

Produit de convolution et Transformée de Fourier

- 1.
1. Montrer, lorsque $f * g$ a un sens, que $f * g = g * f$: le produit de convolution est **commutatif**.
 2. Pour $a > 0$, on définit la fonction «porte» de largeur $2a$ par

$$P_{2a}(t) = \mathbf{1}_{[-a, +a]}(t).$$

Pourquoi les produits de convolution suivants sont-ils définis ? :

$$f(t) = (\sin * P_{2a})(t) \quad \text{et} \quad g(t) = (\cos * P_{2a})(t).$$

Les calculer. Vérifier que f est impaire, que g est paire et qu'elles sont toutes deux indéfiniment dérivables sur \mathbb{R} . Expliciter leur dérivées f' et g' .

2. Soit f et g deux fonctions dont on peut définir le produit de convolution $h = f * g$. Montrer que :
1. Si f et g ont même parité alors h est paire, et si f et g sont de parité différente alors h est impaire ;
 2. Si f (ou g) est translatée de a alors h est translatée de a ; c'est à dire :

$$(\tau_a f) * g = \tau_a(f * g).$$

3. Si f et g sont nulles respectivement hors de $[a, b]$ et hors de $[c, d]$ alors $h = f * g$ est toujours bien définie, et est nulle hors de $[a + c, b + d]$.
Vérifier que si f et g sont **causales**, c'est à dire nulles sur \mathbb{R}^- , alors $h = f * g$ est toujours bien définie, et est aussi causale.
4. Soit g une fonction continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R} . Soit f une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R} . On suppose que f est intégrable et a une dérivée bornée.
En utilisant le théorème de dérivation, montrer que $f * g$ est dérivable et calculer sa dérivée.

3. On rappelle que la fonction de Heavyside H est définie, pour $t \in \mathbb{R}$, par

$$H(t) = \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(t).$$

Soit a et b deux réels positifs. Calculer les produits de convolution suivants :

- $h_1 = P_{2a} * P_{2b}$
- $h_2 = H(t)e^{-at} * H(t)e^{-bt}$
- $h_3 = P_{2a}(t - a) * H(t)e^{-bt}$
- $h_4 = P_{2a}(t - a) * e^{-bt}$

4. Dans cet exercice, les transformées de Fourier sont définies avec $\Omega = 2\pi$.

1. Soit f une fonction intégrable sur \mathbb{R} et $\mathcal{F}(f)$ sa transformée de Fourier. Supposons que f est à valeurs réelles. Montrer que :

(a) si f est paire, alors

$$\mathcal{F}(f)(\nu) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos 2\pi\nu t dt$$

(b) et si f est impaire, alors

$$\mathcal{F}(f)(\nu) = -2i \int_0^{\infty} f(t) \sin 2\pi\nu t dt.$$

Dans les deux cas, donner les propriétés de la fonction $\mathcal{F}(f)$.

2. Utiliser ce résultat pour trouver les transformées de Fourier de la fonction P_a et de la fonction Δ_a définie par

$$\Delta_a(t) = \left(1 - \frac{|t|}{a}\right) \mathbf{1}_{[-a, +a]}(t)$$

pour $a > 0$.

3. Calculer

$$I(\omega) = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cos \omega x dx.$$

5. Établir les égalités suivantes :

1. $\mathcal{F}(\sigma f) = \sigma(\mathcal{F}(f))$

2. $\mathcal{F}(\bar{f}) = \overline{\sigma \mathcal{F}(f)}$

3. $\mathcal{F}(h_k f) = \frac{1}{|k|} h_{\frac{1}{k}} \mathcal{F}(f)$

4. $\mathcal{F}(\tau_a f)(\nu) = e^{-i\Omega\nu a} \mathcal{F}(f)(\nu)$

5. $\mathcal{F}(e^{i\Omega\nu_0 t} f(t)) = \tau_{\nu_0} \mathcal{F}(f)$

6. On considère, pour $a > 0$, la fonction $f_a(t) = H(t)e^{-at}$, ainsi que g_a et h_a définies par :

$$g_a(t) = f_a(t) + f_a(-t)$$

$$h_a(t) = f_a(t) - f_a(-t).$$

1. Etudier f_a , g_a et h_a et calculer leur transformée de Fourier.

2. En déduire, pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, la valeur des intégrales :

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x}{1+x^2} dx$$

et

$$J = \int_0^{\infty} \frac{x \sin \omega x}{1+x^2} dx.$$

7. Rappeler quelle est la transformée de Fourier de la fonction porte P_{2a} . Décrire la fonction

$$f(t) = P_{2a}(t)P_{2b}(t).$$

Utiliser la transformée de Fourier pour calculer le produit de convolution

$$\frac{\sin \pi at}{\pi t} * \frac{\sin \pi bt}{\pi t}.$$

8.

1. Montrer que si f est une fonction continue, C^1 par morceaux, telle que f et f' sont sommables, alors

$$\mathcal{F}(f')(\nu) = i\Omega\nu\mathcal{F}(f)(\nu).$$

2. Montrer que si f est une fonction continue sommable telle que $tf(t)$ soit également sommable, alors $\mathcal{F}(f)$ est dérivable et

$$(\mathcal{F}(f))'(\nu) = \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \mathcal{F}(f) \right) (\nu) = -i\Omega\mathcal{F}(tf(t))(\nu).$$

9.

1. Montrer sans calcul que la fonction

$$f(t) = e^{-\pi t^2}$$

admet une transformée de Fourier.

2. Écrire la définition de la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ de f pour $\Omega = 2\pi$.
3. En utilisant le théorème de dérivation, montrer que $\mathcal{F}(f)$ satisfait l'équation différentielle

$$(E) \quad \frac{dy}{d\nu} + 2\pi\nu y = 0$$

4. En déduire que $\mathcal{F}(f) = Ke^{-\pi\nu^2}$ où K est une constante que l'on calculera grâce au théorème d'inversion.

10. Soit une fonction f continue et intégrable sur \mathbb{R} satisfaisant l'équation intégrale suivante (E) :

$$(E) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-a(t-u)^2} du = e^{-t^2}$$

où a est un réel fixé > 0 .

- Quelle est la transformée de Fourier de $f(t) = e^{-t^2}$? (on prend $\Omega = 2\pi$)
- Remarquer que le premier membre de (E) est un produit de convolution.
- Déterminer la solution f de l'équation (E) en calculant la transformée de Fourier des deux membres de (E).