souhaite alors renforcer l'inégalité de Tchébychev en utilisant le moment d'ordre 4 : (c'est la question 2)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) &= \mathbb{P}(|S_n| > n\varepsilon) \\
&= \mathbb{P}(S_n^4 > n^4\varepsilon^4) \\
&\leq \frac{\mathbb{E}[S_n^4]}{n^4\varepsilon^4}
\end{aligned}$$

(en utilisant l'inégalité de Markov à la dernière ligne) d'où, grâce à ce qui précède,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{n\mathbb{E}[X^4] + 3n(n-1)\mathbb{E}[X^2]^2}{n^4\varepsilon^4} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{3\mathbb{E}[X^2]^2}{n^2\varepsilon^4}.$$

En particulier, on en déduit $\sum_n \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) < +\infty$.

Pour conclure (question 3), on applique le lemme de Borel-Cantelli. Il donne $\mathbb{P}(\limsup_n\{|\frac{S_n}{n}| > \varepsilon\}) = 0$, c'est-à-dire : p.s. $\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon$ un nombre fini de n, ou encore : p.s. il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\left|\frac{S_n}{n}\right| \leq \varepsilon$.

On souhaite montrer que $\frac{S_n}{n}$ converge vers 0 p.s., c'est-à-dire : p.s. pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\left|\frac{S_n}{n}\right| \leq \varepsilon$.

La différence est subtile : on a montré : "$\forall\varepsilon > 0$, p.s. (...)", et il faudrait "p.s. $\forall\varepsilon > 0$, (...)". Rappelons-nous que "p.s." signifie "sur un événement de probabilité 1" ou encore "en-dehors d'un événement négligeable". Pour chaque $\varepsilon > 0$ on a un événement N_ε tel que $\mathbb{P}(N_\varepsilon) = 0$ et, si $\omega \notin N_\varepsilon$, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\left|\frac{S_n(\omega)}{n}\right| \leq \varepsilon$. Il faudrait montrer que $N = \bigcup_{\varepsilon>0} N_\varepsilon$ est un événement négligeable. Or les événements N_ε décroissent avec ε, donc $\mathbb{P}(N) = \lim_{\varepsilon\to0^+}\mathbb{P}(N_\varepsilon) = 0$. (On peut aussi se restreindre à $\varepsilon = \frac{1}{p}$ où $p \in \mathbb{N}^*$ pour ne manipuler que des suites)

Finalement, si $\omega \notin N$ alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $\omega \notin N_\varepsilon$ donc il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\left|\frac{S_n(\omega)}{n}\right| \leq \varepsilon$. Ainsi, pour tout $\omega \notin N$, $\frac{S_n(\omega)}{n} \to_n 0$. Comme $\mathbb{P}(N) = 0$, c'est ce qu'il fallait démontrer.

Remarque Concernant ce dernier point, on peut le généraliser légèrement : Si on a une suite d'événements $(\Omega_p)_{p\geq1}$ telle que $\mathbb{P}(\Omega_p) = 1$ pour tout p ("Pour tout p, p.s. Ω_p se produit"), alors $\mathbb{P}(\widetilde{\Omega}) = 1$ où $\widetilde{\Omega} = \bigcap_p \Omega_p$ ("P.s. pour tout p, Ω_p se produit"). En effet,

$$\mathbb{P}(\widetilde{\Omega}) = 1 - \mathbb{P}(\widetilde{\Omega}^c) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_p \Omega_p^c\right) \geq 1 - \sum_p \mathbb{P}(\Omega_p^c) = 1,$$

car $\mathbb{P}(\Omega_p^c) = 0$ pour tout p. On peut donc échanger "$\forall p$" et "p.s." si p parcourt un ensemble *dénombrable* (pour pouvoir utiliser la majoration $\mathbb{P}\left(\bigcup_p \Omega_p^c\right) \leq \sum_p \mathbb{P}(\Omega_p^c)$ ci-dessus). (Ou si la suite $(\Omega_p)_p$ est décroissante, comme dans l'exercice.)