UE : Math 4

Fiche 1 **2007-08**

Révisions sur les intégrales impropres

1. En utilisant la définition d'une intégrale impropre, étudier la convergence des intégrales suivantes :

$\int_2^{+\infty} \ln t \; dt$, $\int_0^{+\infty} e^{-4t} \; dt$, $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} \; dt$.

2. Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ?

$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \; dt$, $\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} \; dt$, $\int_1^{+\infty} \frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}} \; dt$, $\int_0^{\pi} \ln(\sin t) \; dt$,

$\int_2^{+\infty} (1-\cos(1/t)) \; dt$, $\int_0^2 \ln t \; dt$, $\int_0^1 \sin(1/t) \; dt$, $\int_0^{+\infty} \frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}} \; dt$, $\int_{-2}^{+2} \frac{1}{\sqrt{4-t^2}} \; dt$, $\int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \ln(\cos(1/t)) \; dt$,

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ (avec $n \in \mathbb{N} - \{0\}$),

$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin \; bx \; dx$ et $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos \; bx \; dx$ (avec $a > 0$),

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \; ax}{x} \; e^{-x} \; dx$.

3. **Intégrales de Bertrand**

1. Soit a un nombre réel. Etudier la convergence de l'intégrale :

$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{t^a} \; dt.$$

2. Que pensez-vous de l'intégrale suivante :

$$\int_{2008}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^a} \; dt \; ?$$

3. Soit a et b deux paramètres réels . Discuter selon leur valeur de la convergence de l'intégrale :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^a (\ln t)^b} \; dt.$$

4. On dit qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est **sommable** sur $\mathbb{R}$ si l'intégrale suivante est convergente, ce qu'on note

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \; dt < +\infty.$$

1. Que peut-on dire des limites en $-\infty$ et $+\infty$ d'une fonction sommable sur $\mathbb{R}$?
2. Si f est une fonction sommable sur $\mathbb{R}$ et α un réel, alors la fonction $t \mapsto f(t)e^{-i\alpha t}$ est sommable sur $\mathbb{R}$ aussi. Pourquoi ?