

FICHE 6 - LOI GAUSSIENNE, INTERVALLES DE CONFIANCE

Exercice 1 *Estimateur de la variance*

Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes, de même loi, de carré intégrable (c'est-à-dire telles que $E[(X_1)^2] < \infty$). On note m leur espérance et σ^2 leur variance. On pose

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

et

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

1. Calculer $E[\bar{X}]$ et $E[\bar{X}^2]$ en fonction de m et σ^2 . En déduire $E[S]$.
2. Que dit la loi forte des grands nombres sur \bar{X} ? Et le théorème central limite?
3. Si les variables X_i sont de loi gaussienne, rappeler quelle est la loi de \bar{X} et de nS .

Exercice 2 *Ampoules électriques*

On suppose que la durée de vie d'ampoules électriques suit une loi normale de moyenne m inconnue et d'écart-type $\sigma = 100$.

1. On fait une observation de la durée de vie pour $n = 50$ lampes. Donner un intervalle de confiance au niveau 5% pour m .
2. Quelle devrait être la taille de l'échantillon pour qu'on obtienne un intervalle de confiance dont la largeur est inférieure à 20 heures?

Exercice 3 *Comparaison de tailles*

On s'interroge sur la comparaison des tailles moyennes des garçons et des filles de 6 ans dans une population. Pour cela, on a pris comme échantillon représentatif de cette tranche d'âge une classe d'école primaire (niveau CP) et on a observé :

- Pour les 16 garçons, une taille moyenne de 126,5 cm et un écart-type de 12,5 cm ;
- Pour les 15 filles, une taille moyenne de 136,9 cm et un écart-type de 11,9 cm.

On suppose que la distribution des tailles dans chacune des sous-populations (garçons ou filles) suit une loi gaussienne.

1. Donner des intervalles de confiance (à 5% de risque) pour les tailles moyennes des filles et des garçons.
2. Donner des intervalles de confiance pour l'écart-type de la taille des filles et des garçons.
3. Les écarts-types observés permettent-ils de déduire que les variances dans les deux sous-populations sont différentes?
4. Sur la base de la question précédente, on suppose que la variance est la même dans les deux cas. Un observateur avance, au vu de l'échantillon : « Dans la population, la taille moyenne des filles dépasse de plus de 2 cm celle des garçons. » Les données confirment-elles significativement cette opinion au niveau 5%?