Fiche 4 - Chaînes de Markov (récurrence/transience)

Rappel Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov d'espace d'états E.
Pour $x, y \in E$, notons $x \to y$ s'il existe $n \geq 1$ tel que $P^x(X_n = y) > 0$. Si $x \to y$ et $y \to x$, on dit que les états x et y *communiquent entre eux*. Lorsque tous les états communiquent entre eux, la chaîne est dite *irréductible*. Soit $x, y \in E$.
• Si x est récurrent et si $x \to y$, alors y est récurrent et $y \to x$: x et y communiquent entre eux.
• En conséquence, si $x \to y$ et $y \not\to x$ (pour tout $n \geq 1$, $P^y(X_n = x) = 0$), alors x est transient.
• Si E est fini, alors il existe un état récurrent.
• D'après ce qui précède, si E est fini et si la chaîne est irréductible, alors tous les états sont récurrents.

Exercice 1
Vérifier que les matrices suivantes sont des matrices de transition, et déterminer quels sont les états récurrents et transients des chaînes de Markov associées (on notera les états $1, 2, 3, \ldots$) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.3 & 0.7 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 *Marche aléatoire sur $\mathbb{N}$ absorbée en 0*
Soit $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'élements de $]0, 1[$. On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ d'espace d'états $\mathbb{N}$ et dont les probabilités de transition sont :

$$p(0, 0) = 1 \text{ et, pour tout } i \geq 1,\ p(i, i + 1) = p_i = 1 - p(i, i - 1).$$

Classer les états de cette chaîne de Markov (c'est-à-dire, déterminer quels états communiquent entre eux, et s'ils sont transients ou récurrents).

Exercice 3 *Marche aléatoire biaisée sur $\mathbb{Z}$*
On considére une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$, indépendantes et de même loi. On suppose de plus qu'elles sont intégrables ($E[|X_1|] < \infty$) et que leur espérance est non-nulle : $E[X_1] \neq 0$. On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

1. Montrer que $(S_n)_n$ est une chaîne de Markov, et donner sa mesure initiale et ses probabilités de transition.
2. Montrer que 0 est un état transient. *Indication :* penser à la loi forte des grands nombres.

N.B. En revanche, il est possible démontrer (mais c'est plus difficile) que dans le cas centré (quand $E[X_1] = 0$), 0 est un état récurrent.