UE : Maths 4

Fiche 4 **2008-2009**

Transformée de Laplace des fonctions et équations différentielles

1. Calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes, en précisant l'abscisse d'intégrabilité :

$f_1(t) = H(t)$ $\quad f_2(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t)$ $\quad f_3(t) = t\,H(t)$ $\quad f_4(t) = t^k H(t)$
(où $k \in \mathbb{N}$)
$f_5(t) = H(t)e^{-\alpha t}$ $\quad f_6(t) = H(t)\cos(\omega t)$ $\quad f_7(t) = H(t)\sin(\omega t)$ $\quad f_8(t) = H(t)t\sin(\omega t)$
(où $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$)
$f_9(t) = H(t)t\cos(\omega t)$ $\quad f_{10}(t) = H(t)\dfrac{\sin t}{t}$ $\quad f_{11}(t) = H(t)\sinh(\omega t)$ $\quad f_{12}(t) = H(t)\cosh(\omega t)$

$$f_{13}(t) = \begin{cases} \sin(t - \frac{3\pi}{4}) & \text{si } t > \frac{3\pi}{4} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Pour chacune des fonctions ϕ suivantes, déterminer la fonction causale f telle que $\mathcal{L}(f)(z) = \phi(z)$:

1. $\phi(z) = \dfrac{1}{(z+2)(z-1)}$ (chercher A, B tels que $\phi(z) = \dfrac{A}{z+2} + \dfrac{B}{z-1}$)
2. $\phi(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z^2+1)}$ (chercher A, B, C tels que $\phi(z) = \dfrac{A}{z+1} + \dfrac{Bz+C}{z^2+1}$)
3. $\phi(z) = \dfrac{z^2+5}{z(z^2+4)}$ (chercher A, B, C tels que $\phi(z) = \dfrac{A}{z} + \dfrac{Bz+C}{z^2+4}$)
4. $\phi(z) = \ln \dfrac{z^2+a^2}{z^2}$ (on calculera d'abord ϕ', et g telle que $\mathcal{L}(g)(z) = \phi'(z)$)

3. On considère l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = \varphi(t)$.

1. On suppose $\varphi(t) = \sin t$. Déterminer la solution f sur $[0, +\infty[$ vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.
(Appliquer la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation pour déterminer $\mathcal{L}(f)(z)$ et ensuite retrouver f) .
2. On suppose $\varphi(t) = e^{-t}$. Déterminer la solution f sur $[0, +\infty[$ vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$.

4. À l'aide de la transformée de Laplace, déterminer les fonctions causales f vérifiant les équations intégrales suivantes :

1. Pour tout $t \geq 0$, $\displaystyle\int_0^t f(x)e^{t-x}\,dx = \sin t.$
2. Pour tout $t \geq 0$, $f(t) + \displaystyle\int_0^t e^{-x} f(t-x)\,dx = \cos t.$

(Reconnaître dans les intégrales des produits de convolution)

5. On cherche les solutions causales de l'équation différentielle $ty'' + y' + ty = 0$ telles que $y(0^+) = 1$.

1. Que vaut $y'(0^+)$? Exprimer les transformées de Laplace de ty, y' et ty'' en fonction de $\mathcal{L}(y)$ et de ses dérivées.
2. On rappelle que $z\mathcal{L}(y)(z) = \mathcal{L}(y')(z) + y(0^+)$. Par suite, quelle est la limite de $z\mathcal{L}(y)(z)$ lorsque z tend vers $+\infty$?
3. Appliquer la transformée de Laplace à l'équation différentielle, pour obtenir une équation différentielle vérifiée par $\mathcal{L}(y)$.
4. Résoudre cette équation, et en déduire $\mathcal{L}(y)$ *(pour déterminer la constante, utiliser la question 2)*.
5. Calculer $\mathcal{L}(y * y)$ et en déduire la convolution $y * y$.