UE : Maths 4

Fiche 6 **2008-09**

Distributions (2)

1. Produit de convolution des distributions

1. Donner la définition du produit de convolution $A*B$ de deux distributions A et B. Pourquoi n'est-il pas toujours défini ?
2. Parmi les distributions vues dans la fiche 5, lesquelles sont à support borné ? Lesquelles sont à support borné à gauche ?
3. Si $f, g \in L^1_{\text{loc}}$ sont telles que le produit de convolution (usuel) $f * g$ a un sens et est localement intégrable, montrer que $d(f * g) = d(f) * d(g)$. (*autrement dit, le produit de convolution des distributions généralise celui des fonctions*)
4. Montrer que, pour toute distribution A,
$$A * \delta = \delta * A = A.$$
On dit que δ est l'élément neutre du produit de convolution des distributions.
5. Montrer que pour translater un produit de convolution de distributions, il suffit de translater un des facteurs :
$$\tau_a(A * B) = (\tau_a A) * B = A * (\tau_a B).$$
Montrer que, pour toute distribution T, $T * \delta_a = \tau_a T$. En déduire :
$$\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}.$$
6. Montrer que pour dériver un produit de convolution il suffit de dériver un des facteurs :
$$(A * B)' = A' * B = A * B'.$$
Soit T une distribution causale et H la fonction de Heaviside. Montrer que $(d(H)*T)' = T$.
7. Montrer que, pour toute distribution A,
$$A * \delta' = A'.$$

2. Tranformée de Fourier des distributions tempérées

Rappels :

- on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des *fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide* ($\phi \in \mathcal{S}$ si ϕ est indéfiniment dérivable et si, pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, $|x|^k \phi^{(n)}(x) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$).
- une *distribution tempérée* est une application linéaire (continue) $T : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$. On note $\mathcal{S}'$ l'ensemble des distributions tempérées.
  Si $f \in L^1$, alors $d(f)$ est une distribution tempérée.
  Si $f \in L^1_{\text{loc}}$ vérifie : il existe $k \in \mathbb{N}$ et $A > 0$ tels que $|f(x)| \leq A|x|^k$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $d(f)$ est une distribution tempérée.
  Si T est une distribution à support compact, alors T définit une distribution tempérée.
- Si $\varphi \in \mathcal{S}$, alors $\varphi' \in \mathcal{S}$ et $\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}$. On définit la dérivation dans $\mathcal{S}'$ comme dans $\mathcal{D}'$, et la transformée de Fourier de la distribution tempérée A est la distribution tempérée $\mathcal{F}_\Omega A$ donnée par : pour tout $\phi \in \mathcal{S}$,
$$\langle \mathcal{F}_\Omega(A), \phi \rangle = \langle A, \mathcal{F}_\Omega(\phi) \rangle.$$
- On a la même formule d'inversion que pour les fonctions : pour toute distribution tempérée A,
$$\mathcal{F}_\Omega(\mathcal{F}_\Omega(A)) = \frac{2\pi}{|\Omega|}\sigma A \text{ et } \mathcal{F}_\Omega^{-1}(A) = \frac{|\Omega|}{2\pi}\mathcal{F}_{-\Omega}(A).$$

On note $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{2\pi}$.

1. Calculer successivement les transformées de Fourier des distributions suivantes : δ, $d(1)$, δ_a, $d(e^{i2\pi\omega t})$ (pour $\omega \in \mathbb{R}^*$), $d(\cos(2\pi\omega t))$ et $d(\cos^2(2\pi\omega t))$.
2. Montrer que si T est une distribution tempérée paire, alors $\mathcal{F}(T) = \mathcal{F}^{-1}(T)$.
3. En utilisant un produit de convolution, calculer $\mathcal{F}(\cos^3(2\pi\omega t))$.
4. A étant une distribution tempérée, calculer les distributions suivantes :
   - $\mathcal{F}(\tau_{t_0}A)(\nu) = \mathcal{F}(A(t - t_0))(\nu)$;
   - $\tau_{\nu_0}\mathcal{F}(A)(\nu) = \mathcal{F}(A)(\nu - \nu_0)$.
5. Établir les relations suivantes :
   (a) $(\mathcal{F}(A))' = \mathcal{F}(-2i\pi tA)$. En déduire $(\mathcal{F}(A))^{(n)}$.
   (b) $\mathcal{F}(A') = 2i\pi\nu\mathcal{F}(A)$. En déduire $\mathcal{F}(A^{(n)})$.
6. Calculer alors $\mathcal{F}(\delta^{(n)})$, et $\mathcal{F}(d(t^n))$.

   Rappel : On peut aussi définir la transformée de Fourier des fonctions $f \in L^2$. En effet, on peut voir que les distributions régulières associées à ces fonctions sont tempérées. On démontre alors que, dans ce cas, $\mathcal{F}(f)$ est la distribution régulière associée à une fonction de L^2, et que :

$$\mathcal{F}(f) = \lim_n \int_n^n e^{-2i\pi\nu t} f(t)\, dt \text{ au sens de la convergence dans } L^2$$

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(f)(\nu)|^2 \, d\nu = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \, dt \text{ (formule de Plancherel).}$$

   La formule d'inversion reste vraie dans L^2 : pour $f \in L^2$, $\mathcal{F}(f) \in L^2$ et

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(t) = f(-t).$$

7. Calculer $\mathcal{F}(P_a)$ (où $P_a = \mathbf{1}_{[-a,a]}$) et en déduire $\mathcal{F}(\frac{\sin(2\pi at)}{t})$ (justifier l'existence de la transformée de Fourier), puis $\mathcal{F}(\frac{\sin t}{t})$, et montrer que :

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \pi.$$

3. Transformée de Laplace des distributions

On rappelle que la transformée de Laplace d'une distribution A à support borné à gauche est la fonction $\mathcal{L}(A)$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $\mathcal{L}(A)(z) = \langle A, \phi_z \rangle$ avec $\phi_z(t) = e^{-zt}$ (sous réserve d'existence !).

1. Calculer $\mathcal{L}(\delta)$.
2. Calculer $\mathcal{L}(T_f)$ où f est une fonction causale.
3. Montrer que :

$$\mathcal{L}(A^{(n)})(z) = z^n \mathcal{L}(A)(z).$$

   En déduire :

$$\mathcal{L}(\delta^{(n)})(z) = z^n.$$

4. Soit l'équation différentielle suivante où X est une distribution :

$$X'' + X = \delta.$$

Déterminer les solutions causales en appliquant la transformée de Laplace.

5. Soit l'équation différentielle suivante où X est une distribution :

$$X'' - X = \delta.$$

1. Déterminer les solutions causales en appliquant la transformée de Laplace.
2. Déterminer les solutions tempérées en appliquant la transformée de Fourier.
   (Il pourra être utile de calculer $\mathcal{F}(e^{-|t|})(\nu)$)