

Convergence d'une suite de fonctions

Théorème de convergence dominée de Lebesgue

Continuité et dérivation sous le signe \int

1. Convergence simple

Soit une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge simplement** vers la fonction f sur I si, pour tout $t \in I$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$. On dit que f est la **limite simple** de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Etudiez la limite simple sur $[0, +\infty[$ des trois suites de fonctions suivantes :

$$1. f_n(t) = \frac{\cos nt}{(nt+1)(1+t^2)}, t \in [0, +\infty[$$

$$2. f_n(t) = \frac{1}{t^n + e^t}, t \in [0, +\infty[$$

$$3. f_n(t) = \frac{n \ln(1+t/n)}{(1+t^2)^2}, t \in [0, +\infty[$$

2. Théorème de convergence dominée de Lebesgue

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications continues par morceaux de I dans \mathbb{R} , intégrables sur I . On suppose que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I .

S'il existe une fonction $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ positive et intégrable sur I telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall t \in I, |f_n(t)| \leq \phi(t),$$

alors f est intégrable sur I et :

$$\int_I f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(t) dt.$$

Applications (on précisera l'intervalle I à chaque fois)

- Justifier pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'existence de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos nt}{(nt+1)(1+t^2)} dt$$

et déterminer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{\cos nt}{(nt+1)(1+t^2)} dt.$$

- Justifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'existence de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^n + e^t}$$

et calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{dt}{t^n + e^t}.$$

- Même question pour

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{n \ln(1+t/n)}{(1+t^2)^2} dt.$$

3. Continuité et dérivabilité sous \int

1. Théorème de continuité sous le signe \int .

Soit I et J deux intervalles de \mathbb{R} , $f : (t, x) \mapsto f(t, x)$ une fonction continue par rapport à $x \in J$ et continue par morceaux par rapport à $t \in I$, telle que, pour tout $x \in J$ la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est intégrable sur I .

S'il existe une fonction ϕ positive, continue par morceaux et intégrable sur I telle que

$$\forall (t, x) \in I \times J, |f(t, x)| \leq \phi(t),$$

alors

$$F : x \mapsto F(x) = \int_I f(t, x) dt$$

est continue sur J .

2. Théorème de dérivabilité sous le signe \int .

Soit I et J deux intervalles de \mathbb{R} , $f : (t, x) \mapsto f(t, x)$ une fonction dérivable par rapport à $x \in J$ telle que, pour tout $x \in J$, $t \mapsto \frac{\partial}{\partial x} f(t, x)$ est continue et intégrable sur I .

S'il existe une fonction ϕ positive, continue par morceaux et intégrable sur I telle que

$$\forall (t, x) \in I \times J, \left| \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) \right| \leq \phi(t),$$

alors $F : x \mapsto F(x) = \int_I f(t, x) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur J (autrement dit, «dérivable et de dérivée continue») et

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) dt.$$

3. Applications

(a) On considère la fonction F définie pour $x > 0$ par :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + x^2}.$$

- i. Montrer que F est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
- ii. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $F'(x)$ pour $x > 0$.
- iii. Exprimer F à l'aide de fonctions connues et retrouver les résultats précédents.
- iv. Calculer la limite de $F(x)$ quand x tend vers l'infini.

(b) On considère pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'intégrale :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t} \sin tx}{1 + t^4} dt$$

- i. Montrer que cette intégrale converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. On la note $F(x)$. Montrer que F est une fonction continue sur \mathbb{R} .
- ii. Montrer que F est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
- iii. Vérifier que F est solution de l'équation différentielle :

$$y^{(4)} + y = \frac{x}{1 + x^2}.$$